

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

קיץ תשפ"ב, 2022, גרסה ג' שאלון: 35581

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

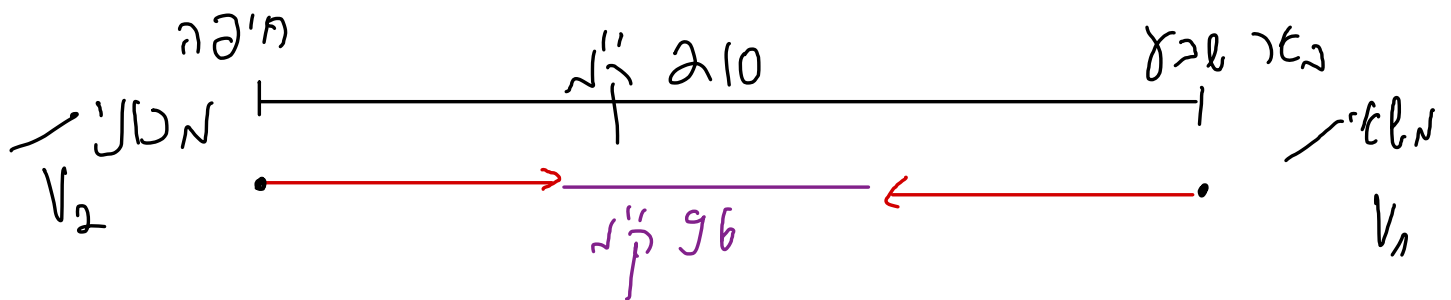
למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



1. משאית יצאה מבאר שבע לחיפה במהירות קבועה  $v_1$ . באותו הזמן בדיוק יצאה מכונית מחיפה לבאר שבע במהירות קבועה  $v_2$ . המרחק בין חיפה לבאר שבע הוא 210 ק"מ. המשאית נעצרה בצד הדרך עקב תקלה, לפני שחלפה המכונית על פניה. באותו הזמן המרחק בין המשאית לבין המכונית היה 96 ק"מ.
  - א. הביעו באמצעות  $v_1$  ו- $v_2$  את הזמן שחלף מרגע תחילת הנסיעה ועד שנעצרה המשאית בצד הדרך. מן שהיית המשאית בצד הדרך היה גדול פי 1.5 מן הזמן שחלף מרגע יציאתה מבאר שבע עד לרגע עצירתה. המשאית יצאה שוב לדרך באותה המהירות,  $v_1$ , בדיוק ברגע שבו חלפה המכונית על פניה.
  - ב. מצאו את היחס בין מהירות המכונית לבין מהירות המשאית.
  - ג. מצאו את מהירות המכונית ואת מהירות המשאית.

א. נעצר בשלום ניתן הלאה.



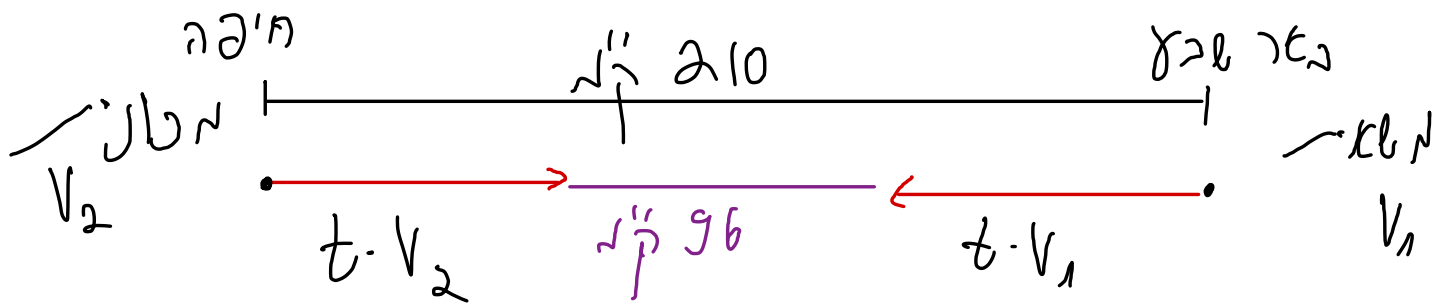
נסמן  $t$  - א זמן נסיעת המסלול  
זה הלאה א צד לוקח א צד ר  
הלאה



נעצר בקלר: מהירות זמן = זרן  
 ונרשום את התנאים בטבלה

זמן	מהירות	זרן
$t$ נלשאי	$v_1$	$t \cdot v_1$
$t$ מכונני	$v_2$	$t \cdot v_2$

נרשום את הזרכים של המכונני והנלשאי  
 על השרט:



ניתן לראות כי סכום הזרכים הנו  
 200 ק"מ. הנלשאי התאמה:



$$t \cdot v_1 + t \cdot v_2 + 96 = 210$$

$$t \cdot v_1 + t \cdot v_2 = 114$$

$$t(v_1 + v_2) = 114 \quad \text{נבדק א } t$$

$$t = \frac{114}{v_1 + v_2}$$

ג. הצמין לבו עברה המכונה א  
 96 הקילומטרים שבינה לבין המשא  
 הינו  $t = 1.5$ , כלומר  $1.5 \cdot \frac{114}{v_1 + v_2}$

ולכן משוואת הזריק תהיה:

$$1.5 \cdot \frac{114}{v_1 + v_2} \cdot v_2 = 96$$



$$\frac{171 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = 96$$

$$171 \cdot V_2 = 96 \cdot V_1 + 96 \cdot V_2$$

$$75 \cdot V_2 = 96 \cdot V_1$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{32}{25}$$

יחס הנפחים:

ל. הזרק לעברה הנשאית אגב אקולה

$$\frac{114}{V_1 + V_2} \cdot V_1$$

הינה

לפי סעיף 2,  $V_2 = 1.28V_1$ ,  $\therefore 32$

$$\frac{114}{1.28V_1 + V_1} \cdot V_1 \Rightarrow 50$$



כאומר זה לקבלה עברה האלוא  
50 קילומטרים מעין 20 קילומטרים.  
הזיון שנסעה לאחר העצירה הנה  
160 קילומטרים.

זמן הנסיעה הינו 128 ק"מ ←  $\frac{32}{15}$  שעות

ואכן  $\frac{32}{15} \cdot V_1 = 160$

$V_1 = 75$

ואכן  $V_2 = 1.28 \cdot 75$

$V_2 = 96$

מהירות → המכונה 96 קמ"ש  
מהירות → האלוא 75 קמ"ש



2. סדרה I היא סדרה הנדסית אינסופית שאיבריה הם  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ומנתה היא  $9 \cdot r^2$ .  
נתון:  $0 < r < \frac{1}{3}$ .

בין כל שני איברים בסדרה I הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם  $b_1, b_2, b_3, \dots$  ומנתה היא  $q$ .

א. הביעו את  $q$  באמצעות  $r$ .

ב. הסבירו מדוע שתי הסדרות I ו-II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי  $\frac{4}{3}$  מסכום סדרה I.

ג. חשבו את  $q$ .

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 18.

ג. מצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב-5 ( $b_5, b_{10}, b_{15}, \dots$ ).

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחרי

אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

א (1) נתתי השאלה נ"ך והסנן כ'  
 $a_1 = b_1, a_2 = b_3, Q_a = 9r^2, Q_b = q$

$$\frac{b_3}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

↓

↓

$$q^2 = 9r^2$$

$$q = 3r$$

~~$$q = -3r$$~~

עבריו זה נכנס לכאן ל- $r$  חילוקי  
ולכן ל- $b_n$  סדרה יורדת



(2) ניתן כי  $0 < r < \frac{1}{3}$  ולכן טווח הערכים  
 של למת סדרה I היא  $0 < r^2 < r < 0$ .  
 כלומר  $0 < Q_a < 1$

באילו אופן למת סדרה II נמצא  
 בטוח הערכים  $0 < 3r < 1$   
 כלומר  $0 < Q_b < 1$

ולכן למת הסדרה למתנסו.

ג.  $S_2 = \frac{4}{3} S_1$

$$\frac{a_1}{1-3r} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a_1}{1-9r^2}$$

$$\frac{1}{1-3r} = \frac{4}{3(1+3r)(1-3r)}$$





$$3(1+3r) = 4$$

$$3 + 9r = 4$$

$$r = \frac{1}{9}$$

$$q = 3r$$

$$q = \frac{1}{3}$$

ג.  $\sum_{\text{איברים נהוגים}} = 18$   
 סעיפים

$$18 = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{9}}$$

$$16 = \frac{a_1}{3}$$

$$a_1 = 48$$

↓

$$b_1 = a_1 = 48$$

איבר I:  $b_2 = b_1 \cdot q = \frac{a_1}{3}$   
 מתקן:  $q^2 = \frac{1}{9}$



הסכום המקורי ה'נ' סכום סדרה  
 ס'נסו'ב' ל'ת'נס'
   
 $b_5, b_{10}, b_{15} \dots$

הא'גר הר'א'ל'ן:  $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 48 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{16}{27}$

ה'מ'נה  $q^5 = \frac{1}{243}$

$$S = \frac{\frac{16}{27}}{1 - \frac{1}{243}}$$

$$S = \frac{72}{121}$$



$$\frac{b_5}{S_{b_6 \rightarrow \infty}} = \frac{b_5}{\frac{b_6}{1-q}} = \frac{b_5(1-q)}{b_6} = \frac{\cancel{b_5}(1-q)}{\cancel{b_5} \cdot q} \quad ?$$

$$\frac{b_5}{S_{b_6 \rightarrow \infty}} = \frac{1-q}{q} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

ה. נראה כי ה'חס

$$\frac{a_n}{S_{n+1 \rightarrow \infty}}$$

אין ו'תלוי'  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_n}{S_{n+1 \rightarrow \infty}} = \frac{a_n}{\frac{a_{n+1}}{1-q}} = \frac{a_n(1-q)}{a_{n+1}} = \frac{\cancel{a_n}(1-q)}{\cancel{a_n} \cdot q}$$



$$\frac{a_n}{S_{n+1} \rightarrow \infty} = \frac{1-q}{q}$$

מכ"לן להגדלת א'נה תלויה ב-ח  
 ה'חם הינו קבוע עבור כל סדרה.



3. נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תיקו והפסד. ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק. נסמן ב- $p$  את ההסתברות שנטע תפסיד במשחק ( $p > 0$ ).
- בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.
- נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא  $4.5p$ .
- א. מצאו את הערך של  $p$ .
- נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.
- ב. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב-3 משחקים לפחות.
- ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.
- ד. (1) מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.  
(2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות. מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

א. נניח באמצעות  $p$  את ההסתברות

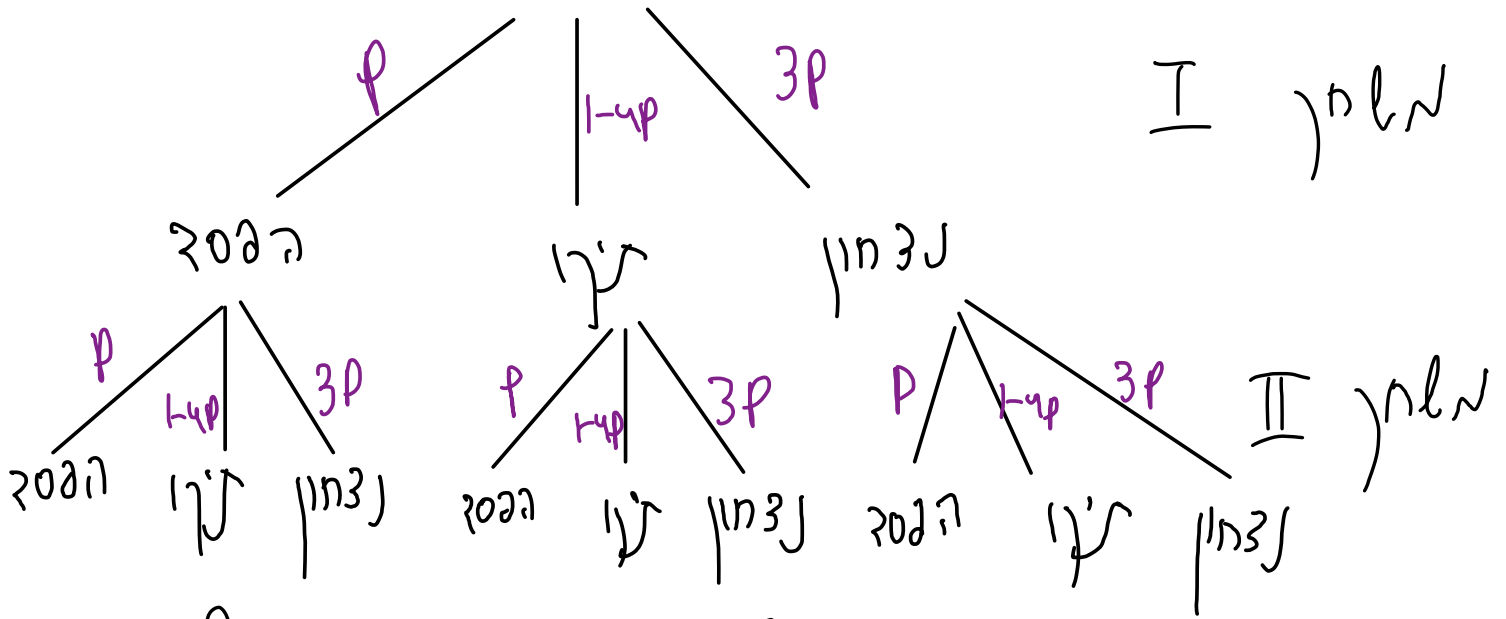
במשחק גובר:

$p$  - הסתברות להפסד  
 $3p$  - הסתברות לניצחון  
 $1-4p$  - הסתברות לתיקו

נתאר את המצבים האפשריים

בשני המשחקים לא חקרים ע"י ע"ה הסתברות:





נתון כי ההסתברות לנצח משחק אחד אחר אחרון  
הינה  $4.5p$ , ולכן ההסתברות לא לנצח באחד  
משחקי הינה  $1 - 4.5p$ . נכתוב משוואה מתאימה:

$$(1 - 4p)^2 + p(1 - 4p) + p(1 - 4p) + p^2 = 1 - 4.5p$$

$$1 - 8p + 16p^2 + p - 4p^2 + p - 4p^2 + p^2 = 1 - 4.5p$$

$$9p^2 - 1.5p = 0$$

~~$p = 0$~~

$$p = \frac{1}{6}$$

נפסל מכיוון שנתון  $p > 0$



ד. נחשב את ההסתברות שלק ש"מאל  
בניסוח ברנולי (התפלגות בינארית), כאשר:

$$p_{\text{זנח}} = \frac{1}{2}, \quad 1-p = \frac{1}{2}, \quad n = 5$$

$$P\left(\begin{matrix} \text{זנח} \\ \text{לפני} \\ 3 \\ \text{משחקים} \end{matrix}\right) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.5$$

ההסתברות לזנח לבחור 3 משחקים  
היא 0.5.

ה. ההסתברות שניצל זנח בלולו המשחקים  
הראשונים לבחור:

$$P = P\left(\begin{matrix} \text{זנח} \\ \text{משחק} \\ \text{I} \end{matrix}\right) \cdot P\left(\begin{matrix} \text{זנח} \\ \text{משחק} \\ \text{II} \end{matrix}\right) \cdot P\left(\begin{matrix} \text{זנח} \\ \text{משחק} \\ \text{III} \end{matrix}\right) \cdot 1 \cdot 1$$

↑  
כל תוצאה  
במשחק  
אם 4

↑  
כל תוצאה  
המשחק  
אם 5



$$P(\text{תוצאה שלולה} \wedge \text{משחקים ראשונים} \wedge \text{לפחות}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

ההסתברות שגיא ינצח את שלולה  
המשחקים הראשונים לפחות הינה  $\frac{1}{8}$ .

3. (ו) ההסתברות שגיא לא ינצח במשחק  
בוקר הינה

$$P(\text{נצחון}) + P(\text{זינו}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

ההסתברות שגיא לא ינצח באף אחד  
מתוך 5 משחקים הינה  $\left(\frac{5}{6}\right)^5$ ,

$$\frac{3125}{7776}$$

שלולה





(2) ההסתברות שג'עלע הבסידה בתלחן

אחז לבחור:

$$P(\text{הבסידה אחז לבחור}) = 1 - P(\text{הבסידה לא}) = 1 - \frac{3125}{7776}$$

$$P(\text{הבסידה אחז לבחור}) = \frac{4651}{7776}$$

נרצה לחלב את ההסתברות שג'עלע

עלכח 3 תלחנים ראלונק ותס"ס בתקו

בתלחן האחרון. מכ"ון לבסידה זכה

מתואר נרצה בו ג'עלע הבסידה לבחור בתלחן

אחז, ההבסידה זכ"ך לבחור בתלחן מס' 4. כלומר

$$P = P(\text{תקו בתלחן 5}) \cdot P(\text{הבסידה בתלחן 4}) \cdot P(\text{נבחין בתלחנים 1-3})$$

$$P = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{144}$$



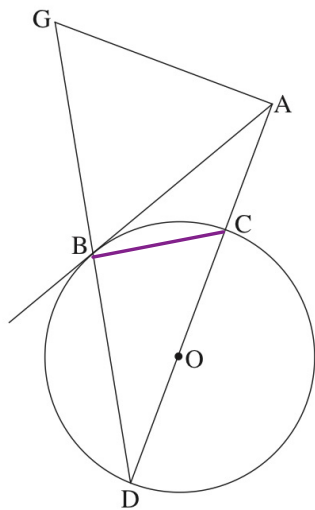
מכיוון שגילוינו של הסתברות מתני  
 שלנו לחשב באופן הבא:

$$P = \frac{P(\text{נבחון קטלום} \rightarrow \text{המשתתפים הראשונים,} \\ \text{הבסק במשחק וביצי' וקרנו במשחק חמישי'})}{P(\text{הבסק אחזק לבחור})}$$

$$P = \frac{\frac{1}{144}}{\frac{4651}{7776}}$$

$$P = \frac{54}{4651} \approx 0.01$$





4. נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.  
 מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:  
 הישר AB משיק למעגל בנקודה B,  
 הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו-D,  
 והישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט).  
 הנקודות B, D ו-G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט.  
 נסמן:  $\angle ADB = \alpha$ .  
 א. הביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות  $\alpha$ .  
 ב. הוכיחו:  $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$ .  
 נתון:  $AG = 5$ ,  $AC = \frac{1}{2}DC$ .  
 ג. חשבו את R.  
 נסמן ב-S את שטח המשולש BDC.  
 ד. (1) הוכיחו:  $\triangle ADG \sim \triangle BDC$ .  
 (2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.

נימוך

לענה

נתון  
 נתון כי  $AG \perp AD$   
 נתון כי AD עובר דרך מרכז המעגל.  
 בני"ע אלה (ובאה קו' סגול בשרטוט)  
 נתון  
 זווית הק'פ' הנשללת של קוטב אבי 3.  
 זווית הנצמד לזוו' ישרה אבי 6.

1. AB נש"ק
2.  $\angle GAD = 90^\circ$
3.  $DC = 2R$  קוטר
4. BC נ"ע
5.  $\angle ADB = \angle$
6.  $\angle DBC = 90^\circ$
7.  $\angle GBC = 90^\circ$



ניחוי  
 ז' (בין) נתון והישר לבי 1,4,5  
 חיסור ז' ו' א' 7,8  
 סכום ז' ו' א' 2,5  
 $\Delta AGD$  ה'ו' 180°

סכום ז' ו' א' 5,10  
 $\Delta ABG$  ה'ו' 180°  
 נ.ל.ל. (א)

ס' ז'ק'ט שווה א'צ'נ'ו  
 נש'ט ק'מ'ו'ן ז' א' 8,12  
 י'ח'ס ז'א'ע'ו' — ה'ת'א'י'ת'ו' — ב'ת'א'ו'ל'י'ם  
 ק'ו'מ'י'ם א' 13

נ.ל.ל. (ב)

נש'ט  
 נש'ט

א'ת'ה

8.  $\angle ABC = \angle ADB = \alpha$

9.  $\angle ABG = 90 - \alpha$

10.  $\angle AGB = 90 - 2\alpha$

11.  $\angle BAG = 2\alpha$

12.  $\angle BAC = \angle BAD$

13.  $\Delta BAC \sim \Delta DAB$

14.  $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$

15.  $AC = \frac{1}{2} DC$

16.  $AG = 5$



נימוך

חישוב לפי 3,15

יחס בועז לנחמיהו בג' שוליים

זוהים לפי 13

מחז' צו"ל שו"ת בהג' שוליים מונחיו

צו"ל שו"ת לפי 9, 10, 16

חיבור קטעים לפי 3,17

הצבה לפי 17-20

חישוב לפי 2

מ.ש.ל. (2)

נימוך

כ"ז זוקל שווה לאצ"מ

לענה

17.  $AC = R$

18.  $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$

19.  $AB = AG = 5$

20.  $AD = 3R$

21.  $\frac{5}{R} = \frac{3R}{5}$

22.  $R = \frac{5}{\sqrt{3}}$

23.  $\angle BDC = 5$

24.  $\angle ADG = \angle BDC$



ני"ן  
א"י 2,6  
משפט קטן 2.5  
א"י 24,25  
מ.ג.ל. (1) (2)

חילוק א"י 20,22

משפט פיתגורס  $\Delta ADG$  א"י 2

חילוק א"י 16,27,28

יחס השטחים של המשולשים דומים  
לזה אריבוע יחס הבצ"ע והתא"מ  
א"י 26

חילוק א"י 29,30

מ.ג.ל. (2) (3)

רא"ה

$$\angle GAD = \angle DBC = 90^\circ \quad 25$$

$$\Delta ADG \sim \Delta BDC \quad 26$$

$$AD = 3R = 5\sqrt{3} \quad 27$$

$$GD^2 = AD^2 + AG^2 \quad 28$$

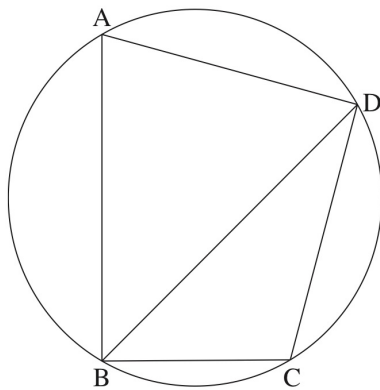
$$GD = 10 \quad 29$$

$$\frac{S_{ADG}}{S_{BDC}} = \left(\frac{GD}{DC}\right)^2 \quad 30$$

$$S_{ADG} = \left(\frac{10}{2.5\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 3 \quad 31$$

$$S_{ADG} = 3 \text{ ש"י}$$





5. מרובע ABCD חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט).

נסמן:  $\angle DAB = \alpha$ , היא זווית חדה.

א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות  $\alpha$  ו-R.

נתון:  $BC = R$ ,  $CD = R\sqrt{2}$ .

ב. חשבו את  $\alpha$ .

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

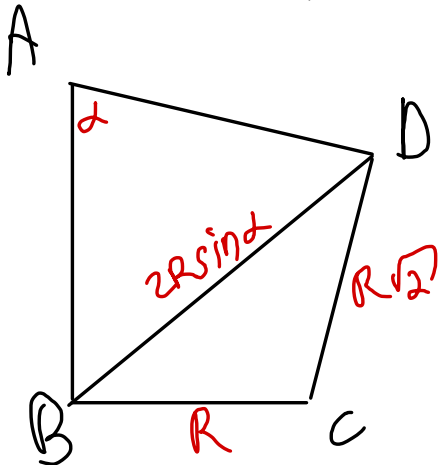
נסמן ב- $h_1$  את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD,

וב- $h_2$  את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את  $\frac{h_1}{h_2}$ .

ע.  $\Delta ABD$  חסום במעגל, נניח  $\alpha$  במלבט הסגורים:

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = 2R \rightarrow BD = 2R \sin \alpha$$



ג. מהוא  $\Delta ABCD$ :

מכיוון שהמרחק חסום במעגל  
כל זווית נגדית לשלמה  $180^\circ$

ולכן  $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$ .

$\Delta BDC$ : מלבט הקוסנוסים

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD$$



$$(2R \sin \alpha)^2 = R^2 + (R\sqrt{2})^2 - 2 \cdot R \cdot R\sqrt{2} \cos(180 - \alpha)$$

$$4R^2 \sin^2 \alpha = 3R^2 - 2\sqrt{2}R^2 (-\cos \alpha) \quad | : R^2$$

$$4 \sin^2 \alpha = 3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$4(1 - \cos^2 \alpha) = 3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$4 - 4\cos^2 \alpha = 3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$0 = 4\cos^2 \alpha + 2\sqrt{2} \cos \alpha - 1$$

נפתור משוואה ריבועית

$$\cos \alpha = 0.2588$$

$$\alpha = 75^\circ$$

$$\cos \alpha = 0.9659$$

~~$$\alpha = 165^\circ$$~~

אם כי ניתן

אך חזרה.





ל. נסמן  $\angle DBC = \angle DBA = \beta$   
 $\triangle BCD$  : נלכח הסנוסים

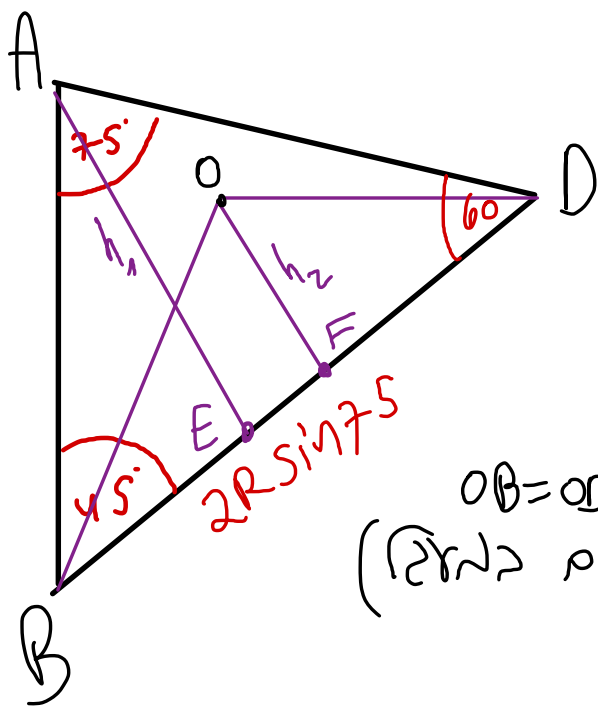
$$\frac{DC}{\sin \beta} = 2R \rightarrow \frac{R\sqrt{2}}{\sin \beta} = 2R \rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta = 45^\circ$$

~~$$\beta = 135^\circ$$~~

$$\angle ABD = 45^\circ$$

(כפי)



?  $\angle BOD = 2\angle BAD = 150^\circ$

צו"מ הרגז' גדולה ב' 2  
 הצו"מ היקפי' הנלצת' על  
 צומק' היקל'

$\triangle BOD$  שווה צדדי -  $OB = OD = R$  (רדיוסים במעגל)

אכן צו"מ הבסיס

$$\angle OBD = \angle ODB = 15^\circ$$



$$\frac{OF}{OD} = \sin 15 \rightarrow h_2 = R \sin 15 \quad : \triangle OFD$$

$$\frac{AD}{\sin 45} = 2R \rightarrow AD = R\sqrt{2} \quad : \triangle ABD$$

$$\frac{AE}{AD} = \sin 60 \rightarrow \frac{h_1}{R\sqrt{2}} = \sin 60 \quad : \triangle ADE$$

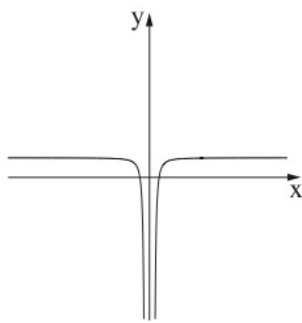
$$h_1 = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{R \sin 15} = 3 + \sqrt{3} = 4.732$$

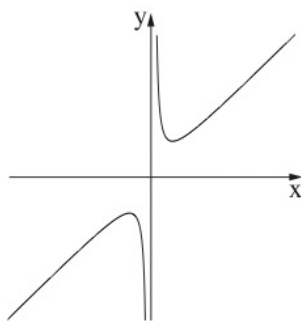


6. נתונה הפונקצייה  $f(x) = 3x + \frac{3}{x}$ .

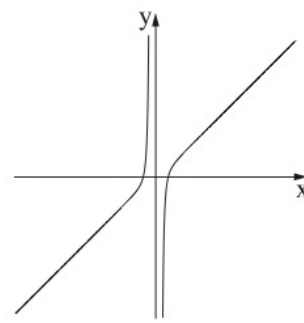
- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .  
 (2) האם הפונקצייה  $f(x)$  היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את התשובה.  
 (3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה  $f(x)$ .
- נתונות שתי פונקציות:  $f'(x)$  ו- $g(x)$ .  
 $f'(x)$  היא פונקציית הנגזרת של  $f(x)$ , ו- $g(x)$  מקיימת  $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ .  
 הפונקציות  $f'(x)$  ו- $g(x)$  מוגדרות באותו התחום כמו הפונקצייה  $f(x)$ .
- ב. כל אחד מן הגרפים III-I שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ו- $g(x)$ .  
 לכל אחת מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.



גרף III



גרף II



גרף I

- ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקצייה  $g(x)$  עם ציר ה- $x$ .  
 ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה  $g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = \frac{1}{6}$  ו- $x = 6$ .  
 ה. נתון:  $1 < a$  הוא פרמטר. חשבו את  $\int_{\frac{1}{a}}^a g(x) dx$ .  
 נתונה הפונקצייה  $h(x) = \int_1^x f'(t) dt$ . נתון כי הפונקצייה  $h(x)$  מוגדרת בתחום  $1 \leq x$ .  
 ו. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה  $h(x)$ , וקבעו את סוגה.

כ. (1)  $x \neq 0$

(2)  $f(-x) = -3x - \frac{3}{x} = -\left(3x + \frac{3}{x}\right)$

$f(-x) = -f(x)$  ז'כן הפונקציה ז'וגית.  
 כי ז'וגית



(3) נלמד את הביטוי הזה

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 : 0 = 3x^2 - 3$$

$$x^2 = 1 \quad \sqrt{\quad}$$

$$x = 1$$

$$x = -1$$

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

$$f'(2) = +$$

$$f'(\frac{1}{2}) = -$$

$$f'(-\frac{1}{2}) = -$$

$$f'(-2) = +$$

סל"ה:  $x < -1$  או  $x > 1$

ר"ה:  $-1 < x < 0$  או  $0 < x < 1$



ב. הגרף היחיד המתאים לתחומי העלייה והירידה

נסעו קודם של הבונקציה  $f(x)$  היו גרף II

ניסו גרף גרף הערכים נסעו קודם, לביה

ניסו לראות כי הגרף המתאים לתחומי

החיובי והשלילי של הבונקציה  $f'(x)$  היו גרף III

ניסו לראות גרף I של גרף  $g(x)$

ז.  $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ ,  $g(x) = 0$

$0 = f(x) \cdot f'(x)$

$(-1, 0)$

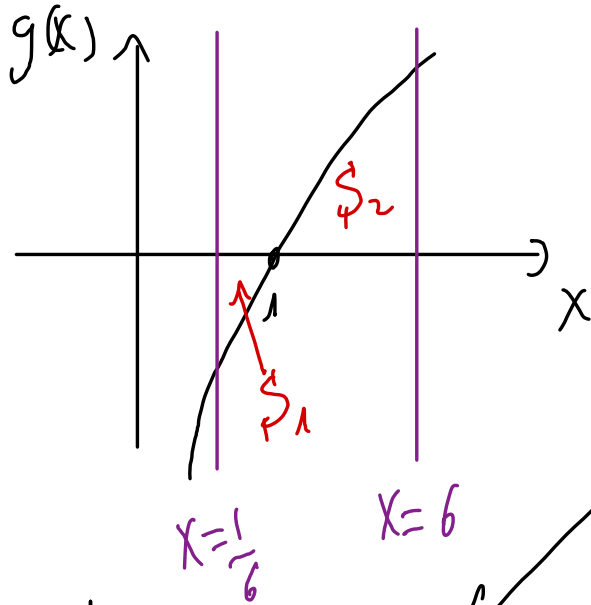
$(1, 0)$

$f(x) = 0$   
לפי גרף II  
אין פתרונות

$f'(x) = 0$   
לפי נסעו 3  
 $x = -1$   $x = 1$



2. ניסו ריטואל חלקי החיובי של  $g(x)$  ו- $g'(x)$



נתלב את שני  
השטחים  $S_1, S_2$

$$\int_{\frac{1}{6}}^1 -f(x) \cdot f'(x) dx + \int_1^6 f(x) \cdot f'(x) dx$$

$$-\left[ \frac{f(x)^2}{2} \right]_{\frac{1}{6}}^1 + \left[ \frac{f(x)^2}{2} \right]_1^6$$

$$-\frac{[f(1)]^2}{2} + \frac{[f(\frac{1}{6})]^2}{2} + \frac{[f(6)]^2}{2} - \frac{[f(1)]^2}{2}$$

$$-18 + 171.125 + 171.125 - 18 = 306.25$$

יחיד



$a > 1$  ה.

$$\frac{1}{a} \int_a^a g(x) dx = \left[ \frac{f(x)^2}{2} \right]_{\frac{1}{a}}^a$$

$$\frac{[f(a)]^2}{2} - \frac{[f(\frac{1}{a})]^2}{2}$$

$$\frac{(3a + \frac{3}{a})^2}{2} - \frac{(3 \cdot \frac{1}{a} + \frac{3}{\frac{1}{a}})^2}{2}$$

$$\frac{(3a + \frac{3}{a})^2}{2} - \frac{(\frac{3}{a} + a)^2}{2} = 0$$



$$h(x) = \int_1^x f'(t) dt \rightarrow h(x) = f(x) - f(1)$$

$$h(x) = f(x) - f(1)$$

$$h'(x) = f'(x) - 0$$

$$0 = f'(x)$$

אם סעיף א' :  $x=1$  (בסל כי)

כאן  $x \geq 1$

מבטאנו כי זהו III הינו הנחה של  $f'(x)$

זכי בק"ג בה  $x=1$  נא  $f'(x)$  אזור התחום שלילי  
אחיובי. נכיון ל-  $f'(x) = f'(x)$  אזור

$x=1$  גם נא אזור התחום

שלילי, אחיובי, כלומר נקודת מינימום.





$$h(1) = f(1) - f(1) = 0$$

נקודת קיצון (1, 0) היא נקודת מינימום.



7. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{2(\cos x)^2 + \sin 2x}{2 \cos x}$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .  
 (2) הסבירו מדוע לפונקצייה  $f(x)$  אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה- $x$ .  
 (3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים.
- ב. (1) הראו כי לכל  $x$  בתחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$  מתקיים:  $f'(x) = \cos x - \sin x$ .  
 (2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.
- ג. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .  
 (2)  $a$  הוא מספר. מצאו את כל ערכי  $a$  שבעבורם יש למשוואה  $f(x) = a$  פתרון יחיד (בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ ).
- ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי שני הישרים  $x = \frac{3}{4}\pi$  ו- $x = \frac{5}{4}\pi$ .

א. (1) נתיים ההגדרה:  $2 \cos x \neq 0$

$\cos x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

ובנתיים הנתיים:  $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

אין נתיים ההגדרה הן

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  או  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$  או  $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$



(2) צבואר צרני  $x$  הנאבסמ אר הוכנה, נכחן  
האם הם אסימטרוטה אנכיים. נבלט אר  
הפונקציה:

$$f(x) = \frac{2(\cos x)^2 + 2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos x}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{2 \cos x} (\cos x + \sin x)}{\cancel{2 \cos x}} = \cos x + \sin x$$

ביטוי של הקבוצה נ"ס להצ'ב אר צרני  $x$   
הנאבסמ אר הוכנה, כלומר נקובר הנקודות  
א' רצ'בו של קו ("חורית") ולא באסימטרוטה.  
צרני ה"חור':

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \quad \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$$



(3) נאם להשתמש בביטוי האבויטט עבור  $f(x)$

בתחום ההלזרה:  $f(x) = \sin x + \cos x$

נק' חיטוק עם צ'ר  $x$ :  $f(x) = 0$

$$0 = \sin x + \cos x \rightarrow \sin x = -\cos x \rightarrow \tan x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

הצטריונו בתחום ההלזרה:  $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$$\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) \quad \left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$$

נק' חיטוק עם צ'ר  $y$ :  $x = 0$

$$f(0) = 1 \quad (0, 1)$$



ב. (1) נמצא את הפונקציה המבוקשת.

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

(2) נצב  $f'(x) = 0$

$$0 = \cos x - \sin x \rightarrow \sin x = \cos x \rightarrow \tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

גבולות בתחום ההלכה:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

ניסו גם בגבולות אחרים ו'לדקו':

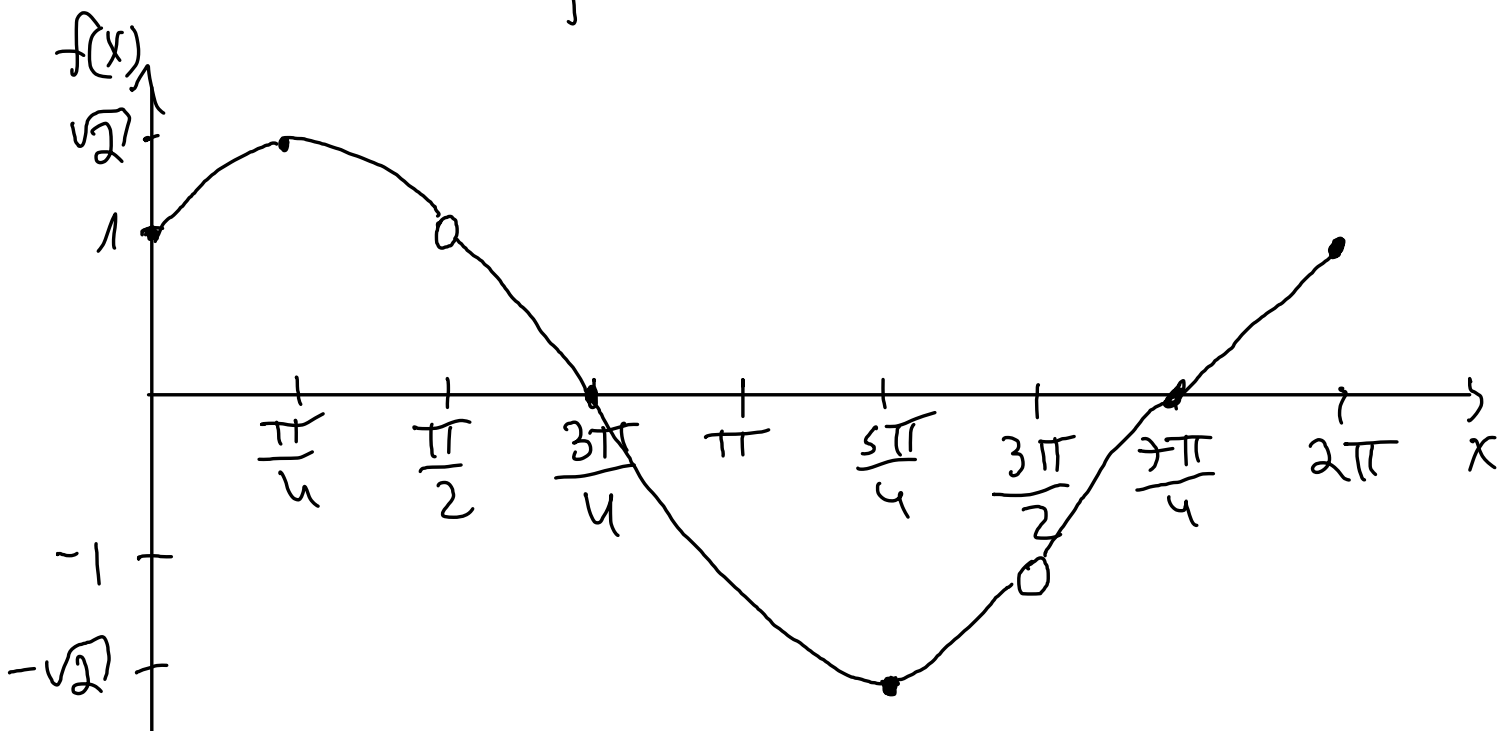
x	$0 < x < \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
$f'(x)$	+	-	-	+	-
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	↘
	$f'(\frac{\pi}{5}) = +$	$f'(\frac{\pi}{3}) = -$	$f'(\pi) = -$	$f'(\frac{5\pi}{3}) = +$	$f'(\frac{7\pi}{4}) = -$



נמצא א שרני  $y$  הנקודות קצה  
תחום ההלכה:  $f(0) = 1$  ,  $f(2\pi) = 1$

נקודות הק' ו"ל:  
 $(0, 1)$  min ,  $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$  max ,  $(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2})$  min ,  $(2\pi, 1)$  max

ג. (ו) נשאלת ל"פ של סעיף התקירה א"כ כה:



נחידע על פסיכומטרי  
 ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
 אל תתפשר עליה.



(2)  $f(x) = \ln|x|$  יש לה המקביל לציר  $x$ .  
 נישאר בקצה מספר קטן ונראה כי יש לה  
 המקביל לציר  $x$  יחידה את הבוטקציה הנקודה  
 אחת בלבד עבור  $a = -1, a = -\sqrt{2}, a = \sqrt{2}$

2. עלינו לחשב את השטח המוגבל על ידי

ואי  $f'$ , ציר  $x$ ,  $x = \frac{5\pi}{4}$ ,  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

בעזרת טבלה השל"ה והירידה מסעיף (2) נ"ן לראות כי בתחום הנ"ל  $f(x)$  שלילי כלומר מתחת לציר  $x$ .

אכן השטח המוגבל לחילוק השטח יהיה:

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} -f(x) dx = -f(x) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$



$$-f\left(\frac{5\pi}{a}\right) + f\left(\frac{3\pi}{a}\right) = 0 + \sqrt{2}$$

הגלגל ה'יין'  $\sqrt{2}$  יח'ר.





8. נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$  ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה  $g(x)$ .

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם גרף הפונקצייה  $g(x)$ .

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה  $f(x)$ , והנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $x$ .

נתון כי שיעור ה- $x$  של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה- $x$  של נקודות החיתוך של הפונקצייה  $f(x)$  עם הפונקצייה  $g(x)$ . נסמן ב- $c$  את שיעור ה- $x$  של הנקודה A.  $c$  הוא פרמטר.

ב. הביעו באמצעות  $c$  את אורך הקטע AB.

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB.

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נמקו את התשובה.

$$f(x) = x^3 \quad g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^3}$$

א. (1) תחום הגדרה:

$$f(x): \text{כל } x$$

$g(x)$ : ניצח שהגדלתי תחת הלוגיקה 'ה'ה

$$x \geq 0$$

$$(2) f(x) = g(x)$$

$$x^3 = \sqrt{x^3} \quad | \cdot (\ )^2 \rightarrow x^6 = x^3 \rightarrow x^6 - x^3 = 0$$



$$x^3(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

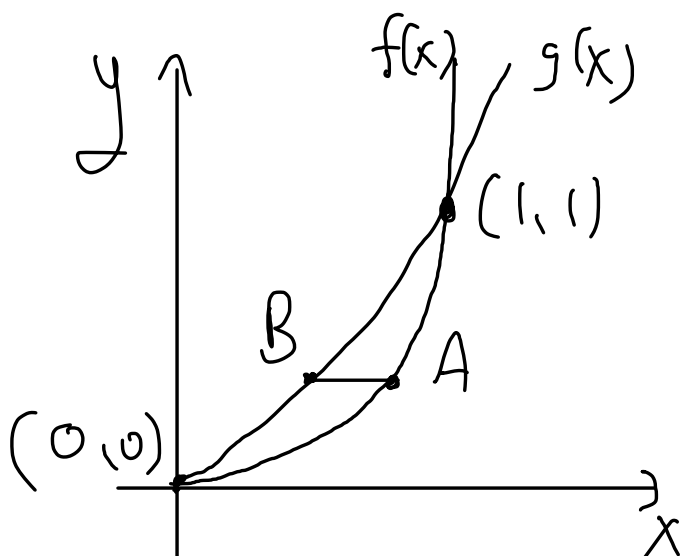
$$(0, 0)$$

$$(1, 1)$$

ג. נניח  $0 < x < 1$  ונבחר נקודה בתחום.

כאן  $f(0.5) < g(0.5)$ , כלומר בתחום זה

$f(x)$  נמוך מ-  $g(x)$ .



$$x_A = c$$

$$A(c, c^3)$$



$y = y_A = c^3 \in X$  מקבלים לצורך  $AB$

נקיט געזאמט  $c \in X_B$  וואס איז  $x_B$  וואס איז  $x$

ש"ל  $y_B = g(x)$

$$c^3 = \sqrt{x^3} \rightarrow c^6 = x^3 \rightarrow x = c^2$$

$B(c^2, c^3)$

אויך  $AB = c - c^2$

$S_{A \circ B} = \frac{1}{2} AB \cdot y_A$

$S(c) = \frac{1}{2} (c - c^2) \cdot c^3 = \frac{1}{2} c^4 - \frac{1}{2} c^5$

$S'(c) = 2c^3 - \frac{5}{2}c^4$  פסל:



$$0 = c^3 \left( 2 - \frac{5}{2}c \right)$$

~~$c = 0$~~

$c = 0.8$

לא קרום

נזכר מקסימום בעזרת נגזרת שלן"ה:

$$S''(c) = 6c^2 - 10c^3$$

$$S''(0.8) = -1.28$$

ואכן עבור  $c = 0.8$  מתקבל שזה מקסימום.

נמצא את השלח"ע הזכה בגזירת  $S(c)$ :

$$S'(0.8) = 0.04096$$

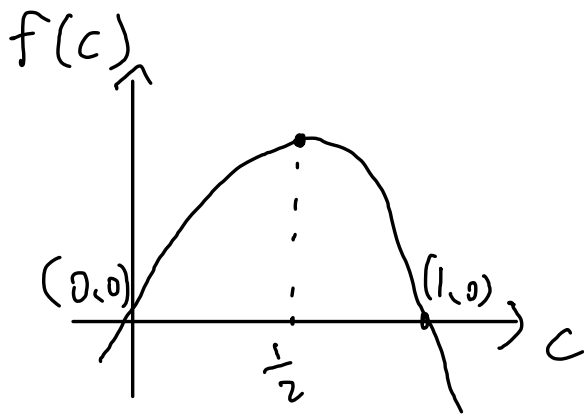
'א



3. נמצא את אורכי הקטעים של AB.

$$f(c) = c - c^2$$

ה"צוג הזרפ של  $f(c)$  הנו ברבול הבונה ששזור ה-א של הקקוק שלה הוא  $\frac{1}{2}$



כלומר אורכי הקטעים של AB מתקבל

עבור  $c = \frac{1}{2}$

ולטחן הקטעים של  $\Delta AOB$  מתקבל

עבור  $c = 0.8$

