פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשפ"ג, 2023, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

.1 נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$, b הוא פרמטר חיובי.

ידוע כי המוקדים של האליפסה נמצאים על ציר ה־ x .

נסמן את נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה־ y ב־ D_1 ו־ D_2 , את המוקד השמאלי של האליפסה נסמן ב־ F_1 ,
ואת המוקד הימני שלה ב־ F_2 .

נתון כי המרובע $F_1D_1F_2D_2$ הוא ריבוע.

א. **(1)** מצאו את הערך של b .

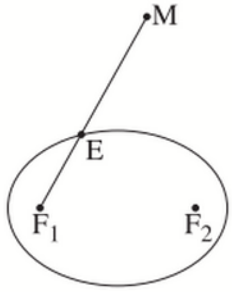
(2) חשבו את שטח הריבוע $F_1D_1F_2D_2$.

הציבו במשוואת האליפסה $b^2=4.5$, וענו על הסעיפים ב–ד.

הנקודה E היא נקודה כלשהי על האליפסה.

מחברים באמצעות קו ישר את המוקד השמאלי F_1 עם הנקודה E

וממשיכים את הקו הישר עד לנקודה M (ראו סרטוט), כך שמתקיים $EM=EF_2$.



ב. הוכיחו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M הוא מעגל, ורשמו את משוואתו.

מזיזים את המעגל שמצאתם בסעיף ב ימינה ב־ $\frac{3}{\sqrt{2}}$ יחידות, ומתקבל מעגל אחר.

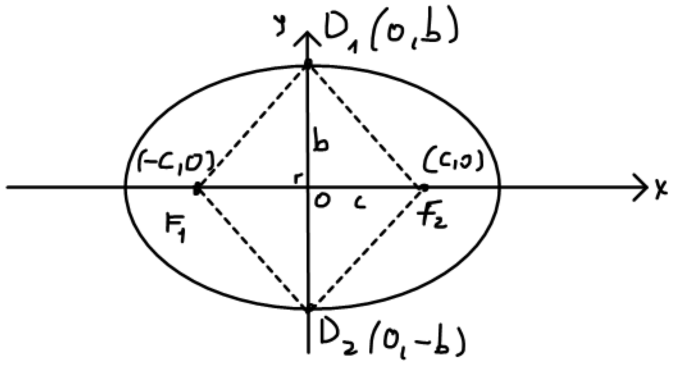
מכפילים ב־ $\frac{2}{3}$ את שיעור ה־ y של כל אחת מן הנקודות שעל המעגל האחר, ומתקבל עקום חדש.

ג. זהו את צורת העקום החדש, ומצאו את משוואתו.

נתון משולש ששניים מקודקודיו הם נקודות החיתוך של העקום החדש עם ציר ה־ x , והקודקוד הנוסף נמצא גם הוא
על העקום החדש.

ד. מצאו את השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש. נמקו את תשובתכם.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



א (1) $a^2=9 \Rightarrow a=3$

נתון כי $F_1D_1F_2D_2$ ריבוע

ולכן $b=c$

כי אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה ושווים זה לזה.

לפי מרחק המוקד מהראשית

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

נקבל כי

$$b=\sqrt{9-b^2}$$

$$b^2=9-b^2$$

$$2b^2=9 \Rightarrow$$

$$b^2=4.5$$

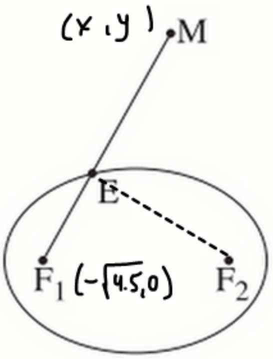
$$\boxed{b=\sqrt{4.5}=\frac{3}{\sqrt{2}}}$$

א (2) שטח ריבוע שווה למכפלת ריבוע האלכסון

אורך האלכסון $=F_1F_2=2b$

$$S_{F_1D_1F_2D_2}=\frac{1}{2}(2b)^2=\frac{1}{2}\cdot 4b^2=2b^2 \underset{\text{יח"ר}}{=} 9$$

$$\boxed{S_{F_1D_1F_2D_2}=9 \text{ יח"ר}}$$



הציבו במשוואת האליפסה $b^2 = 4.5$, וענו על הסעיפים ב-ד.

הנקודה E היא נקודה כלשהי על האליפסה.

מחברים באמצעות קו ישר את המוקד השמאלי F_1 עם הנקודה E

וממשיכים את הקו הישר עד לנקודה M (ראו סרטוט), כך שמתקיים $EM = EF_2$.

ב. הוכיחו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M הוא מעגל, ורשמו את משוואתו.

הערה: $\sqrt{4.5}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$a=3$
$b=\sqrt{4.5}$
$c=\sqrt{4.5}$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4.5}=1$ ונתון $EM=EF_2$

ב. לפי הגדרת האליפסה כמקום גיאומטרי: $EF_1+EF_2=2a$

ולכן $EF_1+EM=2a$

ומחיבור הקטעים נובע כי $F_1M=2a$

אורך הקטע F_1M הינו קבוע ושווה ל- $2a$ שערכו 6 יח'

מכאן נובע שאוסף הנקודות M המתקבלות באופן זה נמצאות כולן במרחק 6 מהנקודה F_1 ולכן נמצאות כולן על מעגל שרדיוסו 6 ומרכזו $F_1(-\frac{3}{\sqrt{2}},0)$

משוואת המעגל היא:

$$\boxed{\left(x+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=36}$$

מזיזים את המעגל שמצאתם בסעיף ב ימינה ב־ $\frac{3}{\sqrt{2}}$ יחידות, ומתקבל מעגל אחר.

מכפילים ב־ $\frac{2}{3}$ את שיעור ה־ y של כל אחת מן הנקודות שעל המעגל האחר, ומתקבל עקום חדש.

ג. זהו את צורת העקום החדש, ומצאו את משוואתו.

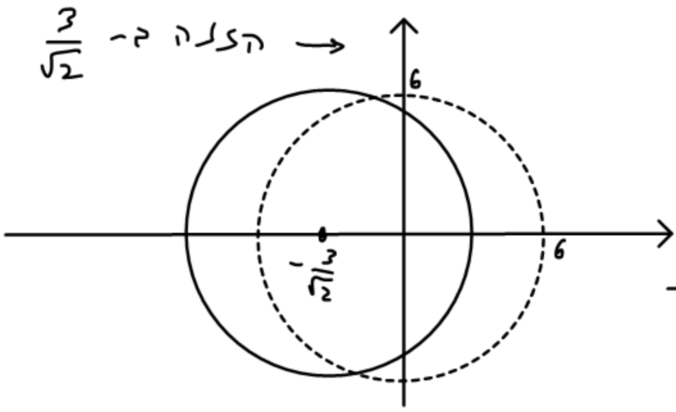
ג. הזזה המעגל ימינה מתקבלת בהחלפת x במשוואה ב- $(x-\frac{3}{\sqrt{2}})$

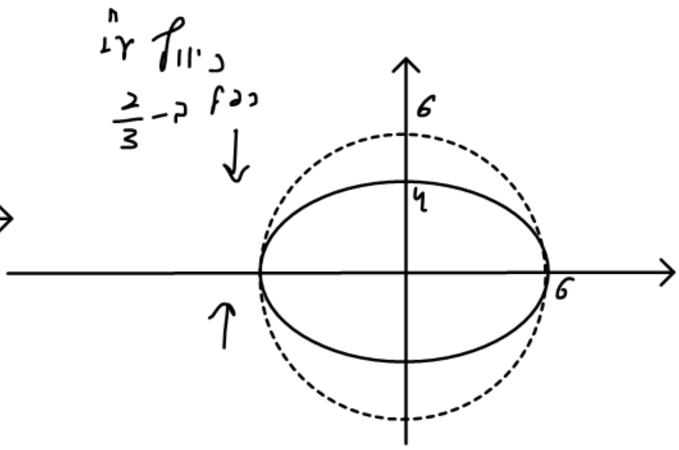
המשוואה של המעגל החדש היא

$$\left(x-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=36$$

ומתקבל מעגל קנוני

$$x^2+y^2=36$$





כאשר נכפול ב- $\frac{2}{3}$ את כל שיעורי ה- y נקבל כיווץ של המעגל ולכן צורת העקום החדש שמתקבל הינה אליפסה.

בנוסף, נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- y: $(-6,0)$ $(6,0)$

יהיו נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y: $(-4,0)$ $(4,0)$

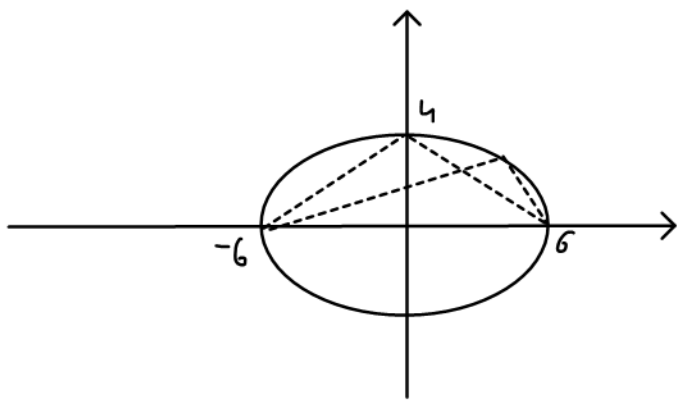
ולכן נקבל כי ציר האליפסה הקנונית המתקבלת: $b=4$, $a=6$

ומשוואתה

$$\boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1}$$

נתון משולש ששניים מקודקודיו הם נקודות החיתוך של העקום החדש עם ציר ה־ x , והקודקוד הנוסף נמצא גם הוא על העקום החדש.

ד. מצאו את השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש. נמקו את תשובתכם.



$$S_{max} = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24$$
יח"ר

$$\boxed{S_{max} = 24 \text{ יח"ר}}$$

אורך הצלע המונחת על ציר ה-x הוא 12 יח' ואינו משתנה
הגובה המקסימלי לצלע זו הוא 4, כאשר הקודקוד השלישי
נמצא בנקודת החיתוך של האליפסה עם ציר ה-y.

.2 נתונים שני מישורים, π_1 ו־ π_2 :

$$\pi_1: \quad (k+2)x + y + (k+1)z + 11 = 0$$

$$\pi_2: \quad (k+1)x + y + z - 5 = 0$$

k הוא פרמטר.

א. הסבירו מדוע בהכרח שני המישורים נחתכים זה עם זה.

ידוע כי ישר החיתוך ℓ_1 בין שני המישורים מקביל לישר $\ell_2: \quad \underline{x} = (1,2,-1) + m(-1,k,k)$.

ב. **(1)** מצאו את הערך של k .

(2) מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ_1 .

(3) מצאו את הזווית בין המישורים π_1 ו־ π_2 .

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ_1 ועל מישור [yz] .

הנקודות A ו־ B הן נקודות החיתוך של ציר ה־ y עם המישורים π_1 ו־ π_2 בהתאמה.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי הנקודות P , A ו־ B .

(2) מצאו את שטח המשולש APB .

<u>פתרון:</u>

א. הנורמל של המישור π_1 הוא: $((k+2), 1, (k+1))$

הנורמל של המישור π_2 הוא: $((k+1), 1, 1)$

הנורמלים אינם תלויים לינארית משום ש:

$$\frac{k+2}{k+1} \neq \frac{1}{1}$$

ומכיוון שהמישורים נחתכים.

ב.(1) ישר החיתוך מוכל בשני המישורים, ולכן מאונך לשני הנורמלים של שני המישורים.

וקטור הכיוון של ישר החיתוך הוא: $(-1,k,k)$.

לכן:

$$\begin{cases} ((k+2), 1, (k+1)) \cdot (-1,k,k) = 0 \\ ((k+1), 1, 1) \cdot (-1,k,k) = 0 \end{cases}$$

נפתור את המערכת:

$$\begin{cases} -k+2+k+k^2+k=0 \\ -k-1+k+k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2+k-2=0 \\ k=1 \end{cases}$$

פתרון המשוואה הריבועית היא: $k=-2$ או $k=1$
נכון, שפתרון המערכת הוא: $\boxed{k=1}$

(2) המישורים הם:

$\pi_1: \quad 3x+y+2z+11=0$

$\pi_2: \quad 2x+y+z-5=0$

מחסר משוואות: $x+z+16=0$

$$\Downarrow$$

$$z=-x-16$$

נציב $x=0$ ונקבל $z=-16$

$$\Downarrow$$

$$2\cdot 0+y-16-5=0$$

$$\Downarrow$$

$$y=21$$

ווקטור ההעתקה יהיה: $(0,21,-16)$

וקטור הכיוון כבר נתון ולכן:

$$\boxed{\ell_1: \underline{x}=(0,21,-16)+t(-1,1,1)}$$

(3) נחשב את הזווית בנוסחה הנוסחה:

$$\cos\alpha=\frac{|(a_1,b_1,c_1)\cdot(a_2,b_2,c_2)|}{|(a_1,b_1,c_1)|\cdot|(a_2,b_2,c_2)|}$$

$$\cos\alpha = \frac{|(3,1,2)\cdot(2,1,1)|}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}$$

ונקבל:

$$\boxed{\alpha = 10.89^\circ}$$

ג. (1) נקודה P נמצאת על מישור $\{yz\}$, לכן
שיעור ה-x שלה הוא אפס.
במקרה, כמו וקטור ההעתקה שמצאנו
ולכן $\boxed{P(0,21,-16)}$.
(אחרת היינו מציבים בהצגה הפרמטרית
של l_1 $x=0$ ומחשבים...)

נקודה A היא החיתוך של ציר ה-y
עם מישור π_1, לכן נציב $x=z=0$
במשוואה של π_1 ונקבל $y=-11$, כלומר
$\boxed{A(0,-11,0)}$

נקודה B היא החיתוך של ציר ה-y
עם מישור π_2, לכן נציב גם במשוואה הזו
$x=z=0$ ונקבל $y=5$, כלומר
$\boxed{B(0,5,0)}$

(2) אפשר לחשב את השטח ע"י חישוב
אורכי הבסיס והגובה או שתי צלעות
והזווית ביניהן.
נשים לב כי נקודה P במישור $\{yz\}$

ונקודות A ו-B על ציר y, ולכן הגובה
שנוריד מ-P לצלע AB הוא אנך לציר y
ואורכו שווה לשיעור ה-z של הנקודה P בערך
מוחלט, כלומר $h=16$.

אורך צלע AB הוא: $d_{AB}=5-(-11)=16$

לכן, שטח המשולש הוא:

$$\boxed{S_{ABP}=\frac{16\cdot 16}{2}=128}$$

3. נתונה משוואה I: $w^6 = -27$, w הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I .

נתונה משוואה II: $\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = -27$, z הוא מספר מרוכב.

ב. **(1)** היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית את הפתרונות של משוואה II .

(2) הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס המייצגות את הפתרונות של משוואה II נמצאות על מעגל, ומצאו את משוואתו.

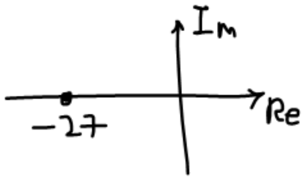
(3) הוכיחו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס.

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג. **(1)** מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.

א. פתרונות המשוואה $w^n = R\,cis\theta$ הינם $W_k = \sqrt[n]{R}\,cis\left(\frac{\theta+360^\circ k}{n}\right)$
$k = 0,1,2,\dots,n-1$



עבור $R\,cis\theta = -27$
$R = 27 \quad \theta = 180^\circ$

$W_k = \sqrt[6]{27}\,cis\left(\frac{180^\circ}{6}+\frac{360^\circ k}{6}\right)$

$W_k = \sqrt{3}\,cis(30^\circ + 60^\circ k)$

פתרונות משוואה I :

$$\boxed{\begin{aligned}
W_0 &= \sqrt{3}\,cis30^\circ = \tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\\
W_1 &= \sqrt{3}\,cis90^\circ = \sqrt{3}i\\
W_2 &= \sqrt{3}\,cis150^\circ = -\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\\
W_3 &= \sqrt{3}\,cis210^\circ = -\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\\
W_4 &= \sqrt{3}\,cis270^\circ = -\sqrt{3}i\\
W_5 &= \sqrt{3}\,cis330^\circ = \tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}}$$

נתונה משוואה II : $\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=-27$, z הוא מספר מרוכב.

ב. (1) היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית את הפתרונות של משוואה II .

(2) הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס המייצגות את הפתרונות של משוואה II נמצאות על מעגל, ומצאו את משוואתו.

(3) הוכיחו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס.

ב (1) $w=z+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ולכן פתרונות משוואה II הינם

$z_k=w_k-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ומהצבת הפתרונות של משוואה I

נקבל

פתרונות משוואה I

$$\boxed{\begin{aligned}
w_0&=\sqrt{3}\,cis\,30^\circ=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\
w_1&=\sqrt{3}\,cis\,90^\circ=\sqrt{3}i\\
w_2&=\sqrt{3}\,cis\,150^\circ=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\
w_3&=\sqrt{3}\,cis\,210^\circ=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\\
w_4&=\sqrt{3}\,cis\,270^\circ=-\sqrt{3}i\\
w_5&=\sqrt{3}\,cis\,330^\circ=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}}$$

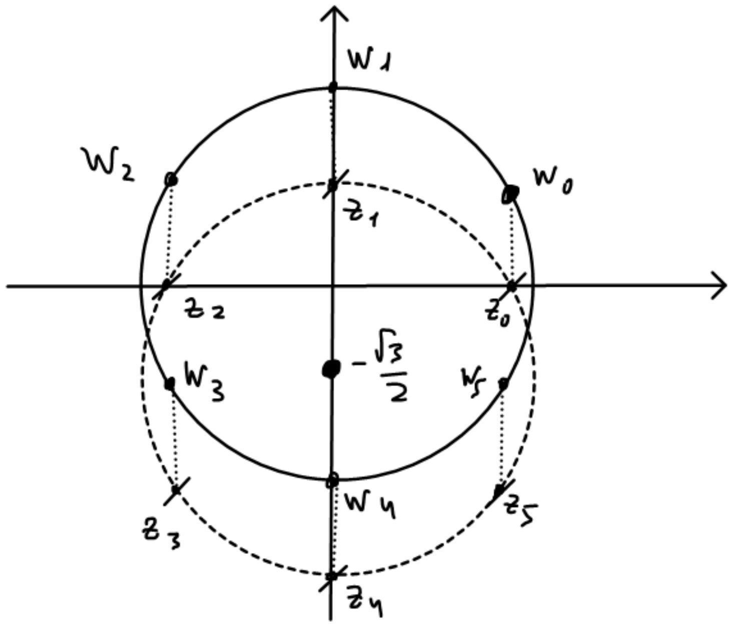
פתרונות משוואה II

$$\boxed{\begin{aligned}
z_0&=\frac{3}{2} & z_3&=-\frac{3}{2}-\sqrt{3}i\\
z_1&=\frac{\sqrt{3}}{2}i & z_4&=-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\\
z_2&=-\frac{3}{2} & z_5&=\frac{3}{2}-\sqrt{3}i
\end{aligned}}$$

ב(2) הפתרונות של משוואה I נמצאים על מעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{3}$.

פתרונות משוואה II הינם $z_k = w_k - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

והם הזזה כלפי מטה ב- $\frac{\sqrt{3}}{2}i$ במישור גאוס, של פתרונות משוואה I. לכן, גם הם נמצאים על מעגל, שאינו קנוני, שרדיוסו $\sqrt{3}$ ומרכזו $(0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$



$$w_0 = \sqrt{3}\,cis\,30^\circ = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$w_1 = \sqrt{3}\,cis\,90^\circ = \sqrt{3}i$$
$$w_2 = \sqrt{3}\,cis\,150^\circ = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$w_3 = \sqrt{3}\,cis\,210^\circ = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$w_4 = \sqrt{3}\,cis\,270^\circ = -\sqrt{3}i$$
$$w_5 = \sqrt{3}\,cis\,330^\circ = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

משוואת המעגל עליו נמצאים פתרונות משוואה II היא

$$\boxed{x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3}$$

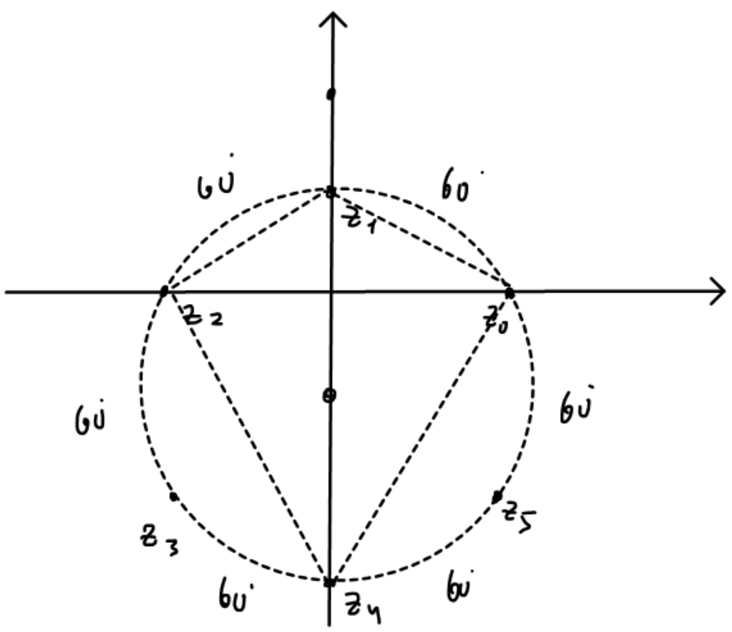
$$z_0 = \frac{3}{2} \qquad z_3 = -\frac{3}{2} - \sqrt{3}i$$
$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad z_4 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = -\frac{3}{2} \qquad z_5 = \frac{3}{2} - \sqrt{3}i$$

ב(3). הפתרונות של משוואה I הינם קודקודים של משושה משוכלל החסום במעגל קנוני שרדיוסו 3.
זאת מכיוון שהפרש הארגומנט ביניהם קבוע והינו 60° ומרחקם מהראשית זהה והינו 3.
פתרונות משוואה II הינם הצבה של פתרונות משוואה I ולכן נשארת הצורה שהם יוצרים, כלומר, הם גם כן קודקודים של משושה משוכלל.

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.



ג(1) המרובע הוא דלתון.

וזאת כי הקשתות שוות

$$\overset{\frown}{z_0z_1}=\overset{\frown}{z_1z_2}=60^\circ$$

$$\overset{\frown}{z_2z_4}=\overset{\frown}{z_4z_0}=120^\circ$$

ונשענים עליהן מיתרים שווים

$$z_0z_1=z_1z_2$$

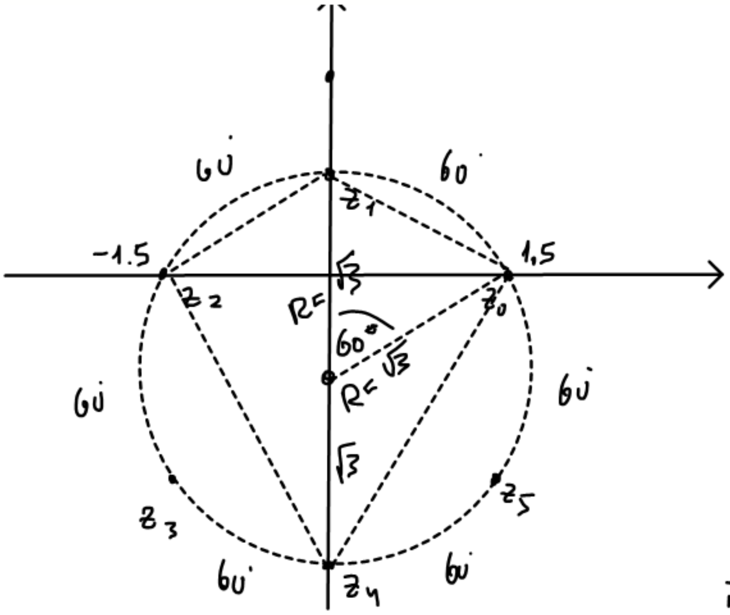
$$z_2z_4=z_4z_0$$

ומרובע בעל שני זוגות צלעות סמוכות שוות הינו דלתון

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג. **(1)** מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.



ג.(2) חישוב שטח המשושה S

$$S = 6 \cdot S_{\triangle z_0Oz_1}$$

$$S_{\triangle z_0Oz_1} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{משושה}} = \frac{9\sqrt{3}}{2} = 4.5\cdot\sqrt{3}$$

יח"ר

חישוב שטח הדלתון:
השווה למחצית מכפלת
אלכסוניו

$$S_{\text{דלתון}} = \frac{3\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

ויחס השטחים הוא:

$$\frac{S_{\text{משושה}}}{S_{\text{דלתון}}} = \frac{4.5\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 1.5$$

$$\boxed{\text{יחס השטחים} = 1.5}$$

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

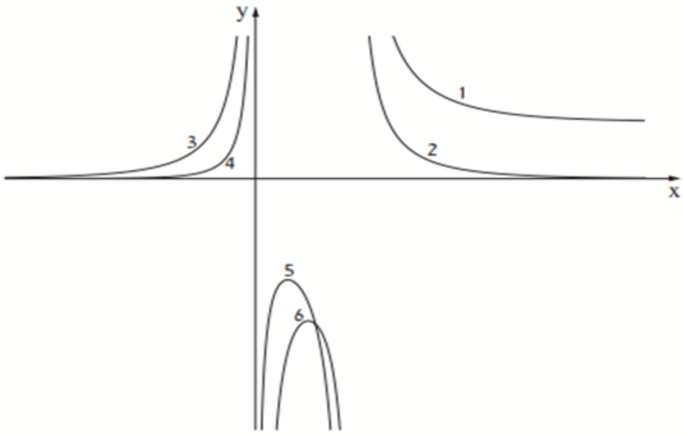
(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{5e^{x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}$ המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין גרף הפונקציה $g(x)$.

לפניכם סרטוט הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$. כל אחד מן החלקים של הגרפים מסומן בסרטוט בספרה אחרת.



ג. רשמו לאיזו פונקצייה שייך כל אחד מן החלקים המסומנים בסרטוט. נמקו את תשובתכם.

ד. לפניכם שני ביטויים, I–II . קבעו בנוגע לכל אחד מן הביטויים אם הוא שלילי או חיובי. נמקו ללא חישוב.

I. $\displaystyle\int_{-4}^{-1}(f(x)-g(x))dx$ **II.** $\displaystyle\int_{\ln\frac{8}{5}}^{\ln 2}(f(x)-g(x))dx$

ה. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ ובין הישרים $x=\ln 9$ ו־ $x=\ln 16$.

4א(1)

$e^{2x}-5e^{x}+4=0$

$e^{x}=t$

$t^2-5t+4=0$

$t=4 \qquad t=1$

$e^{x}=4 \qquad e^{x}=1$

$x=\ln 4 \qquad x=\ln 1$

תחום הגדרה: $\boxed{x\neq 0}$ $\boxed{x\neq \ln 4}$

א2) $x=0$; $y=\ln 4$ מאפסים מכנה ושונים מאפסים מונה לכן:

אס' אנכית: $\boxed{x=\ln 4}$ $\boxed{Y=0}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x}}{e^{2x}}-\frac{5e^{x}}{e^{2x}}+\frac{4}{e^{2x}}} = \frac{2}{1-\frac{5}{e^{x}}+\frac{4}{e^{2x}}} = \frac{2}{1-0+0} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^{-\infty}}{e^{-\infty}-5e^{-\infty}+4} = \frac{0}{0-0+4} = 0$$

אס' אופקית: $\boxed{y_{-\infty}=0}$ $\boxed{y_{\infty}=2}$

א3)

$$f'(x)= \frac{4e^{2x}(e^{2x}-5e^{x}+4)-2e^{2x}(2e^{2x}-5e^{x})}{(e^{2x}-5e^{x}+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(2e^{2x}-10e^{x}+8-2e^{2x}+5e^{x})}{(e^{2x}-5e^{x}+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(8-5e^{x})}{(e^{2x}-5e^{x}+4)^2}$$

$$2e^{2x}(8-5e^{x})=0$$

$e^{2x}=0$ $\quad\quad$ $8-5e^{x}=0$

$\varnothing$ $\quad\quad$ $5e^{x}=8$

$$e^{x}=\frac{8}{5}$$

$$x=\ln\frac{8}{5}$$

$f'(-1)=+$

$f'(\ln\frac{8}{6})=-$

$f'(\ln\frac{9}{5})=-$

$f'(\ln 5)=-$

x	$x<0$		$<x<$	$\ln\frac{8}{5}$	$<x<$	$\ln 4<x$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$	$-$
$f(x)$	↗		↗		↘	↘

עליה: $\boxed{x<0 \quad \text{או} \quad 0<x<\ln\frac{8}{5}}$

ירידה: $\boxed{x>\ln 4 \quad \text{או} \quad \ln\frac{8}{5}<x<\ln 4}$

ד. $f(x)=g(x)$

$$\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}=\frac{5e^{x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}$$

$$2e^{2x}=5e^{x}$$

$$2e^{2x}-5e^{x}=0$$

המשך ב)

$$e^x(2e^x-5)=0$$

$$e^x=0 \quad \emptyset$$

$$2e^x=5$$

$$e^x=\frac{5}{2}$$

$$x=\ln 2.5$$

$$F(\ln 2.5)=\frac{2e^{2\ln 2.5}}{e^{2\ln 2.5}-5e^{\ln 2.5}+4}=-\frac{50}{9}$$

$$\boxed{\left(\ln 2.5,\ -\frac{50}{9}\right)}$$

4ג.

כאשר $x\to\infty$: המכנים זהים ותלויים ולכן נסתכל על המונים, המונה של $f(x)$ גדול מהמונה של $g(x)$ ($e^{2x}=e^x\cdot e^x$ וזה פי ∞ עוצמתי יותר מ e^x)

$$\boxed{1\rightarrow f(x) \qquad 2\rightarrow g(x)}$$

כאשר $0<x\ \ln 4$: נציב במחשבון מספר כלשהו משמאל לנק' המינ'
ונקבל ש $f(x)$ מעל $g(x)$

$$\boxed{6\rightarrow g(x) \qquad 5\rightarrow f(x)}$$

כאשר x שלילי: נציב במחשבון x כלשהו (שלילי) ונקבל ש $g(x)$ מעל $f(x)$

$$\boxed{4\rightarrow f(x) \qquad 3\rightarrow g(x)}$$

א. דרך נוספת: את $f(x)$ ניתן לרשום כך

$$f(x)=\frac{5e^x\cdot\frac{2}{5}e^x}{e^{2x}-5e^x+4}$$

$$F(x)=g(x)\cdot\frac{2}{5}e^x$$

ולכן: בקצה ∞: $F(x)=g(x)\cdot\infty \leftarrow F(x)$ מעל $g(x)$

בקצה $x\to 0$: $F(x)=g(x)\cdot\frac{2}{5} \leftarrow f(x)$ מעל $g(x)$ (כאשר $g(x)$)

בקצה $x\to-\infty$: $F(x)=g(x)\cdot$ מספר שואף ל-0 $\leftarrow f(x)$ מתחת $g(x)$

4ג.

I: לפי הסעיף הקודם בתחום $-4<x<-1$ $f(x)$ תמיד מתחת ל $g(x)$ ולכן האינטגרל המסוים יתן $\boxed{\text{תוצאה שלילית}}$

II: לפי הסעיף הקודם בתחום $\ln\frac{8}{5}<x<\ln 2$ (משמאל) לנקודת החיתוך בין הגרפים $f(x)$ תמיד מעל $g(x)$ ולכן האינטגרל המסוים $\boxed{\text{יתן תוצאה חיובית}}$

4ה. לפי הסעיף הקודם בתחום $\ln 9<x<\ln 16$ $f(x)$ תמיד מעל $g(x)$ ולכן

$$\int_{\ln 9}^{\ln 16}\left(F(x)-g(x)\right)dx$$

ל.ה. המשך:

$$\int_{\ln 9}^{\ln 16}\left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}-\frac{5e^{x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}\right)dx$$

לפי הנוסחה:

$$\int_{\ln 9}^{\ln 16}\frac{2e^{2x}-5e^{x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}\,dx \longrightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|$$

$$\ln\left|e^{2x}-5e^{x}+4\right|\Big]_{\ln 9}^{\ln 16}$$

$$\boxed{(\ 5.192\ )-(\ 3.688\ )\cong 1.504}$$

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=4x(\ell n(x^2)-1)$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

(3) הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא אי־זוגית.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(2) האם יש לפונקצייה $f(x)$ נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $g(x)$ המאונכות לצירים.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

(4) בכמה נקודות הגרפים של $f(x)$ ו־ $g(x)$ נחתכים זה עם זה? נמקו את תשובתכם.

ד. כתבו דוגמה לפונקצייה קדומה של $g(x)$.

א (1) ת.ה:

$x^2>0 \rightarrow \boxed{x\neq 0}$

א (2)

$0=4x(\ln(x^2)-1)$

$x=0$ (פסול)

$\ln(x^2)=1$

$x^2=e^1$

$x=\pm\sqrt{e}$

$\boxed{(\sqrt{e},0) \quad (-\sqrt{e},0)}$

א (3) נראה שהכוון א"ז.

$$f(-x)=4\cdot(-x)\left(\ln((-x)^2)-1\right)=-4x\left(\ln(x^2)-1\right)=-f(x)$$

ב (1)

$$\boxed{\begin{array}{ll} u=4x & u'=4 \\ v=\ln(x^2)-1 & v'=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x} \end{array}}$$

$$f'(x)=4\left(\ln(x^2)-1\right)+8$$

$$f'(x)=4\ln(x^2)+4$$

$$0=4\ln(x^2)+4$$

$$-1=\ln(x^2)$$

$$e^{-1}=x^2$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{e}}$$

x	$x<-\sqrt{\frac{1}{e}}$	$-\sqrt{\frac{1}{e}}$	$<x<$	0	$<x<$	$\sqrt{\frac{1}{e}}$	$<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	max	↘		↘	min	↗

$$\boxed{\begin{array}{ll} \left(\sqrt{\frac{1}{e}},\ -8\sqrt{\frac{1}{e}}\right) & \text{min} \\ \left(-\sqrt{\frac{1}{e}},\ 8\sqrt{\frac{1}{e}}\right) & \text{max} \end{array}}$$

ב(2)

$$f''(x) = 4\cdot\frac{2x}{x^2} = \frac{8}{x}$$

הנגזרת השניה אינה מתאפסת לכן אין נקודת פיתול.
בכל זאת תחומי קעירות מעלה ומטה משתנים סביב

$x=0$

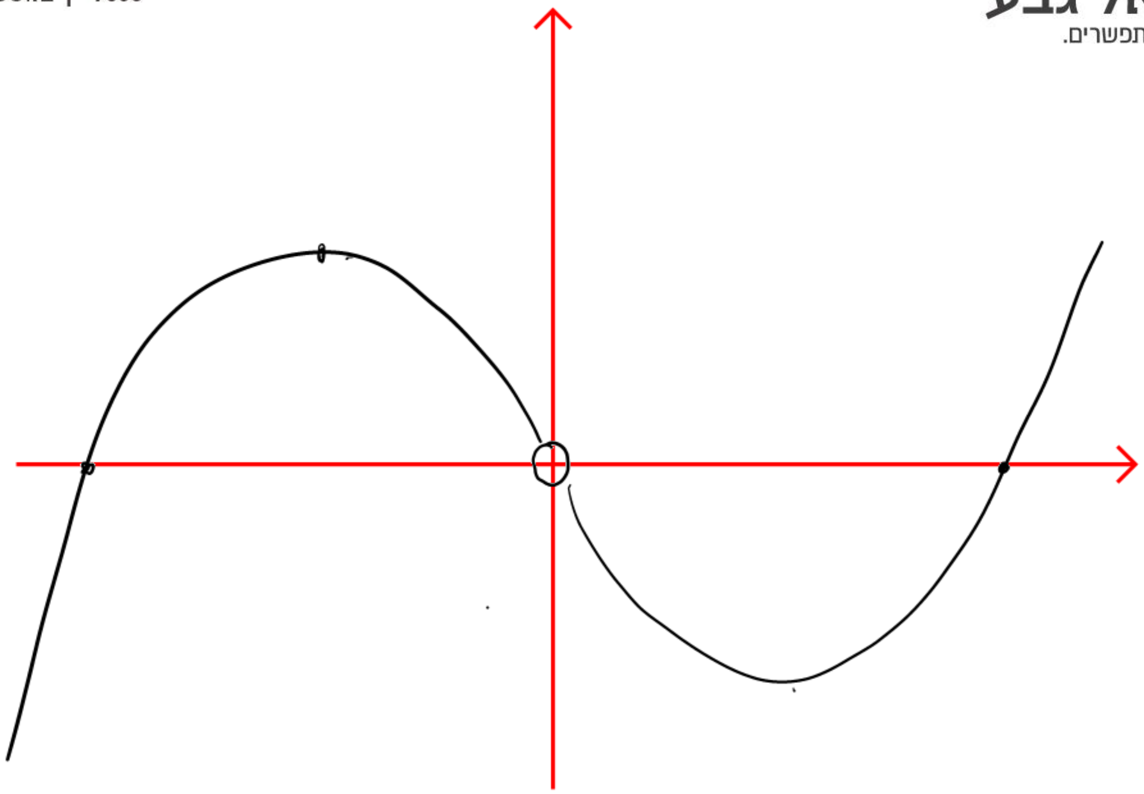
x	$x<0$	0	$0<x$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f'(x)$	↘		↗
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

שימו ♡: ב $(0,0)$ יש "חור".

הסבר א'- הצבה במחשבון של ערכי x שמתכנסים ל0 תגלים שערכי ה-y גם כן מתכנסים ל0.

הסבר ב'- כאשר x מתכנס לאפס הביטוי $4x$ גם כן מתכנס לאפס, והביטוי $\ln(x^2)-1$ שואף ל$-\infty$.
כידוע עוצמת פונ' פולינום גדולה מעוצמת פונ' לוגריתמית ולכן תוצאת מכפלה זו מתאפסת.

ב (3)



ג (1) ת.ה של פונ' $g(x)$ הוא החיתוך בין ת.ה של $f(x)$ לבין המאפסים של $f(x)$.

$\boxed{x \neq 0, \sqrt{e}, -\sqrt{e}}$

ג (2) $x=0,\sqrt{e},-\sqrt{e}$ אנכיות

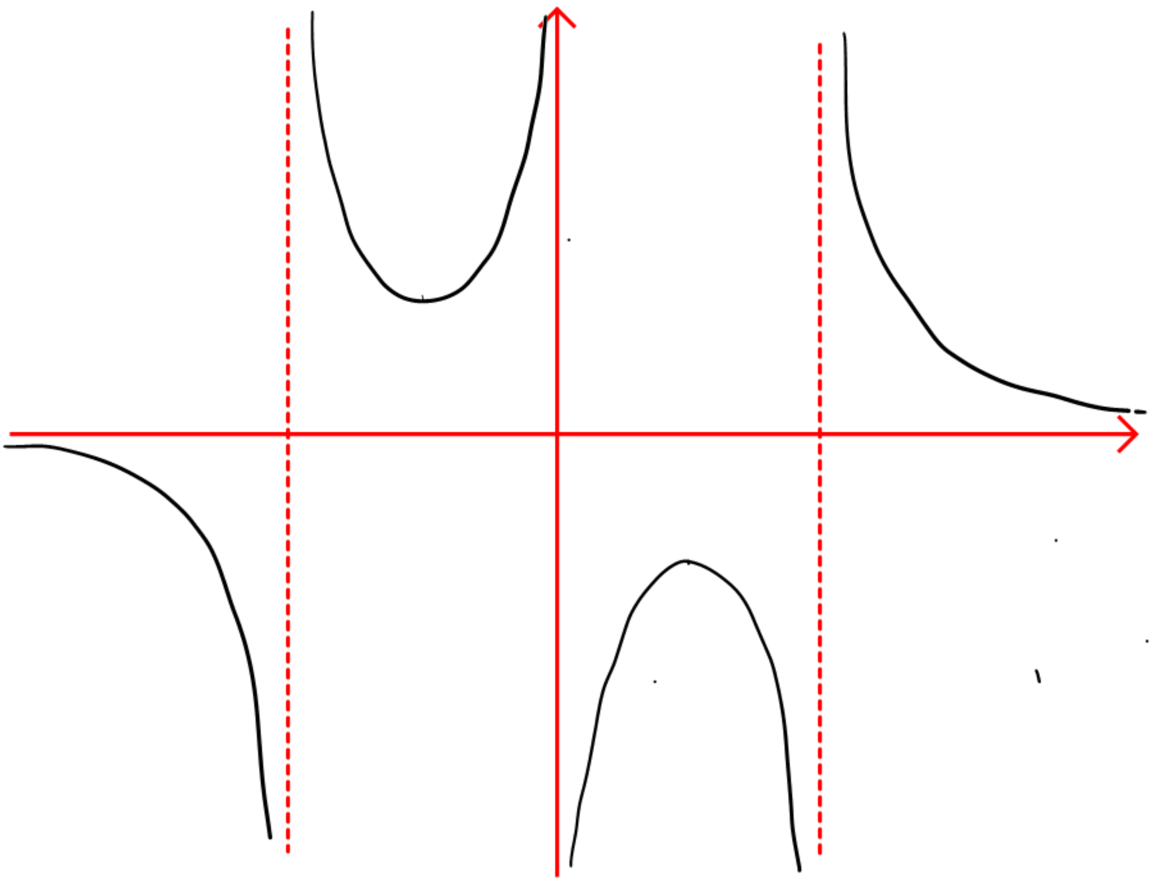
$y=0$ אופקית בשני הצדדים

הסבר: סביב $x=0,\sqrt{e},-\sqrt{e}$ ערכי הפונ' $f(x)$ מתכנסים ל 0, ולכן לאחר פעולת ההפכי, ערכי הפונ' $g(x)$ ישאפו ל $\pm\infty$ ויוצרו אסימ' אנכיות.

וכאשר x שואף ל $\pm\infty$ ערכי הפונ' $f(x)$ גם כן שואפים ל $\pm\infty$ ולכן לאחר פעולת ההפכי, ערכי הפונ' $g(x)$ יתכנסו לאפס ולכן יווצרו אסימ' אופקית ב $y=0$ בשני הצדדים.

ג (3) שים ♡ - $g'(x)=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ ← הנגזרות הפוכות סימן ולכן

תחומי עליה וירידה של $f(x)$ ו $g(x)$ יהיו הפוכים!



ג (4) הנקודות המשותפות לגרף $f(x)$ ו $g(x)$ הן נקודות
שעבור ה-y המקורי שלהן היה 1 או -1. הן היחידות,
שכאשר מבצעים עליהן פעולת ההפכי, ערכן לא משתנה.
מהתבוננות בסרטוט של $f(x)$, והתחשבות בשיעורי ה-y
של נקודות הקיצון, היו 6 נקודות עם ערך y הנ"ל.

לסיכום: לגרף $f(x)$ ו $g(x)$ ישנן 6 נקודות משותפות

ז

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{4x(\ln(x^2)-1)}=$$

נקבל את האינטגרל ע"פ הנוסחה $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|$

$$\int g(x)dx=\int\frac{1}{4x(\ln(x^2)-1)}dx=\int\frac{\frac{1}{4x}}{\ln(x^2)-1}dx=$$

$$\int\frac{1}{8}\frac{\frac{1}{4x}\cdot 8}{\ln(x^2)-1}dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{2}{x}}{\ln(x^2)-1}=\boxed{\frac{1}{8}\cdot\ln\left|\ln(x^2)-1\right|+C}$$