א. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A : $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$, שמנתה q .

נוכיח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

$$a_n \cdot a_{n+1} = a_1q^{n-1} \cdot a_1q^n$$
$$a_n \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot a_1q^{2n-1} \quad \leftarrow a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$\boxed{a_n \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot a_{2n}}$$

תשובה: הוכחנו כי לכל n טבעי מתקיים $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

ב. בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A , מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים היא $10,935 \cdot a_1$.

על פי סעיף א: $a_1 \cdot a_{2k} = 10,935 \cdot a_1$, כי a_k ו- a_{k+1} הם שני האיברים האמצעיים בסדרה בת $2k$ איברים.

$$a_1 \cdot a_1q^{2k-1} = 10,935 \cdot a_1 \quad / : a_1 \neq 0$$
$$a_1q^{2k-1} = 10,935$$

כמו כן, נתון כי $a_{2k-2} = 1,215$

$$a_1q^{2k-3} = 1,215$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$: \begin{cases} a_1q^{2k-1} = 10,935 \\ a_1q^{2k-3} = 1,215 \end{cases}$$
$$q^2 = 9$$
$$\boxed{q = 3 \, , \, q = -3}$$

תשובה: $q = 3$, או $q = -3$.

ג. נתון: $a_1 = 5$.

(1) כאמור, ידוע כי $a_{2k-2} = 1,215$, וזה איבר במקום זוגי בסדרה A .

אם $q = -3$, אז כל האיברים, שבמקומות הזוגיים בסדרה, הם שליליים.

לכן, $q = 3$, ואז כל איברי הסדרה A הם חיוביים (ושלמים).

מכיוון ו- $a_1 = 5$ חיובי, והמנה $q = 3$ גדולה מאחת, הרי שהסדרה עולה.

תשובה: כן, הסדרה A היא סדרה עולה.

(2) $a_1 = 5$, $q = 3$ ו- $a_{2k-2} = 1,215$.

$$a_{2k-2} = 1,215 \quad \to a_1q^{2k-3} = 1,215 \quad \to 5 \cdot 3^{2k-3} = 1,215 \quad \to 3^{2k-3} = 243$$
$$3^{2k-3} = 3^5 \quad \to 2k - 3 = 5 \quad \to 2k = 8 \quad \to \boxed{k = 4}$$

תשובה: $k = 4$.