פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשפ"ג , 2023, מועד א', שאלון: 35571

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

נשים לב שאין כאן אינדוקציה, אלא נתונה למעשה זהות.

$1\cdot 2+4\cdot 7+7\cdot 12+...+(3n-2)(5n-3)=n(5n^2-2n-1)$, **נכונה לכל** n **טבעי.**

(1) נחשב את ערך הביטוי $7\cdot 12+10\cdot 17+...+58\cdot 97$.

בתחילת הביטוי, בהשוואה לזהות הנתונה, חסרים המחוברים $1\cdot 2+4\cdot 7=30$.

המחובר האחרון , $58\cdot 97$**, מתאים עבור** $n=20$ **(** $3\cdot 20-2=58\,,\,5\cdot 20-3=97$ **) .**

על פי הזהות הנתונה: $1\cdot 2+4\cdot 7+7\cdot 12+...+58\cdot 97=20\cdot(5\cdot 20^2-2\cdot 20-1)=39{,}180$.

ולכן $7\cdot 12+10\cdot 17+...+58\cdot 97=39{,}180-30=39{,}150$.

תשובה: הערך של הביטוי $7\cdot 12+10\cdot 17+...+58\cdot 97$ **הוא** $39{,}150$.

(2) $1\cdot 2+4\cdot 7+7\cdot 12+...+(3n-2)(5n-3)+(3n+1)(5n+2)=(n+1)(5n^2+8n+\mathrm{C})$, **נכונה לכל** n **טבעי.**

נשים לב, שבאגף שמאל של הזהות, התווסף מחובר אחד תוך שמירה על הכללים,

של גידול ב- 3 **בכופל השמאלי וגידול ב-** 5 **בכופל הימני.**

לכן, על פי הזהות הנתונה בתחילת התרגיל, עבור $n+1$,

מתקיים $1\cdot 2+4\cdot 7+7\cdot 12+...+(3n-2)(5n-3)+(3n+1)(5n+2)=(n+1)(5(n+1)^2-2(n+1)-1)$

$$(n+1)(5(n+1)^2-2(n+1)-1)=(n+1)(5n^2+8n+\mathrm{C}) \quad /:(n+1)\ natural$$

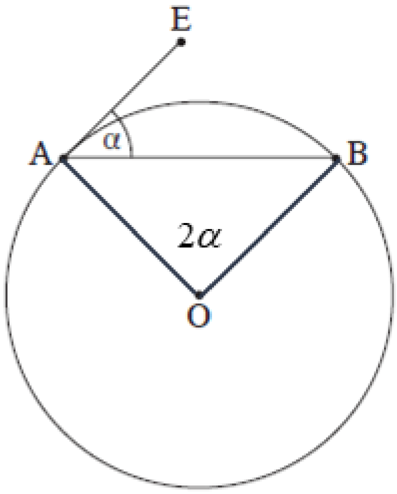
$$5n^2+10n+5-2n-2-1=5n^2+8n+\mathrm{C}$$

$$5n^2+8n+2=5n^2+8n+\mathrm{C}$$

$$\boxed{2=\mathrm{C}}$$

תשובה: $\mathrm{C}=2$.

.



(1) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית, הנשענת על המיתר מצידו השני.

זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית, הנשענת על אותה הקשת.

מכאן, שזווית בין משיק למיתר שווה למחצית הזווית המרכזית, שנשענת על המיתר.

תשובה: $\sphericalangle AOB = 2\alpha$.

(2) היקף מעגל הוא $2\pi R$.

אורכה של קשת, תלוי בזווית המרכזית עליה היא נשענת.

במקרה שלנו, גודלה של הזווית המרכזית הוא 2α **במעלות, ואורך הקשת** $\frac{2\alpha}{360}\cdot 2\pi R = \frac{\alpha}{180}\cdot 2\pi R$

היחס המבוקש הוא $\frac{\frac{\alpha}{180^\circ}\cdot 2\pi R}{2\pi R} = \frac{\alpha}{180}$.

תשובה: היחס, בין אורך הקשת הקטנה AB **ובין היקף המעגל, הוא** $\frac{\alpha}{180}$.

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$, המוגדרת בתחום $x\neq 0$.

(1) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים.

(ניתן למצוא אסימפטוטות על-ידי הבנה, וגם על ידי הצבות.

אין חובה, וגם לא מומלץ, לפרוט בעזרת גבולות !)

המספרים $x=0$ מאפס את המכנה ולא את המונה,

ולכן הישר $x=0$ הוא אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x .

כאשר $x\to+\infty$, הפונקציה חיובית ,

ולכן $2=\frac{2x}{x}=\frac{+x\sqrt{4}}{x}\to f(x)$ ו- $y=2(x\to+\infty)$ אסימפטוטה אופקית לימין.

כאשר $x\to-\infty$, הפונקציה שלילית ,

ולכן $-2=\frac{-2x}{x}=\frac{-x\sqrt{4}}{x}\to f(x)$ ו- $y=-2(x\to-\infty)$ אסימפטוטה אופקית לשמאל.

תשובה: $x=0$, $y=2(x\to+\infty)$, $y=-2(x\to-\infty)$.

(2) נתונה הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x+3)$, כאשר $k>0$.

(הערה - זו הזזה 3 יחידות שמאלה של $f(x)$, כאשר תחום ההגדרה הוא $x\neq-3$,

תחומי העלייה והירידה (אם ישנם) מוזזים בהתאם, ללא שינוי סוג הקיצון (אם ישנו),

וללא שינוי בתחומי חיוביות ושליליות.

וההזזה נוספת של כפל פי $k>0$, שלא משנה עלייה וירידה ותחומי חיוביות ושליליות.)

האסימפטוטות האופקיות מוכפלות פי $k>0$, ולכן נשארות סימטריות לציר ה- x .

על-מנת שמרחק ביניהן יהייה 10 הן צריכות להיות $y=5(x\to+\infty)$, $y=-5(x\to+\infty)$.

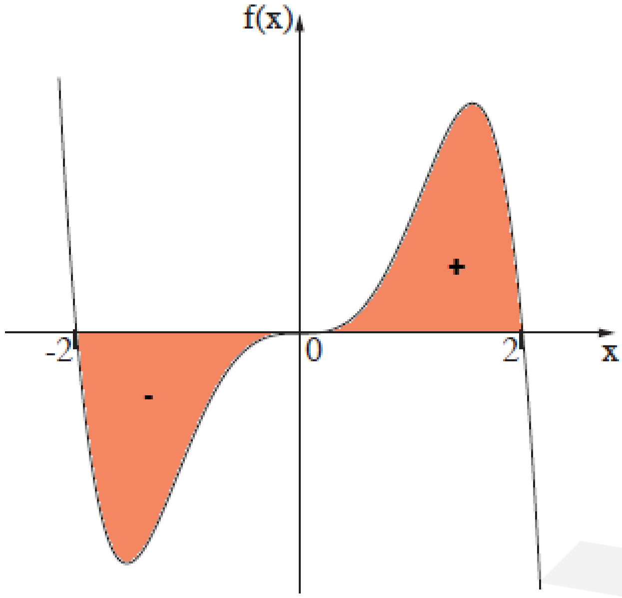
ולכן $k=\frac{5}{2}=2.5$, או $k=\frac{-5}{-2}=2.5$.

לחילופין, ההכפלה פי k הופכת את שתי האסימפטוטות האופקיות ל $y=2k$ ו- $y=-2k$.

לכן: $2k-(-2k)=10\quad\to 4k=10\quad\to\boxed{k=2.5}$

תשובה: עבור $k=2.5$, המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה $g(x)$ הוא 10.

נכתב ע"י עפר ילין



הקדמה

נתונה הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x.

הפונקציה היא אי-זוגית, ולכן הגרף שלה סימטרי לראשית הצירים,

כאשר הנקודה $(0,0)$ היא נקודת פיתול.

השטח מימין, שמעל לציר ה- x ("חיובי"), שווה בגודלו לשטח שמשמאל ("שלילי"),

עקב הסימטריה לראשית, והגבולות עם מספרים נגדיים.

נתונה הפונקציה $g(t)$, המוגדרת בתחום $-2 \le t \le 2$, ומקיימת $g(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,dx$.

(1) נקודת קצה של $g(t)$ היא $(-2,0)$, שכן $g(-2) = \int_{-2}^{-2} f(x)\,dx = 0$.

לאחר מכן, הפונקציה צוברת שטחים "שליליים" ויורדת,

עד שמתחילה, לאחר $t=0$ לצבור שטחים "חיוביים".

ניתן גם להסתכל על הגרף של $f(x)$ ברביע השלישי כגרף של $g'(x)$,

וכל עוד הוא מתחת לציר ה- x , הרי שהנגזרת שלילית.

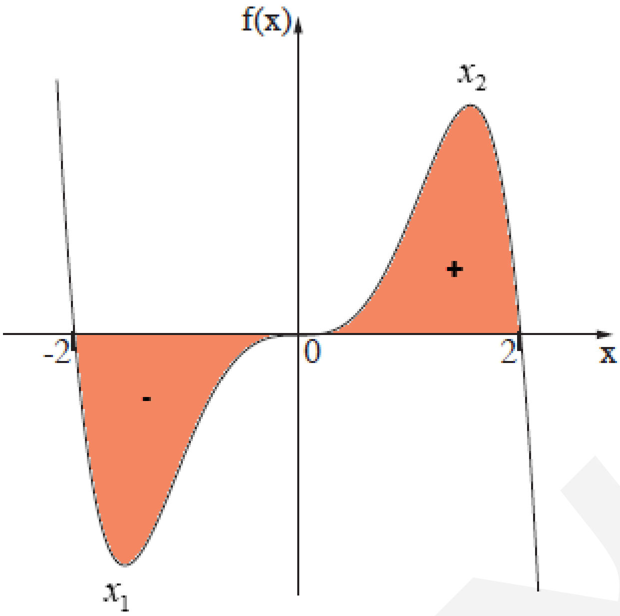
תשובה: $g(t)$ יורדת בתחום $-2 < t < 0$.

(2) עקב השוויון בשטחים המסומנים, הרי ש- $g(2) = 0$, כאשר 0 הוא הערך המקסימלי שמתקבל בקצוות.

עבור $t=0$, $g(t)$ מקבלת ערך מינימלי, בתחום ההגדרה שלה.

תשובה: אין ערכים של t , בתחום $-2 \le t \le 2$, עבורם $g(t)$ חיובית.

(3) נתבונן שנית על הגרף, תוך ההבנה ש: $g'(x)=f(x)$ בתחום $-2\le x\le 2$ (הסבר מפורט בהמשך).



כידוע, כאשר לפונקציית הנגזרת יש קיצון פנימי (כלומר נגזרת מחליפה עלייה בירידה, או להפך)
אז לפונקציה המקורית יש נקודת פיתול (כאשר הפונקציה עוברת מקעירות אחת לאחרת, בהתאם).
מכאן של- $g(t)$ יש שתי נקודות פיתול.

תשובה: לפונקציה $g(t)$ יש שתי נקודות פיתול.

<u>מכאן והלאה – העשרה</u>

בתחום $-2<t<x_1$ או $x_2<t<2$ $g'(t)$ יורדת, $g''(t)<0$ ו- $g(t)$ קעורה כלפי מטה $(\cap)$.

בתחום $x_1<t<x_2$ $g'(t)$ עולה, $g''(t)>0$ ו- $g(t)$ קעורה כלפי מעלה $(\cup)$.

ולכן יש שתי נקודות פיתול.

ניתן לראות גם מהגרף שצבירת השטח הולכת ומואצת (כי השטח השלילי הולך וגדל),
ואז מנקודת המינימום של הגרף צבירת השטח השלילי מואטת (כי השטח השלילי הולך וקטן),
ולכן יש נקודת פיתול.
בצורה דומה צבירת השטח החיובי מואצת עד לנקודת המקסימום, ומתמתנת לאחר מכן,
ומקבלים נקודת פיתול נוספת.

<u>הסבר מפורט:</u>

לפי הגדרת האינטגרל המסוים: אם $F(x)$ היא הפונקציה הקדומה של $f(x)$ $(F'(x)=f(x))$,

אז $g(t)=\int_{-2}^{t} f(x)\,dx=F(t)-F(-2)$.

$F(-2)$ הוא גודל קבוע (מספר) , ולכן $g'(x)=f(x) \leftarrow g'(t)=F'(t) \leftarrow g'(t)=F'(t)-0$.

א. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A , שהאיבר הכללי שלה הוא a_n, ומנתה q.

בונים סדרה חדשה B , שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

נוכיח כי הסדרה B היא גם הנדסית.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} \cdot q^{n+1-1}}{a_n \cdot q^{n-1}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q \cdot q$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q^2$$

קבלנו שהמנה בין כל שני איברים עוקבים בסדרה B קבועה, ולכן הסדרה הנדסית.

תשובה: הוכחנו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

ב. נבדוק את כל אחד מההיגדים.

(1) אם הסדרה A לא מתכנסת – בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

אם הסדרה A לא מתכנסת, אז $|q| \ge 1$, ולכן $q^2 \ge 1$ ובהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

תשובה: ההיגד נכון.

(2) אם הסדרה A יורדת – בהכרח היא גם מתכנסת.

אם $a_1 < 0$ ו- $q > 1$ אז כל איברי הסדרה שליליים, הסדרה יורדת ואינה מתכנסת.

ניתן להסתפק גם בדוגמה: $a_1 = -2$, $q = 2$ והסדרה $-2, -4, -8...$ יורדת ואינה מתכנסת.

תשובה: ההיגד לא נכון.

ג. נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, לכן $-1 < q < 1$.

$$\frac{S^{\mathrm{B}}}{S^{\mathrm{A}}} = \frac{b_1/(1-q^2)}{a_1/(1-q)}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1-q}{(1-q)(1+q)} \quad \leftarrow b_1 = a_1 \quad \leftarrow b_1 = a_1 \cdot q^{1-1}$$

$$3(1+q) = 5$$

$$3 + 3q = 5$$

$$3q = 2$$

$$\boxed{q = \frac{2}{3}}$$

תשובה: $q = \frac{2}{3}$.

ד. נתון n הוא מספר טבעי המקיים באופן הזה: $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+...+\frac{b_n}{a_n}=\frac{205}{729}$,

נוכיח כי הסדרה C היא סדרה הנדסית, כאשר $c_k=\frac{b_k}{a_k}$ **.**

$$\frac{c_{k+1}}{c_k}=\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}:\frac{b_k}{a_k}$$

$$\frac{c_{k+1}}{c_k}=\frac{b_{k+1}\cdot a_k}{a_{k+1}\cdot b_k}$$

$$\frac{c_{k+1}}{c_k}=\frac{q^2}{q}$$

$$\frac{c_{k+1}}{c_k}=q=\frac{2}{3}$$

ולכן הסדרה C היא סדרה הנדסית.

איברה הראשון הוא $c_1=\frac{b_1}{a_1}=1$ **.**

$$\frac{1\cdot((\frac{2}{3})^n-1)}{\frac{2}{3}-1}=\frac{2059}{729}$$

$$(\frac{2}{3})^n-1=-\frac{2059}{2187}$$

$$(\frac{2}{3})^n=\frac{128}{2187}$$

$$(\frac{2}{3})^n=(\frac{2}{3})^7$$

$$\boxed{n=7}$$

תשובה: $n=7$.

א. בארגז א' יש a **פירות:** 3 **תפוחים ו-** $a-3$ **אגסים.**

בארגז ב' יש b **פירות:** 5 **תפוחים ו-** $b-5$ **אגסים.**

אם יוצא תפוח מארגז א', הוא מועבר לארגז ב',

ואז יהיו בארגז ב' $b+1$ **פירות, ומתוכם** 6 **תפוחים ו-** $b-5$ **אגסים.**

לכן, ההסתברות להוצאת שני תפוחים היא : $\frac{3}{a}\cdot\frac{6}{b+1}=\frac{18}{a(b+1)}$.

תשובה: ההסתברות שיצאו 2 **תפוחים היא** $\frac{18}{a(b+1)}$.

ב. ההסתברות להוצאת שני תפוחים היא $\frac{9}{65}$**, ולכן** $\frac{9}{65}=\frac{18}{a(b+1)}$.

ההסתברות להוצאת תפוח ואגס, בסדר זה, היא $\frac{21}{130}$**, ולכן** $\frac{21}{130}=\frac{3}{a}\cdot\frac{b-5}{b+1}$.

נפתור את מערכת המשוואות:

$$:\begin{cases}\frac{18}{a(b+1)}=\frac{9}{65}\\ \frac{3}{a}\cdot\frac{b-5}{b+1}=\frac{21}{130}\end{cases}$$

$$\frac{6}{b-5}=\frac{6}{7}$$

$$b-5=7$$

$$\boxed{b=12}$$

$$\frac{18}{a(12+1)}=\frac{9}{65}$$

$$\boxed{a=10}$$

תשובה: $a=10$, $b=12$.

ג. בארגז א' יש 10 **פירות:** 3 **תפוחים ו-** 7 **אגסים** .

בארגז ב' יש 12 **פירות:** 5 **תפוחים ו-** 7 **אגסים** .

אם נוציא מארגז א' תפוח, אז נעביר אותו לארגז ב', ובארגז ב' יהיו 13 **פירות:** 6 **תפוחים ו-** 7 **אגסים** .

ולכן, ההסתברות להוצאה של אגס מארגז ב, תהייה $\frac{7}{13}$.

זו אומנם הסתברות מותנית, אולם אין צורך בשימוש בנוסחה,

כי אם הוצאנו תחילה תפוח מארגז א', מסתכלים רק קדימה על מה שיש בארגז ב', לאחר ההעברה.

תשובה: ההסתברות שמארגז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארגז א' יצא תפוח, היא $\frac{7}{13}$.

ד. מעבירים את כל הפירות משני האגזים לארגז אחד שהיה ריק,

כך שיש בו 22 **פירות:** 8 **תפוחים ו-** 14 **אגסים .**

מוציאים באקראי פרי ומחזירים אותו, לכן ההסתברות אינה משתנה.

נחשב את ההסתברות שבדיוק 4 **מבין** 6 **הפירות שהוצאו יהיו תפוחים, או שכולם יהיו אגסים.**

אלו שני מאורעות זרים, ולכן נחבר את ההסתברויות של כל אחד מהם.

נחשב את ההסתברות שבדיוק 4 **מבין** 6 **הפירות שהוצאו יהיו תפוחים.**

זו התפלגות בינומית, כאשר $n = 6$, $p = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$, $k = 4$.

$$P_6(4) = \binom{6}{4} \cdot (\frac{4}{11})^4 (1 - \frac{4}{11})^{6-4} = 15 \cdot (\frac{4}{11})^4 \cdot (\frac{7}{11})^2 = 0.1062$$

ההסתברות להוצאה של 6 **אגסים היא :** $(\frac{7}{11})^6 = 0.0664$.

וההסתברות המבוקשת היא : $0.1062 + 0.0664 = 0.1726$.

תשובה: ההסתברות, שבדיוק 4 **מבין** 6 **הפירות שהוצאו יהיו תפוחים, או שכולם יהיו אגסים, היא** 0.1726 .

ה. ידוע שבדיוק מ- 4 **מן הפעמים בדיוק יצא תפוח.**

בסעיף ד ראינו שיש 15 **(** $\binom{6}{4} = 15$ **) אפשרויות להוצאה של בדיוק** 4 **תפוחים.**

מתוכם, יש בדיוק 3 **אפשרויות, שכל הארבעה יהיו ברצף:**

(תפוחים $1-2-3-4$ **, או** $2-3-4-5$ **, או** $3-4-5-6$ **),**

ולכן ההסתברות היא $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

תשובה: ההסתברות היא $\frac{1}{5}$.

נתונים

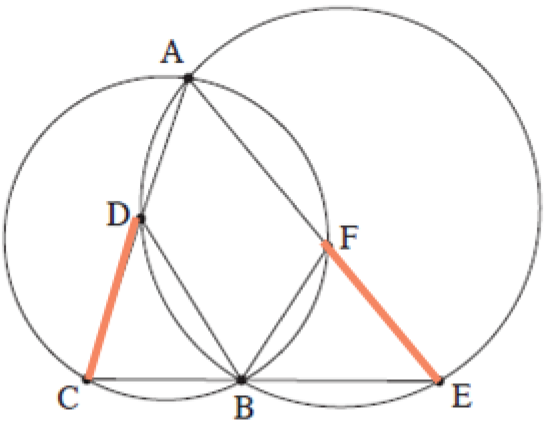
עבור סעיף ב **1.** $DC = FE$.

צ"ל: א. $\Delta ACE \sim \Delta BCD$

ב. $\Delta BFE \cong \Delta BCD$

ג. (1) $AC \cdot BE = AE \cdot BC$ **(2)** $\sphericalangle CAB = \sphericalangle EAB$

ד. $\sphericalangle DEC = \sphericalangle FCE$

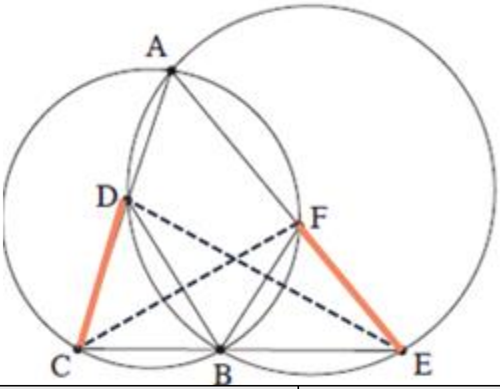


הסבר	מס'	טענה	נימוק
	2	$\sphericalangle AEC + \sphericalangle ADB = 180°$	סכום זוויות נגדיות במרובע $ADBE$ החסום במעגל הוא $180°$
	3	$\sphericalangle CDB + \sphericalangle ADB = 180°$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
3 ,2	4	(ז) $\sphericalangle CDB = \sphericalangle AEC$	
	5	(ז) $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCD$	זווית משותפת
5 ,4	6	$\Delta ACE \sim \Delta BCD$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. א	
	7	$\sphericalangle DCB + \sphericalangle AFB = 180°$	סכום זוויות נגדיות במרובע $ACBF$ החסום במעגל הוא $180°$
	8	$\sphericalangle AFB + \sphericalangle EFB = 180°$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
8 ,7	9	(ז) $\sphericalangle DCB = \sphericalangle EFB$	
5 ,1 ,4	10	$\Delta BFE \cong \Delta BCD$	משפט חפיפה זווית צלע זווית
		מ.ש.ל. ב	
6	11	$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{BD} = \frac{CE}{CD}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
10	12	$BD = BE$	צלעות מתאימות שוות במשולשים חופפים
12 ,11	13	$AC \cdot BE = AE \cdot BC$	
		מ.ש.ל. ג (1)	
13	14	$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BE}$	
14	15	$\sphericalangle CAB = \sphericalangle EAB$	משפט חוצה זווית הפוך
		מ.ש.ל. ג (2)	

דרך אפשרית אחרת לסעיף ג (2) :

14. $BF = BC$ **(צמב"ח על פי 10)**

15. $\sphericalangle CAB = \sphericalangle EAB$ **(על מיתרים שווים נשענות זוויות היקפיות שוות מאותו צד, על פי 14)**



הסבר	מס'	טענה	נימוק
	16	$\sphericalangle FCE = \sphericalangle EAB$	**על קשת משותפת** FB **במעגל שמאלי נשענות זוויות היקפיות שוות**
	17	$\sphericalangle DEC = \sphericalangle CAB$	**על קשת משותפת** DB **במעגל ימני נשענות זוויות היקפיות שוות**
15, 16, 17	**18**	$\sphericalangle DEC = \sphericalangle FCE$	
		מ.ש.ל. ד	

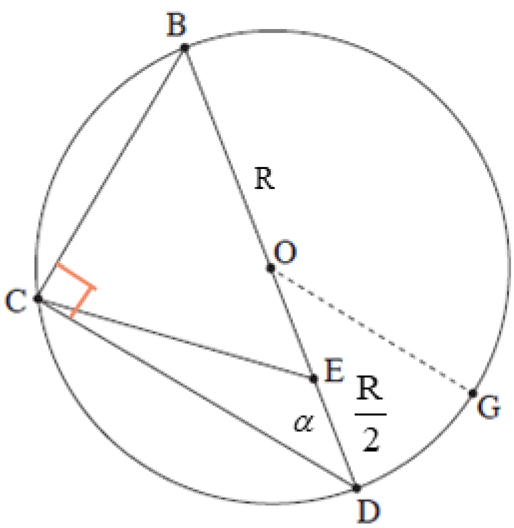
5

בגרות פג ינואר 23 מועד חורף שאלון 35571

א. $\underline{\Delta BCD}$ **ישר זווית (** $\sphericalangle BCD = 90°$ **, זווית היקפית, שנשענת על הקוטר, היא ישרה)**

$$\cos\alpha = \frac{CD}{BD}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{m}{2R}}$$



תשובה: $\cos\alpha = \dfrac{m}{2R}$.

ב. $OE = ED = \dfrac{R}{2}$.

$\underline{\Delta CED}$ **לפי משפט הקוסינוסים.**

$$(CE)^2 = (CD)^2 + (ED)^2 - 2CE\cdot ED\cdot\cos\alpha$$

$$(CE)^2 = m^2 + (\frac{R}{2})^2 - 2m\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{m}{2R}$$

$$(CE)^2 = m^2 + \frac{R^2}{4} - \frac{m^2}{2}$$

$$(CE)^2 = \frac{4m^2 + R^2 - 2m^2}{4}$$

$$\boxed{CE = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2m^2 + R^2}}$$

תשובה: הוכחנו כי $CE = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2m^2+R^2}$.

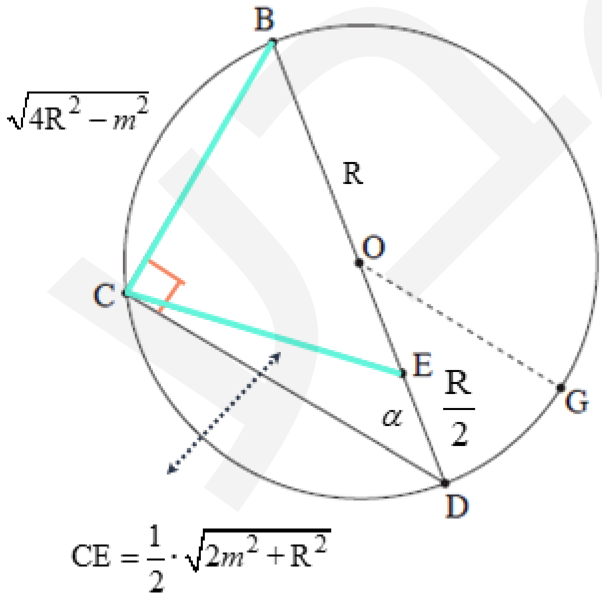
ב. נתון: $BC = EC$.

$\underline{\Delta BCD}$ **משפט פיתגורס**

$$(BC)^2 = (BD)^2 - (CD)^2$$

$$(BC)^2 = (2R)^2 - m^2$$

$$\boxed{BC = \sqrt{4R^2 - m^2}}$$



$$4R^2 - m^2 = \frac{1}{4}\cdot(2m^2 + R^2) \quad \leftarrow BC = EC$$

$$16R^2 - 4m^2 = 2m^2 + R^2$$

$$15R^2 = 6m^2$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{m}{R}}$$

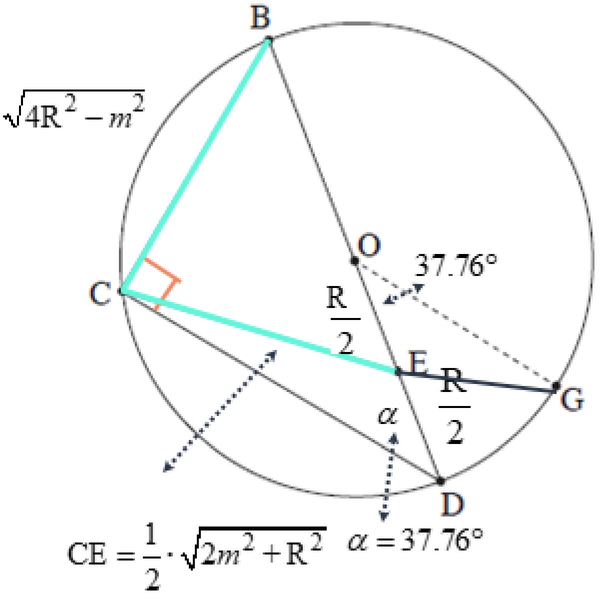
$$\frac{\sqrt{10}}{4} = \cos\alpha \quad \leftarrow \cos\alpha = \frac{m}{2R}$$

$$\boxed{\alpha = 37.76°} \quad \leftarrow 0° < \alpha < 90°$$

תשובה: $\alpha = 37.76°$.

נכתב ע"י עפר ילין

ד. $OG \parallel CD$, ולכן $\sphericalangle EOG = \sphericalangle CDB = 37.76^\circ$ (זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים).



$\underline{\Delta OEG}$ לפי משפט הקוסינוסים.

$$(EG)^2 = (OE)^2 + (OG)^2 - 2OE \cdot OG \cdot \cos \sphericalangle EOG$$

$$(EG)^2 = (\frac{R}{2})^2 + R^2 - 2\cdot\frac{R}{2}\cdot R \cdot \cos 37.76^\circ$$

$$(EG)^2 = 0.4594R^2$$

$$\boxed{EG = 0.6778R}$$

כיוון שהזווית הנתונה לנו ב- ΔOEG

אינה מול הצלע הגדולה במשולש,

אז עדיף למצוא את הזווית המבוקשת

באמצעות משפט הקוסינוסים.

$\underline{\Delta OEG}$ לפי משפט הקוסינוסים.

$$\cos \sphericalangle OEG = \frac{(OE)^2 + (EG)^2 - (OG)^2}{2OE \cdot EG}$$

$$\cos \sphericalangle OEG = \frac{(\frac{R}{2})^2 + 0.4594R^2 - R^2}{2\cdot\frac{R}{2}\cdot 0.6778R}$$

$$\cos \sphericalangle OEG = \frac{-0.2906\cancel{R^2}}{0.6778\cancel{R^2}}$$

$$\boxed{\sphericalangle OEG = 115.39^\circ}$$

תשובה: $\sphericalangle OEG = 115.39^\circ$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^n(x+1)^2$, המוגדרת לכל x , כאשר $n>1$ הוא מספר טבעי.

הקדמה, קדם אנליזה: לפונקציה נקודות אפס ב- $(0,0)$ וב- $(-1,0)$.

$(-1,0)$ היא נקודת קיצון, כי הפונקציה לא מחליפה בה סימן.

עבור n זוגי – הפונקציה היא פולינום מסדר זוגי, והגרף מתחיל בירידה ונגמר בעלייה.

הפונקציה אי-שלילית, כאשר נקודות האפס הן נקודות מינימום,

וביניהן חייבת להיות נקודת מקסימום.

עבור n אי-זוגי – הפונקציה היא פולינום מסדר אי-זוגי, כאשר הגרף שלו מתחיל בעלייה ונגמר בעלייה,

כאשר הפונקציה שלילית עבור $x\neq -1$, $x<0$ וחיובית עבור $x>0$, ולכן $(-1,0)$ נקודת מקסימום,

ויש עוד נקודת מינימום בתחום $-1<x<0$.

תשובה: $(0,0)$, $(-1,0)$.

ב. תשובה: עבור n זוגי, הפונקציה חיובית עבור $x\neq -1\,,0$ ושלילית לאף x .

עבור n אי-זוגי, הפונקציה חיובית עבור $x>0$ ושלילית $x\neq -1$, $x<0$.

ג. נמצא שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגן, תוך התחשבות בערכי n .

$$f'(x)=n\cdot x^{n-1}(x+1)^2+2x^n(x+1)$$

$$f'(x)=(x+1)\cdot x^{n-1}\cdot(n(x+1)+2x)$$

$$\boxed{f'(x)=(x+1)\cdot x^{n-1}\cdot((n+2)x+n)}$$

$$x=-1 \quad , \quad x=0, \quad x=-\frac{n}{n+2}$$

ואכן קבלנו את התשובות המתאימות, לדיון המקדים בקדם אנליזה,

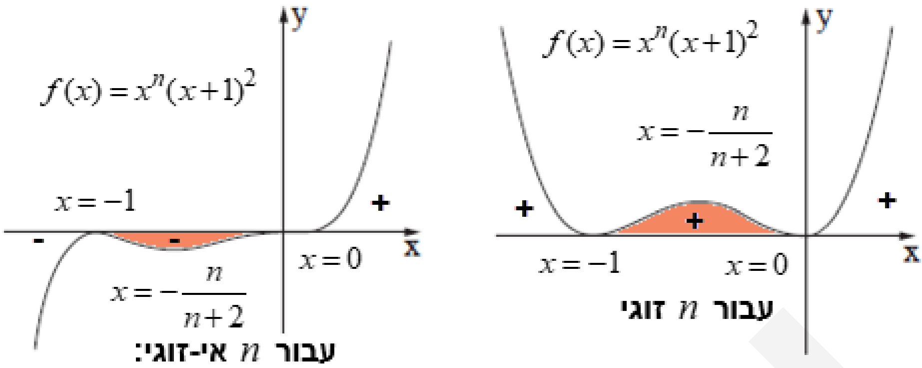
כי x^{n-1} עובר משליליות לחיוביות רק כאשר $(n-1)$ אי-זוגי, וזה קורה כאשר n זוגי .

נשים לב שנתון ש- $n>1$ וטבעי, ולכן $(n-1)\geq 1$ הוא טבעי, והדיון שקיימנו תקף.

תשובה: עבור n זוגי: $x=-1\,,x=0$ מינימום, $x=-\frac{n}{n+2}$ מקסימום (בתחום $-1<x<0$).

עבור n אי-זוגי: $x=-1$ מקסימום, $x=-\frac{n}{n+2}$ מינימום (בתחום $-1<x<0$)..

ד. ההסברים ניתנו כבר בסעיפים הקודמים, ומסומנים על הגרפים המתאימים.



III II

תשובה: גרף III מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור n זוגי,

וגרף II תאר את הפונקציה $f(x)$ עבור $n>1$ אי-זוגי

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=a\cdot f(x-2)$, כאשר a פרמטר חיובי.

יש כאן שתי פעולות על $f(x)$.

- **הזזה אופקית של $f(x)$ 2 יחידות ימינה ,**
  תוך הסטה של נקודות הקיצון בתזוזה דומה של שיעורי ה- x
- **הכפלה פי a של ערכי הפונקציה, ללא שינוי בתחומי חיוביות ושליליות כי a פרמטר חיובי.**

T הוא השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$ ובין ציר ה- x (צבוע בסקיצות שמובאות בסעיף הקודם).

ההסטה ימינה לא משנה את גודל השטח שבין $f(x)$ ובין ציר ה- x (עבור כל $n>1$ זוגי או אי-זוגי).

ההכפלה פי a מגדילה את השטח אם $a>1$, ומקטינה את השטח אם $0<a<1$.

לכן, בכיוון מ- $g(x)$ ל- $f(x)$ יש לחלק פי a, וגודל השטח המבוקש הוא $\frac{\text{T}}{a}$.

תשובה: השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין ציר ה- x , הוא $\frac{\text{T}}{a}$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2\sin x}{\cos^2 x-1}$ **, בתחום** $-2\pi \le x \le 2\pi$.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad \rightarrow f(x)=\frac{2\sin x}{\cos^2 x-1}=-\frac{2\sin x}{\sin^2 x} \quad \rightarrow f(x)=-\frac{2}{\sin x}$.

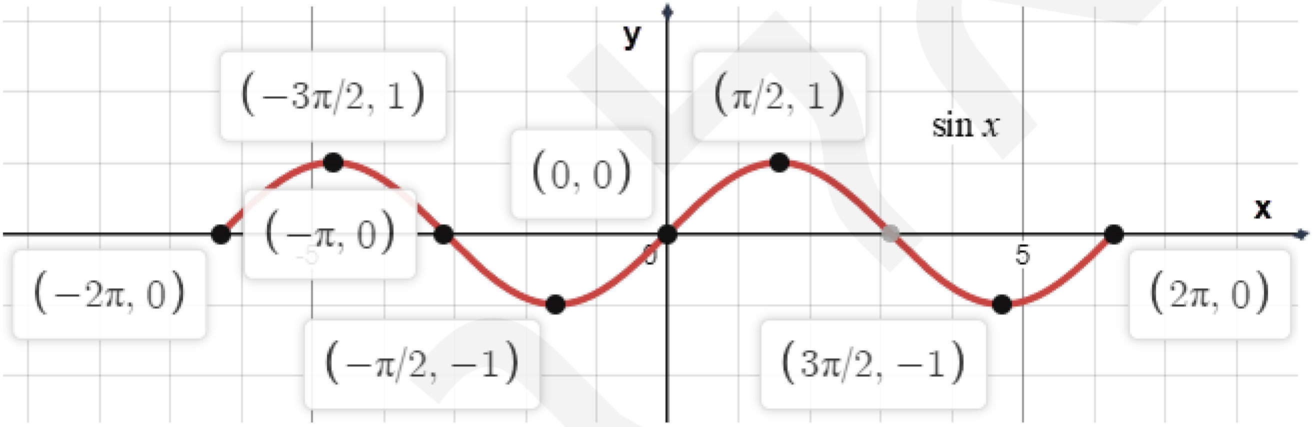
זו טרנספורמציה, בשלושה שלבים, של $\sin x$.

(1) סיבוב סביב ציר ה- x **(2) קבלת פונקציה הופכית, בתחום הגדרה חדש (3) הכפלה פי** 2 .

<u>הקדמה, קדם אנליזה:</u>

גרף הפונקציה $\sin x$ ***, בתחום*** $-2\pi \le x \le 2\pi$***, ידוע ואינו דורש הוכחה.***

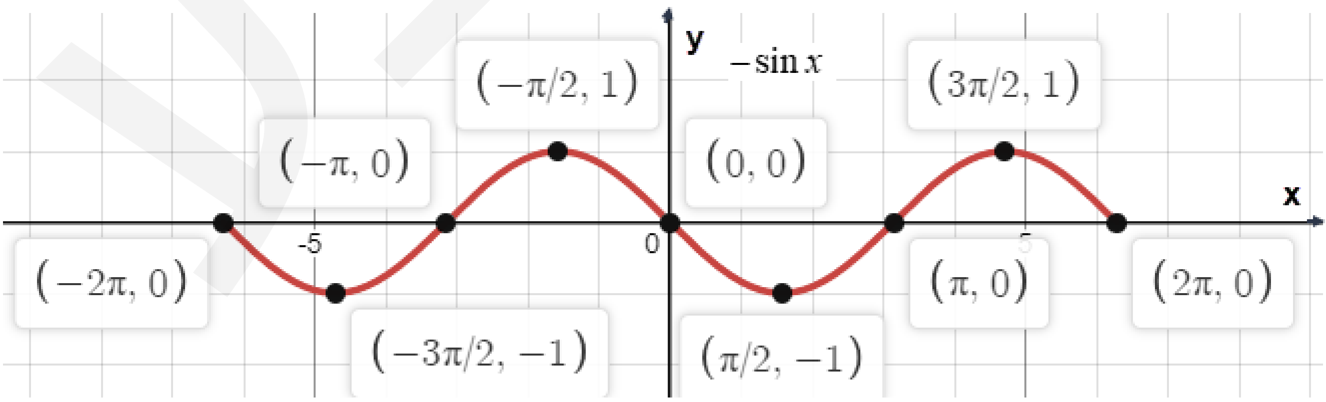
הפונקציה אי-זוגית, סימטרית לראשית, עם נקודת פיתול שם.



לאחר סיבוב סביב ציר ה- x ***, נקבל את הפונקציה*** $-\sin x$ ***ותחום ההגדרה ללא שינוי.***

תחומי חיוביות ושליליות מתהפכים.

תחומי עלייה וירידה מתחלפים, וסוג הקיצון משתנה כמובן גם.



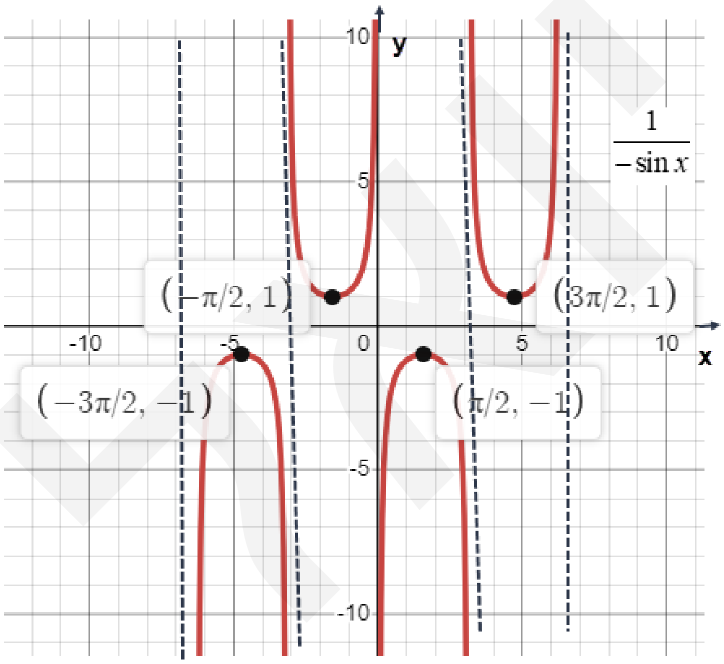
הפונקציה ההופכית $\frac{1}{-\sin x}$ היא כבר משהו אחר לגמרי.

תחום ההגדרה הוא $-2\pi < x < 2\pi \,, x \neq 0, \pm\pi$, בהתאם לנקודות האפס הקודמות.

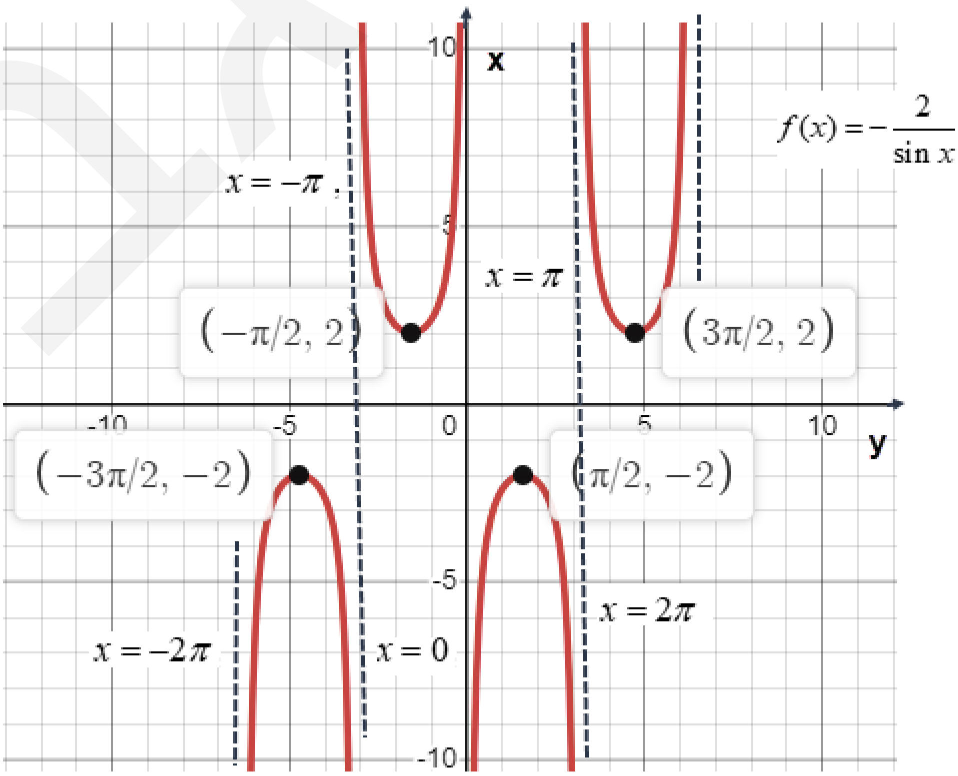
כאשר $\sin x \to 0$, אז $\frac{1}{-\sin x} \to \pm\infty$ ונקבל אסימפטוטות אנכיות:

$x = -2\pi \,, x = -\pi \,, x = 0 \,, x = \pi \,, x = 2\pi$.

תחומי חיוביות ושליליות ללא שינוי, אולם תחומי עלייה וירידה יתחלפו פעם נוספת.



לאחר הכפלה פי 2 נקבל את הפונקציה המבוקשת $f(x) = -\frac{2}{\sin x}$.



עתה נשאר רק לצנות מסודר, על כל הסעיפים, ללא הסברים נוספים וללא נגזרות !!!

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2\sin x}{\cos^2 x-1}$, **בתחום** $-2\pi \le x \le 2\pi$,

השקולה לפונקציה $f(x)=-\frac{2}{\sin x}$ **בתחום** $-2\pi < x < 2\pi\ , x \ne 0,\pm\pi$.

(1) תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא :** $-2\pi < x < 2\pi\ , x \ne 0,\pm\pi$.

(2) תשובה: האסימפטוטות של $f(x)$ **, המאונכות לציר ה-** x ,

הן: $x=2\pi\ ,\ x=\pi\ ,\ x=0\ ,\ x=-\pi\ ,\ x=-2\pi$.

(3) $f(x)$ **אי-זוגית, בדומה ל** $\sin x$: $f(-x)=-\frac{2}{\sin(-x)}=-\frac{2}{-\sin x}=-f(x)$.

תשובה: $f(x)$ **אי-זוגית.**

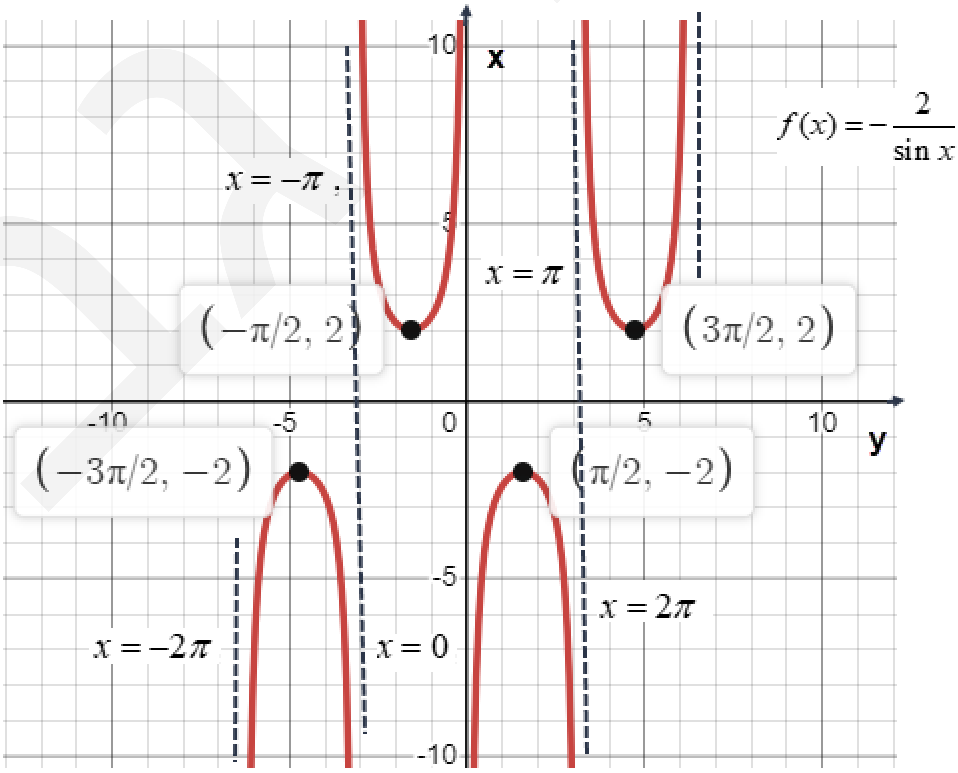
ב. נענה על התת-סעיפים (1)-(2) בעבור התחום $0 \le x \le 2\pi$.

(1) תשובה: אין נקודות החיתוך עם הצירים.

(2) תשובה: שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **הן:**

$(\frac{3\pi}{2}, 2)$ **מינימום,** $(\frac{\pi}{2}, -2)$ **מקסימום.**

ג. נשרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ **(בתחום** $-2\pi \le x \le 2\pi$**) .**



ד. נוכיח כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

נקודות הפיתול של הפונקציה $\sin x$ הן נקודות החיתוך עם ציר ה- x שלה.

(עובדה ידועה, שלא דורשת הוכחה, אבל מוזמנים לראות ש- $(\sin x)''=-\sin x$).

אבל, אין קשר בין נקודות הפיתול של $f(x)$ לבין אלו של $1/f(x)$,

למעט במקרים מיוחדים שלא נפרט כאן, ולכן - נגזור את הפונקציה המצומצמת, כמובן.

$$\boxed{f(x)=-\frac{2}{\sin x}}$$

$$\boxed{f'(x)=2\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$f''(x)=2\cdot\frac{-\sin^3 x-2\sin x\cos^2 x}{\sin^4 x}$$

$$f''(x)=2\cdot\frac{-\sin x(\sin^2 x+2\cos^2 x)}{\sin^4 x}$$

$$\boxed{f''(x)=-2\cdot\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}} \quad \leftarrow \sin^2 x+\cos^2 x=1$$

המונה חיובי, ולכן הנגזרת השנייה אינה מתאפסת, ואין נקודות פיתול.

נשים לב שתחומי הקעירות שבסקיצה, תואמים לתחומי החיוביות והשליליות של $(-\sin x)$.

תשובה: הוכחנו כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ה. נחשב את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה- x, בתחום $1.7\le x\le 2$.

על פי הסקיצה בסעיף ג, ניתן לראות כי $f(x)$ יורדת בתחום $\frac{\pi}{2}<x<\pi$.

לכן בתחום $1.7\le x\le 2$ מתקיים $f'(x)<0$ וגרף הנגזרת נמצא מתחת לציר ה- x .

$$S=\int_{1.7}^{2}(0-f'(x))\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_{1.7}^{2}$$

$$x=-f(2):\quad -(-2.1995)=2.1995$$

$$x=-f(1.7):\quad -(-2.0168)=2.0168$$

$$S=2.1995-2.0168$$

$$\boxed{S=0.1827}$$

תשובה: השטח הכלוא הוא 0.1827.

א. נתונות שלוש פונקציות: $k(x)=\frac{x^3-1}{x^2(x+2)}$, $h(x)=\frac{x^3}{x(x+2)}$, $g(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}$

עבור $g(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}$ **נקבל:** $\boxed{g(x)=\frac{x-1}{x+2},x\neq-2,-1} \leftarrow g(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}$,

כאשר יש אסימפטוטה אופקית אחת $(y=1)$ **, אסימפטוטה אנכית אחת** $(x=-2)$,

(ונקודת אי רציפות סליקה ("חור") $(-1,-2)$ **).**

תשובה: הפונקציה $g(x)$ **מקיימת את כל התכונות האלה.**

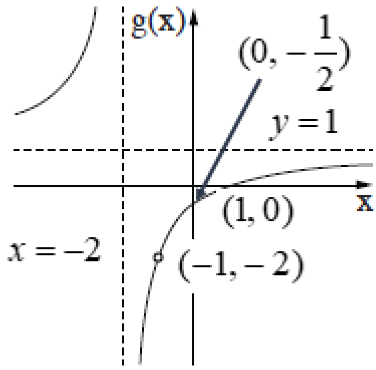
ב. (1) תשובה: $y=1$, $x=-2$ **.**

(2) תשובה: $(1,0)$, $(0,-\frac{1}{2})$ **(כמובן, שמוצאים נקודות אלו לפי הצורה המצומצמת של הפונקציה).**

ג. נתון כי לפונקציה זו אין נקודות קיצון, ולכן ניתן לסרטט את הסקיצה בהתאם לאסימפטוטות, .
ובהתאם לתחומי חיוביות $(x<-2\cup x>1)$ **, ותחומי שליליות** $(-2<x<1\,,\,x\neq-1)$ **)**

$$g(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)},$$

$$g(x)=\frac{x-1}{x+2},x\neq-2,-1$$

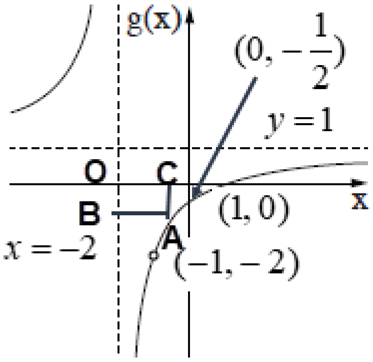


תשובה: הסקיצה מעל.

ד. הפונקציה שיש להביא *למינימום* **היא** *היקף המלבן* ABOC.

$$,g(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$g(x)=\frac{x-1}{x+2}, x\neq -2,-1$$



נסמן: $A(t,\frac{t-1}{t+2})$, **כאשר** $-1<t<1$.

$$AC=0-y_A=-(\frac{t-1}{t+2})=\frac{1-t}{t+2}$$

$$OC=x_C-(-2)=t+2$$

ההיקף המבוקש:

$$P(t)=2\cdot(AC+OC)$$

$$\boxed{P(t)=2\cdot(\frac{1-t}{t+2}+t+2)}$$

נמצא נקודת קיצון:

$$P'(t)=2\cdot(\frac{-(t+2)-(1-t)}{(t+2)^2}+1)$$

$$P'(t)=2\cdot\frac{-t-2-1+t+(t+2)^2}{(t+2)^2}$$

$$\boxed{P'(t)=2\cdot\frac{(t+2)^2-3}{(t+2)^2}}$$

$$(t+2)^2-3=0$$

$$(t+2)^2=3$$

$$t+2=\sqrt{3} \quad \rightarrow \boxed{t=\sqrt{3}-2\approx -0.268}$$

$$t+2=-\sqrt{3} \quad \rightarrow \cancel{t=-\sqrt{3}-2} \quad \leftarrow -1<t<1$$

$$\left.\begin{matrix}P'(-0.3)<0\\P'(-0.2)<0\end{matrix}\right\}\boxed{t=\sqrt{3}-2\approx -0.268, min}$$

תשובה: $t=\sqrt{3}-2\approx -0.268$, **עבורה היקף המלבן** ABOC **מינימלי.**