# פתרון הבחינה
# במתמטיקה

**קיץ תשפ"ב, 2022, גרסה ג' שאלון: 35582**

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

**.1** נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.

מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא $(x-a)^2+y^2=r^2$ , a הוא פרמטר חיובי.

מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא $(x-15)^2+y^2=R^2$ .

אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9 , והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא 1:2 , $r<R$ .

**א.** מִצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M .

נתון כי $a<15$ .

**ב.** סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.

**ג.** מִצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.

**ד.** הישר $mx-y+n=0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים. מִצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).

נתונים שני מעגלים <u>אחרים</u> המשיקים זה לזה מבחוץ.

משוואות המעגלים הן: $(x-t)^2+y^2=r^2$ ; $(x-k)^2+y^2=R^2$ , t ו־ k הם פרמטרים.

ערכי הרדיוסים r ו־ R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.

**ה.** האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה?

אם כן – מִצאו את t ואת k . אם לא – נַמקו.

א. מרכזי המעגלים: $N(15,0)$ , $M(a,0)$

אורך קטע המרכזים הוא 9, כלומר $MN=9$

$$\sqrt{(a-15)^2+0^2}=9 \rightarrow (a-15)^2=9^2$$

$$a=6 \qquad a=24$$

מכיוון שהמעגלים משיקים מבחוץ, אורך קטע המרכזים שווה לסכום הרדיוסים: $R+r=9$

נתון כי $R=2r$, ולכן: $2r+r=9$

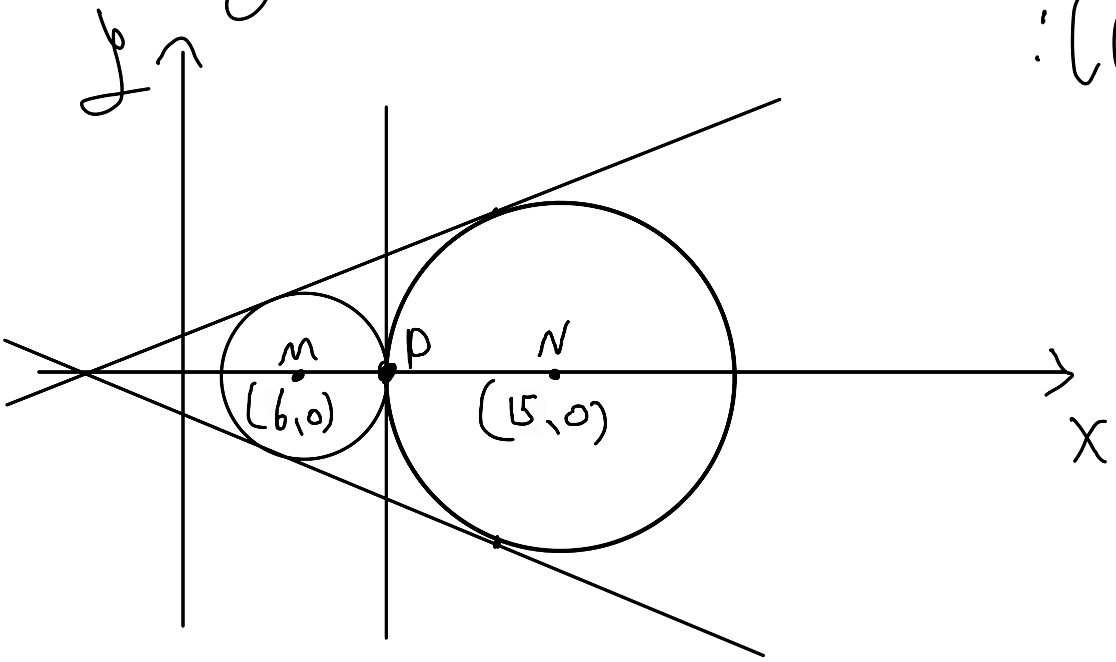
כלומר: $r=3$, $R=6$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (x-15)^2+y^2=36 & \text{מעגל } N: \\ (x-6)^2+y^2=9 & \text{מעגל } M: \\ (x-24)^2+y^2=9 & \end{array}}$$

ב. נתון כזכור, כלומר מעגל M הינו

$$(x-6)^2+y^2=9$$

נשרטט:



ג. נסמן את הנקודה המשותפת לשני המעגלים באות P (ראה שרטוט). מכיוון שרדיוס מעגל M הינו 3, שיעור נקודה P הינו (9,0). המשיק המשותף לשני המעגלים מאונך לציר x ולכן משוואתו $\boxed{x=9}$

ד. משוואת המשיק המשותף $mx-y+n=0$

נסדר את המשוואה כך ש-y יהיה בסימן חיובי:

$$-mx+y-n=0$$

מרחק המשיק המשותף ממרכז כל מעגל שווה לרדיוס של אותו מעגל. ניעזר בנוסחה לחישוב מרחק נקודה מישר

עבור המשיק העובר מחוץ למעגלים נכ"ב

בנוסחה:

$$\text{I}\ \begin{cases} 3 = \dfrac{-6m-n}{\sqrt{m^2+1}} & \text{:מעגל מ} \\[2ex] 6 = \dfrac{-15m-n}{\sqrt{m^2+1}} & \text{:מעגל נ} \end{cases}\ \text{II}$$

נחלק את המשוואות:

$$\frac{1}{2} = \frac{6m+n}{15m+n} \rightarrow 15m+n = 12m+2n$$

$$n = 3m$$

נציב במשוואה I:

$$3 = \frac{-6m-3m}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$9m^2+9 = 81m^2 \rightarrow m^2 = \frac{1}{8}$$

הפתרון נפסל ע"י
הצבה לפי השאלה
ברביע.

$$\cancel{m_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}}$$

$$\boxed{m_2 = -\frac{1}{\sqrt{8}} \quad n = -\frac{3}{\sqrt{8}}}$$

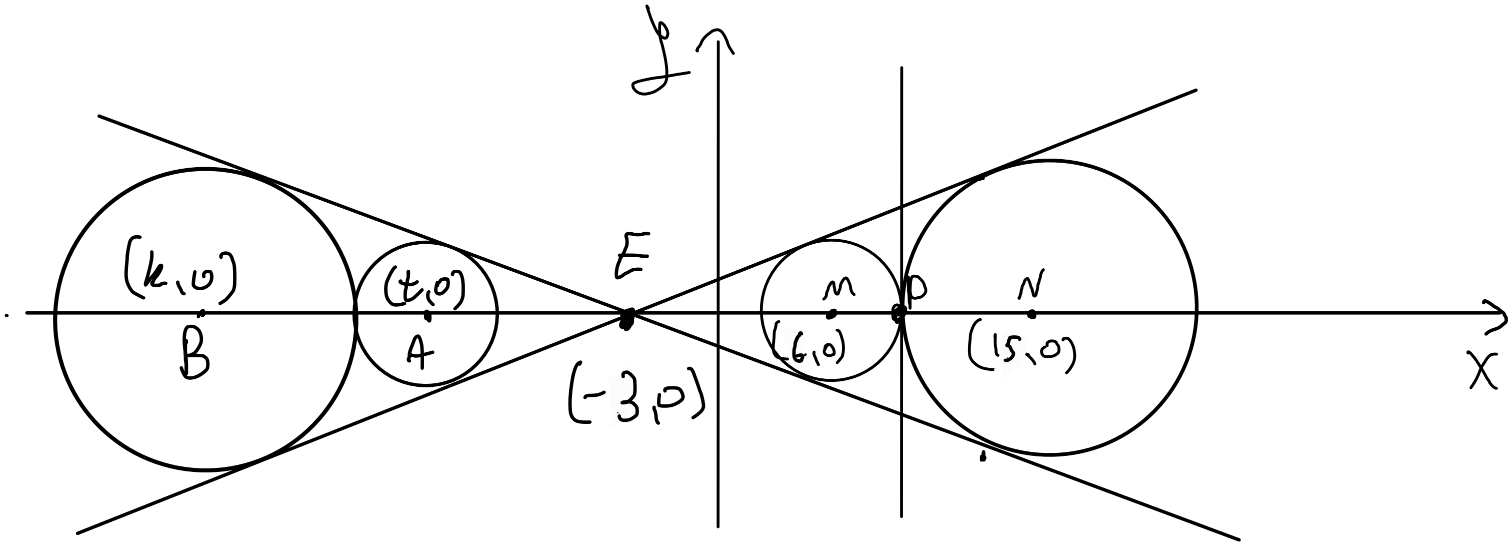
עבור המשיק העובר מעל למעגלים
נשתמש בסימן (-), ונקבל משוואות:

$$\begin{cases} \text{I} \quad 3 = \dfrac{6m+n}{\sqrt{m^2+1}} \\[2ex] \text{II} \quad 6 = \dfrac{15m+n}{\sqrt{m^2+1}} \end{cases}$$

נפתור את המשוואות ונקבל כי

$$\boxed{m = \frac{1}{\sqrt{8}} \quad , \quad n = \frac{3}{\sqrt{8}}}$$

ה. נתבונן שוב בשרטוט, נצייר את
המשיקים אותם שרטטנו:




נראה כי משמאל לנקודה E ישנה אפשרות לשני מעגלים נוספים המשיקים לישרים שאת משוואתם מצאנו בסעיף ד'.

נמצא את נקודה E לפי חיתוך אחד המשיקים עם ציר x:

$$-\frac{1}{\sqrt{8}}x+0-\frac{3}{\sqrt{8}}=0 \rightarrow x=-3$$

$$E(-3,0)$$

מטעמי סימטריה מתקיים:

$$AE = ME \qquad\qquad BE = NE$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$-3 - t = 6 - (-3) \qquad\qquad -3 - k = 15 - (-3)$$

$$\boxed{t = -12} \qquad\qquad \boxed{k = -21}$$

**.2** נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור: $D(-2, 5, -4)$ , $C(1, -1, 2)$ , $B(7, 5, 5)$ , $A(4, p, -1)$ ,
$p$ הוא פרמטר.

**א.** מִצאו את משוואת המישור $ABCD$ .

**ב.** חַשבו את ערך הפרמטר $p$ .

**ג.** הוכיחו כי המרובע $ABCD$ הוא ריבוע.

הנקודה $S$ היא קודקוד של פירמידה $SABCD$ שבסיסה $ABCD$ .

המקצוע $SC$ מונח על הישר $\underline{x} = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$ .

נתון כי נפח הפירמידה הוא 81 .

**ד.** מִצאו את שיעורי הנקודה $S$ (שתי אפשרויות).

נתון מישור נוסף $\pi$ המאונך למקצוע $SC$ .

**ה.** מִצאו את הזווית שבין המישור $ABCD$ ובין המישור $\pi$ .

א. ניעזר בנקודות $B, C, D$ ונכתוב הצגה פרמטרית

של המישור: $\underline{X} = (1,-1,2) + t(6,6,3) + k(-3,6,-6)$

או: $\underline{X} = (1,-1,2) + t(2,2,1) + k(1,-2,2)$

נמצא את הנורמל למישור $(a,b,c)$:

$$\begin{cases} \text{I} & (a,b,c)(2,2,1)=0 \\ \text{II} & (a,b,c)(1,-2,2)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{I} & 2a+2b+c=0 \\ \text{II} & a-2b+2c=0 \end{cases}$$

ממשוואה I נקבל $c=-2a-2b$

נציב במשוואה II: $a-2b+2(-2a-2b)=0$

$3a=-6b \rightarrow a=-2b$

נציב ונביע $c$ באמצעות $b$:

$c=-2(-2b)-2b \rightarrow c=2b$

הנורמל הינו $(-2b,b,2b)$

נחלק ב-$b$ והנורמל יהיה $(-2,1,2)$

משוואת המישור: $-2x+y+2z+d=0$

נציב נק' $C(1,-1,2)$ $\quad -2-1+4+d=0$

$d=-1$

משוואת המישור: $\boxed{-2x+y+2z-1=0}$

ב. נציב נק' $A$ במישור: $-2\cdot 4+p+2\cdot(-1)-1=0$

$\boxed{p=11}$

ג. מציאת הוקטורים:

$$\vec{AB} = B - A = (3,-6,6)$$
$$\vec{BC} = C - B = (-6,-6,-3)$$
$$\vec{CD} = D - C = (-3,6,-6)$$
$$\vec{AD} = D - A = (-6,-6,-3)$$

נחשב אורכים:

$$d_{AB} = \sqrt{3^2+6^2+6^2} = 9 \qquad d_{CD} = \sqrt{3^2+6^2+6^2} = 9$$
$$d_{BC} = \sqrt{6^2+6^2+3^2} = 9 \qquad d_{AD} = \sqrt{6^2+6^2+3^2} = 9$$

כל צלעות המרובע שוות ולכן המרובע הוא מעוין. נראה כי ישנה זווית ישרה

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = (3,-6,6)(-6,-6,-3) = -18+36-18=0$$

מתקיים $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ ולכן ABCD ריבוע (מעוין בעל זווית ישרה אחת).

ד. נפח פירמידה: $V=\frac{B\cdot h}{3}$

שטח הבסיס $B$: $S_{ABCD}=9^2=81$

נציב $V=81$, $B=81$: $81=\frac{81\cdot h}{3}$

$h=3$

כלומר גובה הפירמידה הוא 3.

הנקודה $S$: $(t,-4+3t,1+t)$

נציב בנוסחה מרחק נקודה ממישור:

$$3=\frac{|-2t-4+3t+2(1+t)-1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}$$

$$3=\frac{|3t-3|}{3}$$

$$9=|3t-3|$$

$$9=3t-3 \qquad\qquad -9=3t-3$$

$$t=4 \qquad\qquad t=-2$$

$$\boxed{S(4,8,5)} \qquad\qquad \boxed{S(-2,-10,-1)}$$

ה. הזווית המבוקשת הינה זווית בין מישורים, שהינה הזווית החדה בין הנורמלים.

הנורמל למישור $\pi$ הינו וקטור הכיוון של $SC \leftarrow (1,3,1)$.

הנורמל של מישור ABCD הוא $(-2,1,2)$

$$\cos\alpha = \frac{|(-2,1,2)\cdot(1,3,1)|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+1^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\boxed{\alpha = 72.45^\circ}$$

**3.** נתונה המשוואה $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$ , $z$ הוא מספר מרוכב.

$z_1$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

**א.** מִצאו את משוואת המעגל.

חוסמים בַּמעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר $z_1$ .

**ב.** חַשבו את שטח הריבוע.

**ג.** מִצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.

מכפילים ב־ $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב־ $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 60^\circ) + i\sin(\alpha + 60^\circ))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי.

הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.

נתון: $r_1$ ו־ $r_2$ חיוביים, $r_1 \neq r_2$ .

**ד.** מהו סוג המרובע שהתקבל? נַמקו את התשובה.

נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי $1.2$ משטח הריבוע שחישבתם בסעיף ב.

**ה.** חַשבו את $r_1 \cdot r_2$ .

א. נסמן $z = x+yi$ ונפתור את המשוואה:

$$(x+yi)^2 + (x+yi)(x-yi) = x+yi+2(x-yi)+9+7i$$

$$x^2+2xyi-y^2+x^2+y^2 = x+yi+2x-2yi+9+7i$$

$$2x^2+2xyi = 3x+9+(7-y)i$$

$$\begin{cases} \text{I} & 2x^2 = 3x+9 \longrightarrow 2x^2-3x-9=0 \\ \text{II} & 2xy = 7-y \end{cases}$$

$x_1 = 3$ $\quad$ $x_2 = \cancel{-1.5}$ אינו ברביע הראשון

נציב $X=3$ במשוואה מס׳ 2:

$2\cdot 3y = 7 - y \rightarrow y = 1$

הנקודה הינה $(3,1)$, משוואת המעגל

שמרכזו בראשית הצירים $x^2+y^2=R^2$

נציב את הנקודה:
$3^2+1^2=R^2$

$R=\sqrt{10}$

משוואת המעגל
$$\boxed{x^2+y^2=10}$$

ב. בריבוע החסום במעגל, קוטר המעגל מתלכד עם אלכסון הריבוע (נכיוון שצלעות ניצבות נשענות על קוטר). שטח הריבוע שווה למחצית מכפלת האלכסונים.

רדיוס המעגל הינו $\sqrt{10}$ לכן שטח

הריבוע:

$$S = \frac{(2\cdot\sqrt{10})^2}{2} = \boxed{20}$$

ג. לפי סעיף 4 ג', $z_1 = 3+i$

ולכן קדקוד ראשון הינו $(3,1)$.

אלכסוני הריבוע מתלכדים עם קוטר המעגל

(הסבר בסעיף 4 ג'), והזווית ביניהם ישרה.

לכן, ראשית הצירים תהיה אמצע הקטע

בין הקדקוד שברביע I וברביע III, ומכאן

ששיעורי הקדקוד ברביע III הינם $(-3,-1)$.

מכיוון שאלכסוני הריבוע מאונכים זה לזה,

נקבל את הקדקודים שברביע II ו- IV

ע"י הכפלה ב- $cis90°$ של הקדקודים שברביע

I ו- III, בהתאמה. $cis90° = i$

קדקוד רביע II: $(3+i)\cdot i \rightarrow -1+3i$

קדקוד רביע IV: $(-3-i)i \rightarrow 1-3i$

$$(3,1),\ (-1,3),\ (-3,-1),\ (1,-3)$$

ד. לאחר שנכפיל את הקדקודים ברביעים I, III ב- $cis\alpha$, נקבל נקודות הנמצאות על מעגל שרדיוסו $\sqrt{10}$. הזווית של ההצגה הקוטבית של שני הקדקודים תגדל ב-$\alpha$ מעלות נגד כיוון השעון, ולכן הקו המחבר ביניהם עדיין יעבור דרך ראשית הצירים.

מאותה הסיבה הקדקודים ברביע II, IV יגדלו ב $(\alpha+60^\circ)$ מעלות נגד כיוון השעון ו"ימצאו על מעגל שרדיוסו $\sqrt{10}$ ומרכזו בראשית

הוכחה.

מכיוון ש- $r_1 \neq r_2$ מתקבל מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה, אינם שווים זה לזה, כלומר מתקבל מקבילית.

ה. הזווית בין האלכסונים הינה ישרה, ועוד $60^\circ$ שהוצגו, כלומר $150^\circ$. ולכן הזווית החדה בין האלכסונים הינה $30^\circ$

אורך האלכסונים הינו $2r_2$סט, $2r_1$סט

ולכן

$$S_{\text{מקבילית}} = \frac{2\cdot r_1 \text{סט} \cdot 2r_2 \text{סט} \cdot \sin 30^\circ}{2} = r_1\cdot r_2\cdot \text{סט}$$

$$\frac{S_{\text{מקבילית}}}{S_{\text{ריבוע}}} = 1.2$$

$$\frac{r_1 \cdot r_2 \cdot 10}{20} = 1.2$$

$$\boxed{r_1 \cdot r_2 = 2.4}$$

**4.** נתונה הפונקציה $f(x)=xe^x-2e^x+1$ המוגדרת לכל $x$.

**א.** **(1)** מִצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ $y$ (אם יש כאלה).

**(2)** מִצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ $y$.

**(3)** מִצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

**(4)** סַרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{1-e^x}{e^x-x}$ המוגדרת לכל $x$.

**ב.** **(1)** מִצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לציר ה־ $y$.

**(2)** מִצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה־ $x$ (אם יש כאלה).

**(3)** הוכיחו כי $g'(x)=\dfrac{f(x)}{(e^x-x)^2}$.

**ג.** היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וּמִצאו <u>כמה</u> נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקציה $g(x)$. נַמקו את התשובה.

**ד.** סַרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

**ה.** חַשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ $x$ ועל ידי הישר $x=-1$.

א. (1) אין אסימפטוטה $x\to\infty\to y\to\infty\to$

$x\to-\infty\to y\to 1\to$ $\boxed{y=1}$ אסימפטוטה

(2) נציב $x=0$, נקבל $f(0)=0-2\cdot e^0+1=-1$

$\boxed{(0,-1)}$

(3) נגזור:

$$f'(x)=e^x+xe^x-2e^x=e^x(x-1)$$

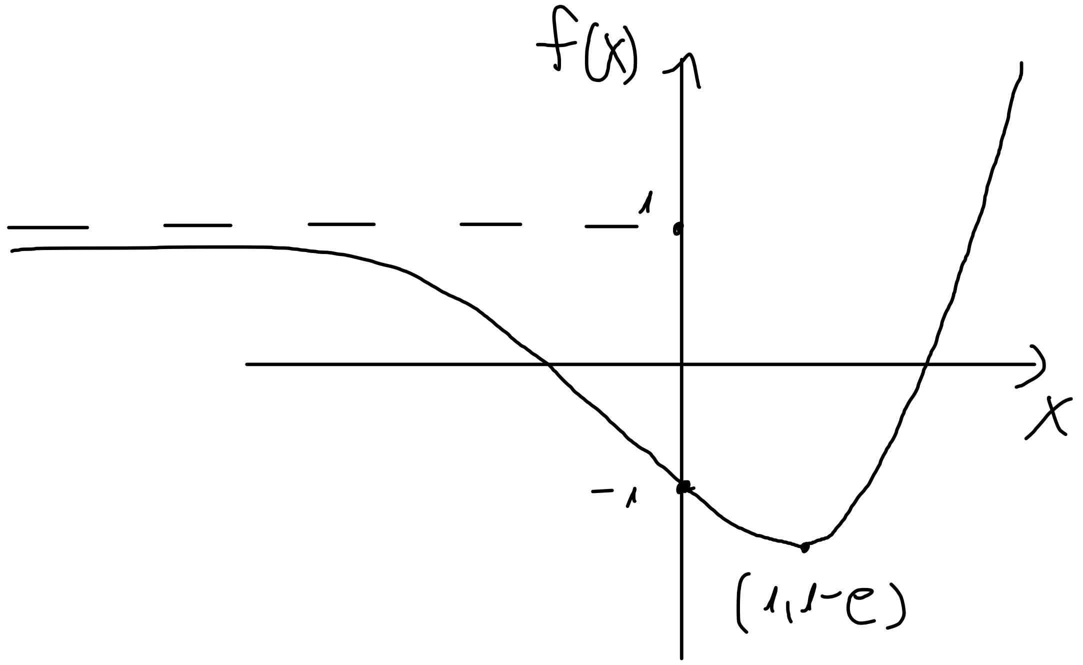
$$0=e^x(x-1)\to x=1\to(1,1-e)$$

עבור $x>1$ נקבל $f'(x)$ חיובי

עבור $x<1$ נקבל $f'(x)$ שלילי

עלייה: $x>1$ , ירידה: $x<1$

(ד)




ה. $g(x) = \frac{1-e^x}{e^x - x}$

(1) אסימפטוטה $x \to \infty \to y \to -1 \to \boxed{y=-1}$

אסימפטוטה $x \to -\infty \to y \to 0 \to \boxed{y=0}$

(2) נציב $g(x)=0$ :

$$0 = 1 - e^x$$

$$e^x = 1 \rightarrow x = 0$$

$$\boxed{(0,0)}$$

(3)

$$g'(x) = \frac{-e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(1 - e^x)}{(e^x - x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-e^{2x} + xe^x - e^x + e^{2x} + 1 - e^x}{(e^x - x)^2}$$

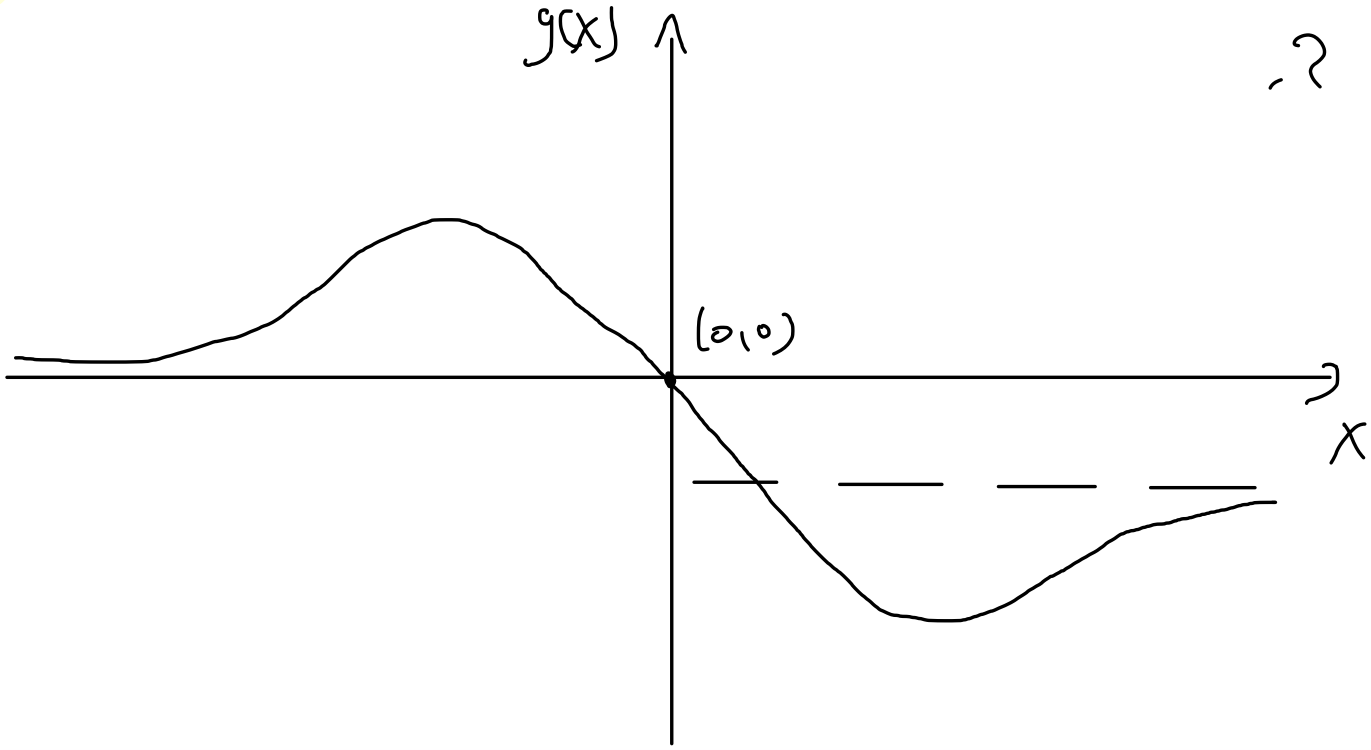
$$g'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{(e^x - x)^2} = \boxed{\frac{f(x)}{(e^x - x)^2}}$$

ג. לפי הגרף בסעיף א' (4), הגרף של $f(x)$
חותך את ציר $x$ בשתי נקודות, ולכן $g'(x)$
מתאפס בשתי נקודות. ניתן לראות

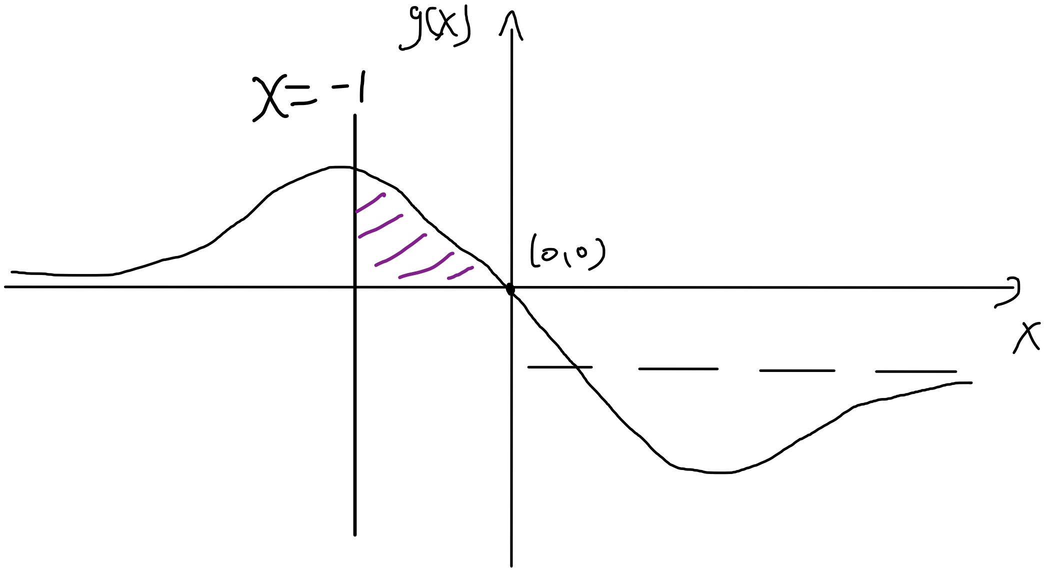
בגרף כי תחומי החיוביות של $f(x)$ נמצאים
מימין ומשמאל לנקודת החיתוך, ותחום
השליליות נמצא בין שתי נקודות החיתוך.
אלה גם תחומי החיוביות והשליליות של $g(x)$.

לכן ל- $g(x)$ נקודת מקסימום אחת
(משמאל לראשית הצירים) ונקודת מינימום
אחת (מימין לראשית הצירים).

ד.



ה. נסמן בגרף את השטח המבוקש.




נחשב ע"י אינטגרל:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1-e^x}{e^x-x}\,dx = \int -\left(\frac{e^x-1}{e^x-x}\right)dx$$

מכיוון שהמונה הינו נגזרת של המכנה ניעזר בכלל:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

לכן האינטגרל יהיה

$$\left[-\ln(e^x-x)\right]_{-1}^{0}$$

נחשב:

$$-\ln(e^0-0)-\left[-\ln(e^{-1}+1)\right]$$

השטח המבוקש הוא

$$\boxed{\ln\left(\frac{1}{e}+1\right)=0.313}$$

יח"ר

**5.** נתונה הפונקצייה $f(x) = x + \ln(x^2 - 15)$ .

**א.** (1) מְצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ .

(2) מְצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מְצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$ , וקִבעו את סוגה.

(4) סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ .

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$ .

**ב.** (1) מְצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ .

(2) מְצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מְצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) סַרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקצייה $g(x) = e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$ .

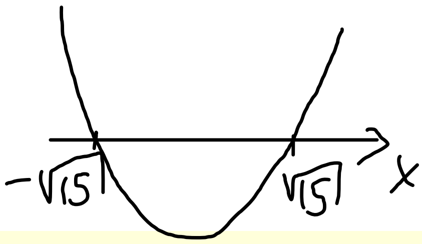
**ג.** (1) מְצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ , וקִבעו את סוגה.

(2) מְצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $g(x)$ .

**ד.** חַשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה $y = f'(x) \cdot g(x)$ , על ידי ציר ה־ $x$ ועל ידי הישרים $x = -6$ ו־ $x = -5$ .

א. (1) תחום הגדרה:

$x^2-15>0$ →




$x<-\sqrt{15}$ או $x>\sqrt{15}$

(2) האסימפטוטה אנכית: כאשר $x\to\pm\sqrt{15}$ הביטוי $\ln(x^2-15)$ שואף ל-$(-\infty)$ ולכן מקבלים אסימפטוטה אנכית עבור $x=-\sqrt{15}$ , $x=\sqrt{15}$

אסימפטוטה אופקית: כאשר $x \to \infty$

אזי הביטויים $\ln(x^2-15)$, $x$ שואפים ל- $\infty$.

כאשר $x \to -\infty$ אז הביטוי $\ln(x^2-15)$ ישאף לאינסוף, אולם הביטוי $x$ ישאף לאינסוף שלילי

מה יותר.

בשני המצבים (מימין ומשמאל) לא תתקבל אסימפטוטה אופקית.

(3) נגזרת:
$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-15} = \frac{x^2+2x-15}{x^2-15}$$

$$f'(x) = 0 \to 0 = x^2+2x-15$$

$$x = -5 \qquad \cancel{x = 3}$$

לא בתחום ההגדרה

$$f(-5) = -2.697$$

$$(-5, -2.697)$$

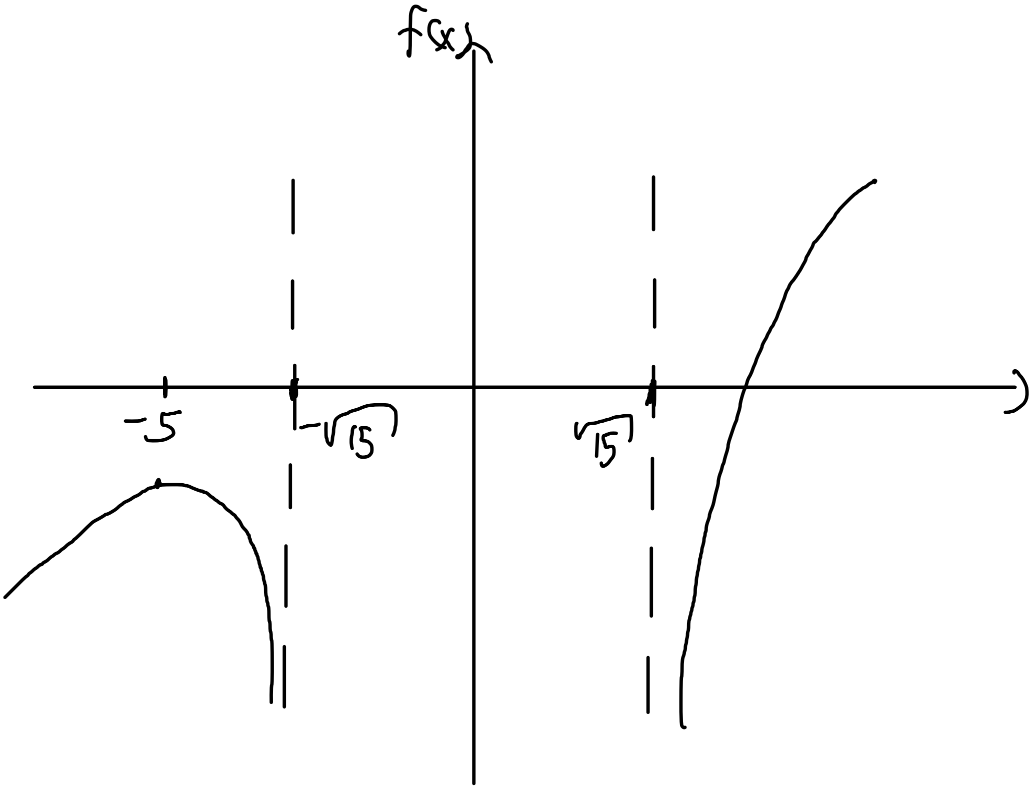
נעזר בטבלה:

| $x$ | | $-5$ | | $-\sqrt{15}$ | | $\sqrt{15}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $-$ | | | | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | | | ↗ |

$f'(-6)>0$, $f'(-4)<0$ $\qquad$ $f'(4)>0$

לפונקציה נקודת מקסימום עבור $(-5,-2.697)$

(4)



ב. (1) $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-15}$

תחום הגדרה: $x^2-15\neq0 \to x\neq\pm\sqrt{15}$

מכיוון שערכים אלו אינם מוגדרים גם ב-$f(x)$, ועלינו להתחשב בתחום ההגדרה של הפונקציה המקורית - תחום ההגדרה של $f'(x)$ יהיה

$$\boxed{x<-\sqrt{15},\quad x>\sqrt{15}}$$

(2) $x=\pm\sqrt{15}$ מאפסים את המכנה ולא מאפסים את המונה ולכן מתקבל אסימפטוטה אנכית עבור $\boxed{x=\pm\sqrt{15}}$

החזקות הגבוהות נמצאות במונה וגם
במכנה לכן נעזר בחוקי מקדמים
ונקבל אסימפטוטה אופקית עבור $\boxed{y=1}$.

(3) $x=0$ אינו בתחום ההגדרה לכן
לא יהיה חיתוך עם ציר $y$.

נג"ב $f'(x)=0$:

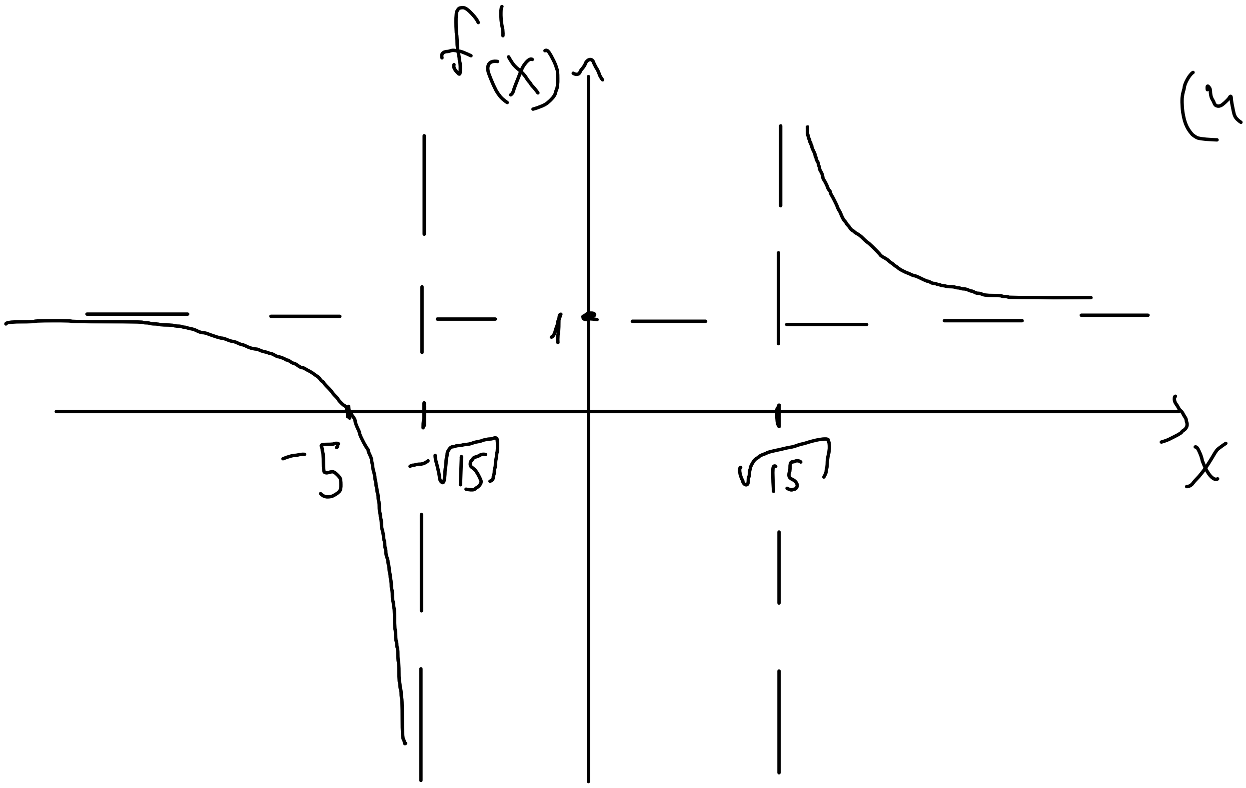
$$0 = x^2+2x-15$$

$x=-5$ $\qquad$ $\cancel{x=3}$

לא בתחום
ההגדרה

$$\boxed{(-5,0)}$$

(4)




2. (1) $g(x)=e^{f(x)}$

$$g'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}$$

הנגזרת $g'(x)$ מתאפסת עבור $f'(x)=0$,

כלומר עבור $x=-5$ בלבד.

לפי הגרף מסעיף קודם ניתן לראות כי

$f'(x)$ עובר בנקודה זו מתחום חיובי לשלילי,

ולכן עבור $x=-5$ ל- $g(x)$ יש נקודת מקסימום. נחשב שיעור y:

$$g(-5)=e^{f(-5)}=0.067$$

$$\boxed{\begin{matrix}(-5\ ,\ 0.067)\\ MAX\end{matrix}}$$

(2) תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$ זהים לאלו של $f'(x)$, ולכן ניעזר בגרף מסעיף ב' (4) ונראה כי:

$g(x)$ עולה עבור $\boxed{x<-5\ ,\ x>\sqrt{15}}$

ולכן אלו תחומי עלייה של $g(x)$.

$g'(x)<0$ עבור $\boxed{-5<x<-\sqrt{15}}$

לכן זהו תחום ירידה של $g(x)$.

ד. $y=f'(x)\cdot e^{f(x)} \Rightarrow y=f'(x)\cdot g(x)$

תחום ההגדרה של $y$ זהה לזה של

$f'(x)$ ו- $g(x)$. נמצא את נק' החיתוך

של $y$ עם ציר $x$: $0=f'(x)\cdot e^{f(x)}$

$$\Downarrow$$

$f'(x)=0$ מתקבל עבור $x=-5$

$(-5,0)$

לפי הגרף של $f'(x)$ בתחום

ב- $-6<x<-5$ $f'(x)$ חיובי, ולכן

גם הפונקציה $y=f'(x)\cdot e^{f(x)}$ חיובית.

כלומר האינטגרל לחישוב השטח:

$$\int_{-6}^{-5} f'(x)\cdot e^{f(x)}\,dx=\left[e^{f(x)}\right]_{-6}^{-5}$$

$$e^{f(-5)}-e^{f(-6)}=0.067-0.052$$

השטח הוא 0.0149 יח"ר.