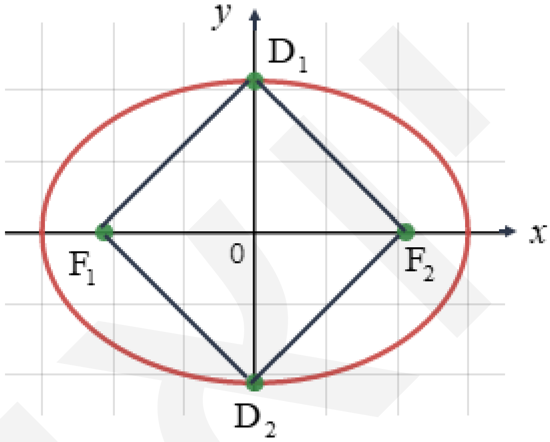
פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשפ"ג , 2023, מועד א', שאלון: 35572

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. נתונה האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **, כאשר,** $a^2=9$ **,** $b>0$ **פרמטר , ומוקדיה על ציר ה-** x **.**



נתון שהמרובע $F_1D_1F_2D_2$ **, שקודקודיו על ציר ה-** y **והאליפסה ובמוקדי האליפסה, הוא ריבוע.**

(1) באליפסה מתקיים $a^2-b^2=c^2$ **, ומכאן ש:** $9-b^2=c^2$.

אלכסוני הריבוע שווים, וחוצים זה את זה, ולכן $b=c$ **.**

$$9-b^2=b^2$$

$$9=2b^2$$

$$4.5=b^2$$

$$\boxed{b=\sqrt{4.5}=\frac{3\sqrt{2}}{2}} \quad \leftarrow b>0$$

תשובה: $b=\sqrt{4.5}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **(ומשוואת האליפסה היא** $\frac{x^2}{9}+\frac{2y^2}{9}=1$**).**

(2) שטח ריבוע שווה למחצית מכפלת האלכסונים.

אלכסוני הריבוע שווים, וחוצים זה את זה, ולכן $b=c$ **.**

$$S_{F_1D_1F_2D_2}=\frac{2c\cdot 2b}{2}$$

$$S_{F_1D_1F_2D_2}=2b^2 \quad \leftarrow b=c$$

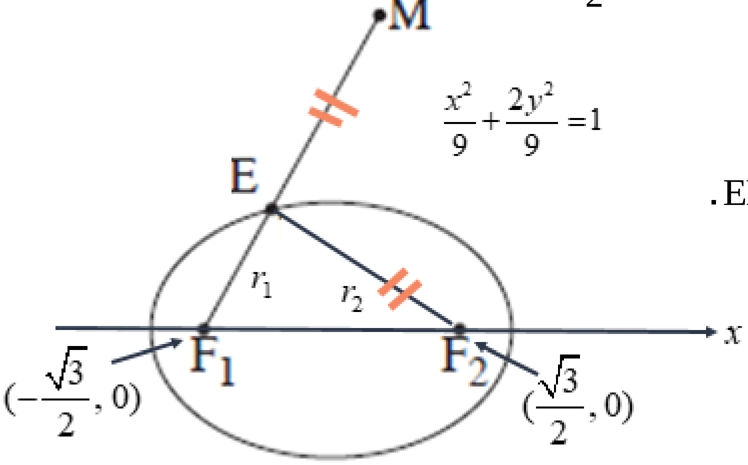
$$S_{F_1D_1F_2D_2}=2\cdot 4.5 \quad \leftarrow b^2=4.5$$

$$\boxed{S_{F_1D_1F_2D_2}=9}$$

תשובה: שטח הריבוע $F_1D_1F_2D_2$ **הוא** 9 **.**

ב. משוואת האליפסה, עבור $b^2=4.5$ היא $\frac{x^2}{9}+\frac{2y^2}{9}=1$.

מוקדי האליפסה הם: $F_2(\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ ו- $F_1(-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ (כזכור $c=b=\frac{\sqrt{3}}{2}$).



נתון ש- $EM=EF_2$.

באליפסה מתקיים $r_1+r_2=2a$.

כלומר, $EF_1+EF_2=2a$, ולכן $EF_1+ME=2a$.

מכאן שהנקודה M נמצאת במרחק קבוע מהנקודה $F_1(-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$,

ולכן היא נמצאת על מעגל שמרכזו הוא $F_1(-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$.

אורך רדיוס המעגל הוא $2a=2\cdot3=6$, ומשוואת המעגל היא $(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+y^2=36$.

תשובה: הוכחנו כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M הוא מעגל ומשוואתו היא: $(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+y^2=36$.

ג. אם נזיז את המעגל $(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+y^2=36$ ימינה ב- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ יחידות, נקבל את המעגל הקנוני $x^2+y^2=36$.

מכפילים ב- $\frac{2}{3}$ את שיעור ה- y של כל אחת מהנקודות שעל המעגל הקנוני, ומתקבל עקום חדש.

מכאן שאם נכפיל ב- $\frac{3}{2}$ את שיעור ה- y של העקום החדש, נקבל את המעגל הקנוני.

$$x^2+(\frac{3y}{2})^2=36$$

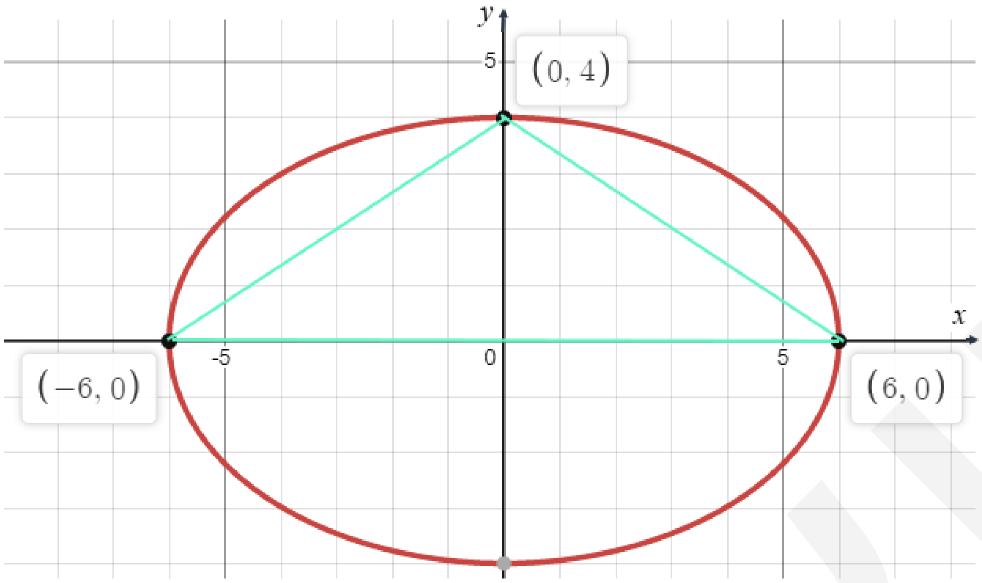
$$x^2+\frac{9y^2}{4}=36 \quad /:36$$

$$\boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1}$$

וזו אליפסה, כאשר $a=6\,,b=4\,,c=2\sqrt{5}$

תשובה: העקום הגיאומטרי החדש הוא אליפסה, ומשוואתה היא $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

ד. נצייר סקיצה של האליפסה שהתקבלה.



כיוון שהציר הארוך של האליפסה מהוה צלע קבועה של המשולש המבוקש, ואורכו קבוע ושווה ל- 12 ,

הרי שהשטח המקסימלי יתקבל כאשר הקודקוד השלישי יהייה על ציר ה- y ,

בנקודה $(0,4)$ **או** $(0,-4)$**, ואורכו הוא** 4 .

שטח המשולש יהייה $24 = \dfrac{12\cdot 4}{2}$.

תשובה: השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש הוא 24.

א. נתונים שני מישורים: $\pi_1:(k+2)x+y+(k+1)z+11=0$ **, ו-** $\pi_2:(k+1)x+y+z-5=0$ **.**

תנאי למישורים מקבילים, או מתלכדים, הוא שיחס המקדמים (שיעורי הנורמל למישור) שווה,

מקדמי ה- y **שווים (** $(b=1)$ **, לכן נדרש** $k+1=k+2$ **ואין פתרון, ולכן המישורים לא מקבילים או מתלכדים.**

תשובה: הסברנו מדוע בהכרח שני המישורים נחתכים זה עם זה.

ב. ישר החיתוך ℓ_1 **בין המישורים מקביל לישר** $\ell_2=\underline{x}=(1,2,-1)+m(-1,k,k)$**.**

(1) מכאן שהווקטור $\underline{(-1,k,k)}$ **מאונך לנורמלים של שני המישורים.**

$$\begin{cases}(-1,k,k)(k+2,1,k+1)=0\\(-1,k,k)(k+1,1,1)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-k-2+k+k^2+k=0\\-k-1+k+k=0\end{cases}$$

$$\left.\begin{cases}k^2+k-2=0 & \rightarrow k=-2,1\\k=1\end{cases}\right\}\boxed{k=1}$$

תשובה: $k=1$.

(2) נציב $k=1$ **ונקבל שווקטור הכיוון של ישר החיתוך הוא** $\underline{(-1,1,1)}$**.**

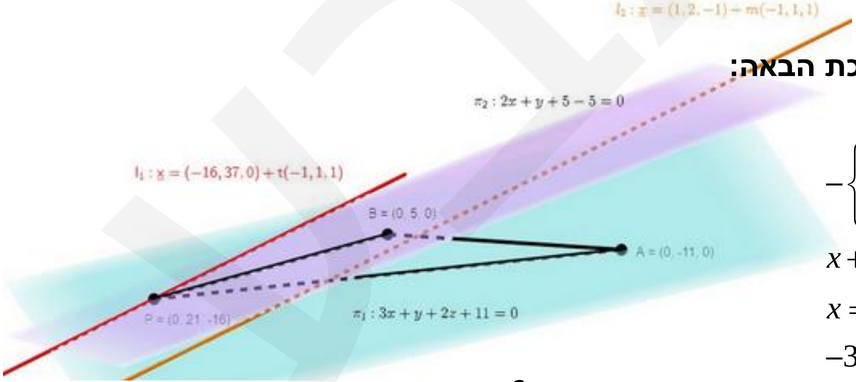
משוואות המישורים הם: $\pi_1:3x+y+2z+11=0$ **ו-** $\pi_2:2x+y+z-5=0$**.**

עבור, לדוגמה, $z=0$ **נקבל את המערכת הבאה:**

$$-\begin{cases}3x+y+11=0\\2x+y-5=0\end{cases}$$

$$x+16=0$$

$$\left.\begin{aligned}&x=-16\\&-32+y-5=0 \rightarrow y=37\end{aligned}\right\}(-16,37,0)$$



תודה לידידי סרור אסעד

תשובה: הצגה פרמטרית אפשרית היא $(-16,37,0)+t(-1,1,1)$.

(3) נמצא את הזווית בין המישורים.

$$\cos\alpha=\frac{|(3,1,2)(2,1,1)|}{|(3,1,2)||(2,1,1)|}=\frac{|6+1+2|}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{4+1+1}}=\frac{9}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}\quad\rightarrow\boxed{\alpha=10.89^\circ}$$

תשובה: הזווית בין המישורים π_1 **ו-** π_2 **היא בת** 10.89° .

ג. נמצא את שיעורי הנקודות P A **ו-** B**, ואת שטח המשולש** APB **.**

(1) הנקודה P **נמצאת על הישר** ℓ_1 **ועל המישור** $[yz]$ **, ולכן** $x_P = 0$**.**

עבור $x_P = 0$ **והישר** $\ell_1 = (-16, 37, 0) + t(-1, 1, 1)$ **נקבל** $t = -16$**, ומכאן את הנקודה** $P(0, 21, -16)$**.**

A **ו-** B **הן נקודות החיתוך עם ציר ה-** y **, של המישורים** π_1 **ו-** π_2 **בהתאמה, ולכן** $x = z = 0$ **.**

עבור $\pi_1 : 3x + y + 2z + 11 = 0$ **נקבל** $y = -11$ **, ולכן** $A(0, -11, 0)$**.**

עבור $\pi_2 : 2x + y + z - 5 = 0$ **נקבל** $y = 5$ **, ולכן** $B(0, 5, 0)$**.**

תשובה: $P(0, 21, -16)$ **,** $A(0, -11, 0)$ **,** $B(0, 5, 0)$**.**

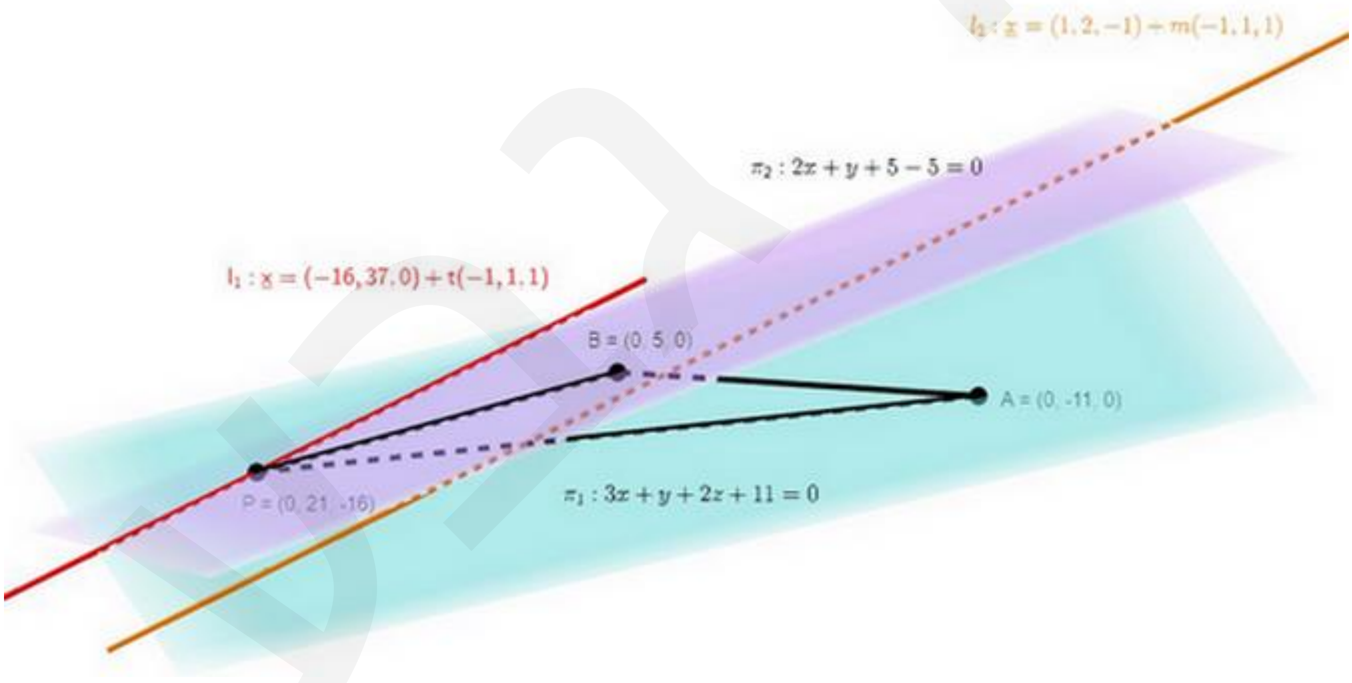
(2) הצלע AB **מונחת על ציר ה-** y**, ולכן** $AB = 5 - (-11) = 16$ **.**

$P(0, 21, -16)$ **נמצאת על המישור** $[yz]$**,**

ולכן הגובה ממנה לצלע AB**, שעל ציר ה-** y **הוא** $|z_P| = |-16| = 16$ **.**

$$S_{\Delta APB} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{16 \cdot 16}{2} = 128$$

תשובה: שטח המשולש APB **הוא** 128 **.**



א. נפתור את המשוואה $\mathrm{I}:\quad w^6=-27$ **, כאשר** w **הוא מספר מרוכב.**

$$z_k=\sqrt[n]{r}\ cis(\frac{\theta}{n}+\frac{360°k}{n})$$

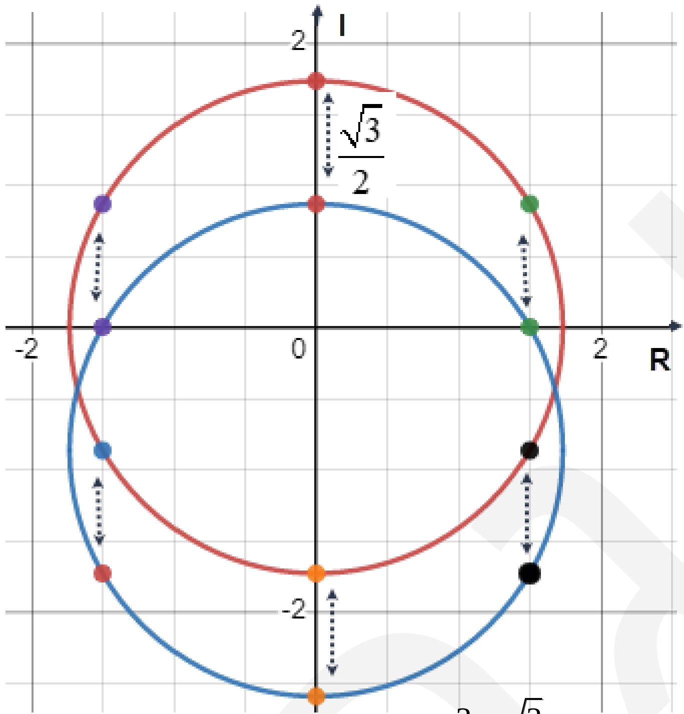
$$w^6=-27=27°cis°180°$$

$$w_k=\sqrt[6]{27}cis\ (\frac{180°}{6}+\frac{360°k}{6})$$

$$\boxed{w_k=\sqrt{3}\ cis\ (30°+60°k)}$$

ניתן לרשום את הפתרונות בהצגה אלגברית/קרטזית, או בהצגה קוטבית/טריגונומטרית,

אבל בגלל תת-סעיף ב (1), שווה לעבור להצגה אלגברית.



$$w_0=\sqrt{3}\ cis\ 30°=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_1=\sqrt{3}\ cis\ 90°=\sqrt{3}\ i$$

$$w_2=\sqrt{3}\ cis\ 150°=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_3=\sqrt{3}\ cis\ 210°=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_4=\sqrt{3}\ cis\ 270°=-\sqrt{3}\ i$$

$$w_5=\sqrt{3}\ cis\ 330°=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

תשובה: $w_0=\sqrt{3}\ cis\ 30°=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_1=\sqrt{3}\ cis\ 90°=\sqrt{3}\ i$, $w_2=\sqrt{3}\ cis\ 150°=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$w_3=\sqrt{3}\ cis\ 210°=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_4=\sqrt{3}\ cis\ 270°=-\sqrt{3}\ i$, $w_5=\sqrt{3}\ cis\ 330°=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

ב. נתונה המשוואה $(z+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^6=-27\quad:\mathrm{II}$ **, כאשר** z **הוא מספר מרוכב.**

(1) ניתן לראות שיש כאן הזזה אנכית, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **יחידות כלפי מטה, של פתרונות משוואה** I,

כי אם z_k **הוא פתרון משוואה** II **, אז** $z_k+\frac{\sqrt{3}}{2}i=w_k$ **ונקבל ש-** $z_k=w_k-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

תשובה: $z_0=\frac{3}{2}$, $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=-\frac{3}{2}$, $z_3=-\frac{3}{2}-\sqrt{3}\ i$, $z_4=-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_5=\frac{3}{2}-\sqrt{3}\ i$.

(2) כל הפתרונות של משוואה מסוג $z^6 = r\,cis\,\theta$, נמצאים על מעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt[6]{r}$,

ומהווים קודקודים של משושה משוכלל, עם זווית מרכזית של $60°$.

לכן, כל הפתרונות שמצאנו בסעיף א נמצאים על המעגל הקנוני, שמשוואתו היא $x^2 + y^2 = 3$.

לאחר ההזזה כלפי מטה, מרכז המעגל הוא $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, ומשוואת המעגל היא $x^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3$.

תשובה: משוואת המעגל היא $x^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3$.

(3) כפי שהסברנו הפתרונות של משוואה מסוג $z^6 = r\,cis\,\theta$, מהווים קודקודים של משושה משוכלל.

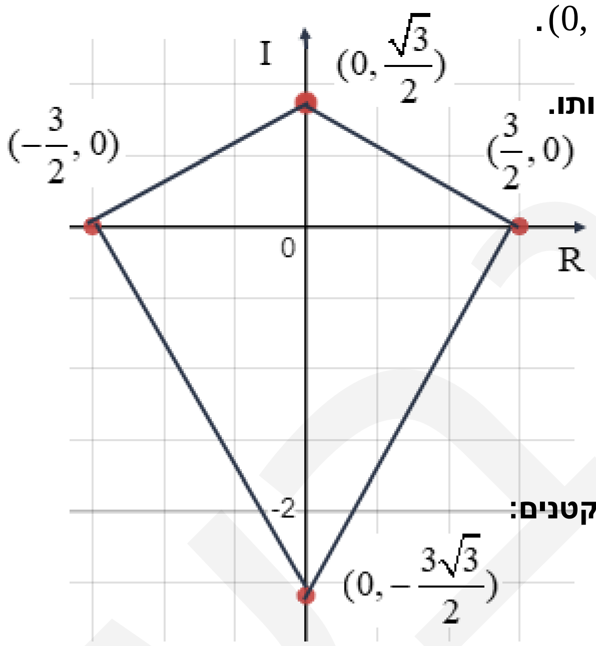
לכן, גם לאחר ההזזה כלפי מטה, נקבל משושה החופף למשושה הנוצר על ידי הפתרונות של משוואה I.

תשובה: הוכחנו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס.

ג. שני הפתרונות המדומים, ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II,

מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

(1) הקודקודים הם: $(\frac{3}{2}, 0)$, $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{3}{2}, 0)$, $(0, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$.



האלכסון שעל ציר y מאונך לאלכסון שעל ציר x וחוצה אותו.

לכן מתקבלים שני זוגות שונים של צלעות סמוכות שוות.

תשובה: המרובע שהתקבל הוא דלתון.

(2) שטח דלתון שווה למחצית מכפלת האלכסונים:

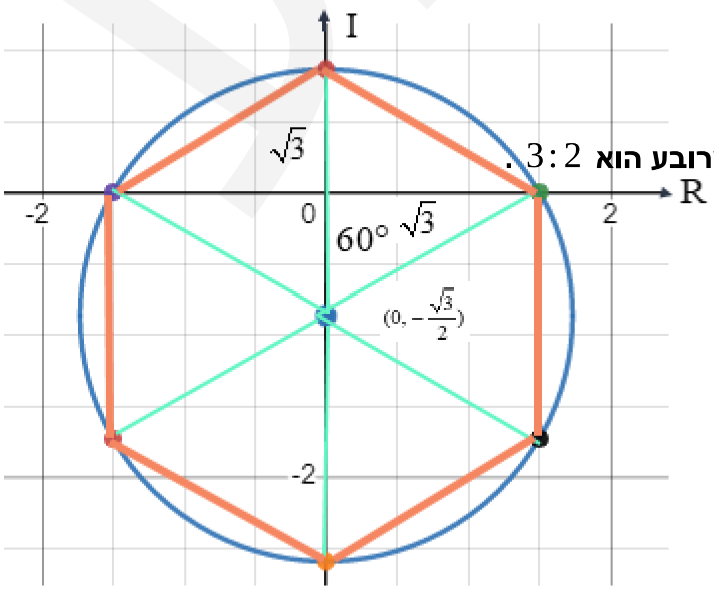
$$S = \frac{3 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

שטח המשושה המשוכלל שווה לסכום ששת המשולשים הקטנים:

$$S = 6 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 60°}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

והיחס המבוקש הוא: $\frac{9\sqrt{3}/2}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{2}$

תשובה: היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע הוא $3:2$.



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}$.

(1) התחום ההגדרה מכנה שונה מאפס.

$$e^{2x}-5e^{x}+4\neq 0$$
$$(e^{x}-1)(e^{x}-4)\neq 0$$
$$e^{x}\neq 1 \quad \rightarrow x\neq 0$$
$$e^{x}\neq 4 \quad \rightarrow x\neq \ell n\,4$$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq 0\,,\,x\neq \ell n\,4$.

(2) נמצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

כאשר $x\rightarrow +\infty$ **אז** $e^{2x}\rightarrow +\infty$ **ובהתאם** $f(x)\rightarrow \frac{2e^{2x}}{e^{2x}}\rightarrow 2$ **ו-** $y=2$ **אסימפטוטה אופקית.**

כאשר $x\rightarrow -\infty$ **אז** $e^{2x}\rightarrow 0^{+}$ **, ובהתאם** $f(x)\rightarrow \frac{0}{0+0+4}\rightarrow 0$ **, ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

$x=0\,,\,x=\ell n\,4$ **מאפסים מכנה ולא מונה, ולכן הישרים** $x=0\,,\,x=\ell n\,4$ **אסימפטוטות אנכיות.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** y **, עבור** $x\rightarrow -\infty$ **(אסימפטוטה אופקית לשמאל).**

$y=2$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** y **, עבור** $x\rightarrow +\infty$ **(אסימפטוטה אופקית לימין).**

$x=0\,,\,x=\ell n\,4$ **אסימפטוטות אנכיות לציר ה-** x .

(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

$$\boxed{f(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}}$$

$$f'(x)=2\cdot\frac{2e^{2x}(e^{2x}-5e^{x}+4)-e^{2x}(2e^{2x}-5e^{x})}{(e^{2x}-5e^{x}+4)^{2}}$$

$$f'(x)=2e^{2x}\cdot\frac{2e^{2x}-10e^{x}+8-2e^{2x}+5e^{x}}{(e^{2x}-5e^{x}+4)^{2}}$$

$$\boxed{f'(x)=2e^{2x}\cdot\frac{-5e^{x}+8}{(e^{2x}-5e^{x}+4)^{2}}}$$

$$0=-5e^{x}+8$$

$$e^{x}=1.6$$

$$x=\ell n\,1.6$$

$$f'(-1)>0\quad\rightarrow\nearrow$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(\ell n\,1.4)>0\\ f'(\ell n\,1.7)<0\end{array}\right\}\boxed{(\ell n\,1.6,-3\tfrac{5}{9}),\max}$$

$$f'(\ell n\,5)<0\quad\rightarrow\searrow$$

תשובה: עלייה - $0<x<\ell n\,1.6$ **או** $x<0$ **, ירידה -** $x>\ell n\,4$ **או** $\ell n\,1.6<x<\ell n\,4$ **.**

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{5e^{x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}$ **, המוגדרת גם בתחום** $x\neq\ell n\,4$, $x\neq 0$ **.**

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ **לבין גרף הפונקציה** $g(x)$ **.**

$$\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}=\frac{5e^{x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}$$

$$2e^{2x}=5e^{x}\quad /:2e^{x}>0$$

$$e^{x}=2.5$$

$$x=\ell n\,2.5\quad\rightarrow\boxed{(\ell n\,2.5,-5\tfrac{5}{9})}$$

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ **לבין גרף הפונקציה** $g(x)$ **הם** $(\ell n\,2.5,-5\frac{5}{9})$ **.**

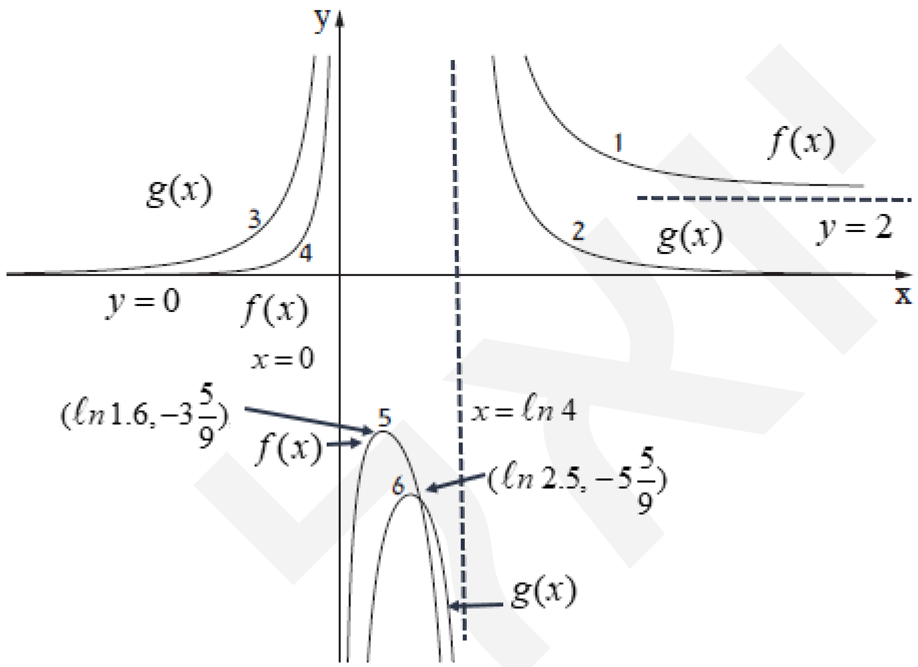
ג. נבדוק מתי $f(x)>g(x)$ **, כלומר מתי** $\frac{5e^x(2e^x-5)}{e^{2x}-5e^x+4}>0 \;\leftarrow\; \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-5e^x+4}>\frac{5e^x}{e^{2x}-5e^x+4}$.

הביטוי $2e^x-5$ **עובר משליליות לחיוביות עבור** $x=\ell n\,2.5$.

הביטוי $e^{2x}-5e^x+4$ **עובר מחיוביות לשליליות עבור** $x<0$ **ומשליליות לחיוביות עבור** $x>\ell n\,4$ **.**

לכן: $f(x)>g(x)$ **עבור :** $x>\ell n\,4$ **או** $0<x<\ell n\,2.5$

וזה מתאים לגרפים 1 ו- 5, שמעל ל- 2 ו- 3, בתחומים שצוינו כאן.



תשובה: לפונקציה $f(x)$ **שייכים החלקים 1, 4, 5. לפונקציה** $g(x)$ **שייכים החלקים 2, 3, 6.**

ד. ננמק האם כל אחד מהביטויים הוא שלילי או חיובי.

I. **הגודל של הביטוי** $\int_{-4}^{-1}(f(x)-g(x))dx$ **הוא שלילי,**

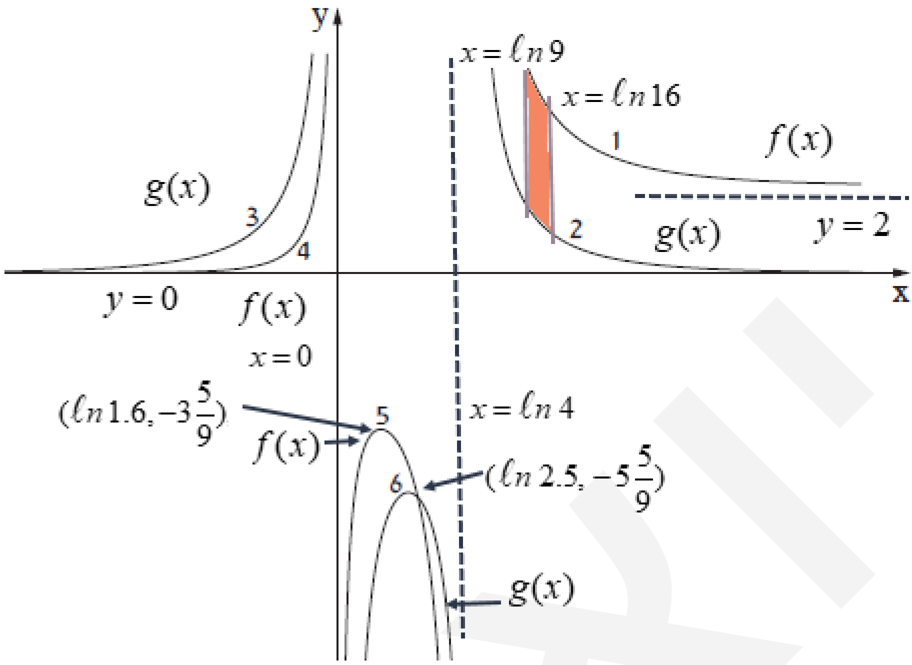
שכן בתחום הזה הגרף של $f(x)$ **מתחת לגרף של** $g(x)$ **(גרף 4 מתחת לגרף 3).**

II. **הגודל של הביטוי** $\int_{\ell n\frac{8}{5}}^{\ell n 2}(f(x)-g(x))dx$ **הוא חיובי,**

שכן בתחום הזה הגרף של $f(x)$ **מעל לגרף של** $g(x)$ **(גרף 5 מעל לגרף 6).**

תשובה: הביטוי $\int_{-4}^{-1}(f(x)-g(x))dx$ **הוא שלילי, והביטוי** $\int_{\ell n\frac{8}{5}}^{\ell n 2}(f(x)-g(x))dx$ **הוא חיובי.**

ה. נחשב את השטח המוגבל (הצבוע בסרטוט) , בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית (הביטוי שבמכנה חיובי בתחום, ולכן לא נדרש ערך מוחלט).



$$S=\int_{\ell n 9}^{\ell n 16}\left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}-\frac{5e^{x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}\right)dx$$

$$S=\int_{\ell n 9}^{\ell n 16}\left(\frac{2e^{2x}-5e^{x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}\right)dx$$

$$S=\int_{\ell n 9}^{\ell n 16}\left(\frac{1}{e^{2x}-5e^{x}+4}\cdot(2e^{2x}-5e^{x})\right)dx$$

$$S=\ell n\,(e^{2x}-5e^{x}+4)\Big]_{\ell n 9}^{\ell n 16}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\ell n\,16: \quad \ell n\,(180) \\ x=\ell n\,9: \quad \ell n\,(40)\end{array}\right\} S=\ell n\,(180)-\ell n\,(40)=\ell n\,(\frac{180}{40})$$

$$\boxed{S=\ell n\,(4.5)\approx 1.504}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $\ell n\,(4.5)\approx 1.504$.

א. נתונה הפונקציה : $f(x) = 4x(\ell n(x^2) - 1)$.

הקדמה: ניתן לראות שהפונקציה, המוגדרת בתחום $x \neq 0$, היא אי-זוגית, ולכן הגרף שלה סימטרי לראשית הצירים. כאשר שואפים לאפס: $x \to 0$ מהר יותר מאשר $\ell n(x^2) \to -\infty$, ולאור תחום ההגדרה תהייה נקודת אי-רציפות סליקה ("חור") בראשית.

(1) בתחום הגדרה, הארגומנט – הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית, צריך להיות חיובי.

$x^2 > 0$ **, ולכן** $x \neq 0$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ *הוא* $x \neq 0$.

(2) נמצא נקודות חיתוך עם ציר ה- x **, בהן מתקיים** $y = 0$.

$$0 = 4x(\ell n(x^2) - 1)$$
$$\ell n(x^2) - 1 = 0 \quad \leftarrow x \neq 0$$
$$\ell n(x^2) = 1$$
$$x^2 = e$$
$$(\sqrt{e}, 0), (-\sqrt{e}, 0)$$

תשובה: שיעורי נקודות חיתוך עם ציר ה- x **הם** $(\sqrt{e}, 0)$ **,** $(-\sqrt{e}, 0)$**.**

(3) נוכיח כי הפונקציה $f(x)$ **היא אי-זוגית .**

$$f(-x) = 4(-x) \cdot (\ell n((-x)^2) - 1)$$
$$f(-x) = -4x \cdot (\ell n(x)^2) - 1)$$
$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

ולכן, הפונקציה $f(x)$ **אי-זוגית, כאשר הגרף שלה סימטרי לראשית, עם חור בראשית.**

תשובה: הוכחנו כי הפונקציה $f(x)$ **היא אי-זוגית.**

ב. (1) נמצא את נקודות הקיצון הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגן.

את סוג הקיצון, נקבע בעזרת $f''(x)$, כהכנה לתת סעיף ב (2).

$$\boxed{f(x)=4x(\ell n(x^2)-1)}$$

$$f'(x)=4\cdot\left[\ell n(x^2)-1+\frac{x\cdot 2x}{x^2}\right]$$

$$\boxed{f'(x)=4\cdot(\ell n(x^2)+1)}$$

$$\ell n(x^2)+1=0$$

$$\ell n(x^2)=-1$$

$$x^2=\frac{1}{e}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{8}{e}),(-\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{8}{e})$$

$$f''(x)=4\cdot\frac{2x}{x^2}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{8}{x}}$$

$$f''(\frac{1}{\sqrt{e}})>0 \quad \to \boxed{(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{8}{e}),\min}$$

$$f''(-\frac{1}{\sqrt{e}})<0 \quad \to \boxed{(-\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{8}{e}),\max}$$

תשובה: $(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{8}{e})$ מינימום, $(-\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{8}{e})$ מקסימום.

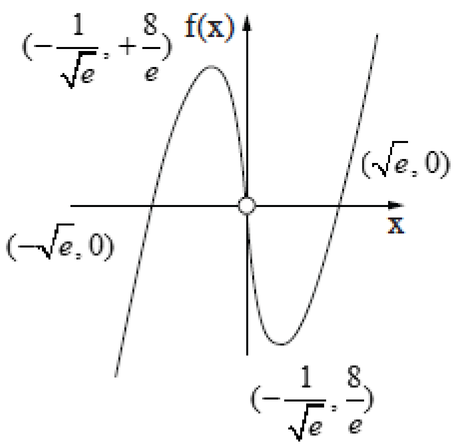
(2) מצאנו כי $f''(x)=\frac{8}{x}$, ולכן הנגזרת השנייה אינה מתאפסת ואין נקודת פיתול.

(תחומי קעירות: קעירות כלפי מעלה $\cup$ - $x>0$, קעירות וכלפי מטה $\cap$ - $x<0$.

אומנם תחומי קעירות מתחלפים, אולם הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=0$.)

תשובה: לפונקציה אין נקודות פיתול.

(3) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל .

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

הקדמה, בנוסח קדם אנליזה, ללא צורך בנימוקים נוספים:

תחום ההגדרה בנוי על פי תחום ההגדרה של $f(x)$ ***, ובגריעת שיעורי ה-*** x ***, שבהן*** $f(x)=0$.

כיוון ש- $f(x)$ ***היא פונקציה אי-זוגית, אז גם*** $g(x)$ ***היא פונקציה אי-זוגית.***

תחומי חיוביות ושליליות ללא שינוי , תחומי עלייה וירידה מתהפכים,

סוג נקודות הקיצון מתחלף וכמובן שיעורי ה- y ***הופכיים,***

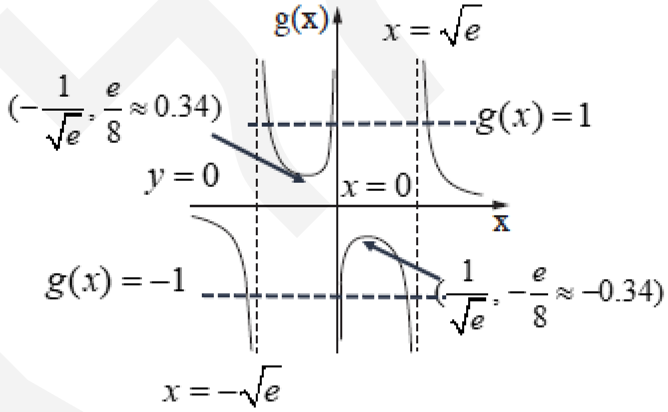
כאשר $f(x)\rightarrow 0$ ***אז ל-*** $g(x)$ ***תהיינה אסימפטוטות אנכיות.***

כאשר $f(x)\rightarrow\infty$ ***אז ל-*** $g(x)$ ***תהיינה אסימפטוטה אופקית*** $y=0$.

(1) תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ **הוא** $x\neq-\sqrt{e}\,,0\,,\sqrt{e}$.

(2) האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ **המאונכות לצירים הן :** $x=-\sqrt{e}\,,x=0\,,x=\sqrt{e}$ **ו-** $y=0$.

(3) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל (כולל סימון עבור תת-סעיף ג (4) .

(4) $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **כאשר** $g(x)=1$ **, או** $g(x)=-1$ **, ויש** 6 **אפשרויות לכך, על פי המסומן בסקיצה.**

תשובה: הגרפים של $f(x)$ **ו-** $g(x)$ **נחתכים זה עם זה ב-** 6 **נקודות.**

ד. נכתוב דוגמה לפונקציה קדומה של $g(x)$ **, בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית, שראינו אותה בתת-סעיף ב(1).**

$$\mathrm{G}(x)=\int\frac{1}{4x\,(\ell n\,(x^2)-1)}\,dx$$

$$\mathrm{G}(x)=\int(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(\ell n\,(x^2)-1)}\cdot(\frac{2}{x})dx$$

$$\boxed{\mathrm{G}(x)=\frac{1}{8}\cdot\ell n\left|(\ell n\,(x^2)-1)\right|+c}$$

תשובה: לדוגמה $\mathrm{G}(x)=\frac{1}{8}\cdot\ell n\left|(\ell n\,(x^2)-1)\right|+3$ ***(הערה – פונקציה זוגית).***