פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ב, 2022, גרסה ג' שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

1. a_n היא סדרה **הנדסית**.

נתון: $a_5 = p$, $a_3 = 4p$. p הוא פרמטר.

א. מצאו את מנת הסדרה a_n (שתי אפשרויות).

נתון כי כל איברי הסדרה a_n חיוביים וכי סכום אין־סוף האיברים בסדרה הוא 4 .

ב. מצאו את a_1 , האיבר הראשון בסדרה, ואת p .

b_n היא סדרה **חשבונית** המקיימת: $b_3 = a_3$, $b_1 = a_1$.

בסדרה b_n יש 67 איברים .

ג. מצאו את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה b_n .

א. לפי נוסחת האיבר הכללי בסדרה הנדסית: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_5 = p \Rightarrow a_1q^4 = p$$

$$a_3 = 4p \Rightarrow a_1q^2 = 4p$$

נחלק:

$$\frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1q^4}{a_1q^2} = \frac{p}{4p}$$

$$q^2 = \frac{1}{4} \quad /\sqrt{\ }$$

$$q = \frac{1}{2} \qquad q = -\frac{1}{2}$$

שתי אפשרויות למנת הסדרה: $q = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

ב. נתון כי כל איברי הסדרה חיוביים, מכאן ש: $q = +\frac{1}{2}$.

בנוסף נתון כי: $\underset{\text{אינסוף האיברים}}{S} = 4$

$$\frac{a_1}{1-q} = 4$$

$$\frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

ידוע כי: $a_1q^4=p$, $a_1=2$, $q=\frac{1}{2}$ ולכן:

$$\boxed{p=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}}$$

לסיכום, $a_1=2$, $p=\frac{1}{8}$.

ד. נתון כי b_n סדרה חשבונית בה מתקיים:

$b_1=a_1$, $b_3=a_3$, $n=67$.

$$b_1=a_1 \Downarrow \boxed{b_1=2}$$

$$b_3=a_3 \Downarrow$$

$$b_3=a_1q^2$$

$$b_3=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{b_3=\frac{1}{2}}$$

סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה b_n:

איבר I: b_2.

$$b_3-b_1=2d.$$

$$\frac{1}{2}-2=2d$$

$$-1.5=2d \quad /:2$$

$$-\frac{3}{4}=d$$

$$b_2=b_1+d$$

$$\boxed{b_2=2+\left(-\frac{3}{4}\right)=1.25}$$

הפרש הסכום: $\boxed{2d=2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{2}}$.

מס' האיברים בסכום: $\boxed{\frac{67-1}{2}=\frac{66}{2}=33}$

$$\underset{\text{במקומות זוגיים}}{S_{33}}=\left[2\cdot1.25+(33-1)\cdot(-1.5)\right]\cdot\frac{33}{2}=-750.75$$

סכום האיברים במקומות הזוגיים: -750.75

2. נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא מלבן (ראו ציור).

הזווית החדה בין שני אלכסוני המלבן היא 50°.

גובה הפירמידה הוא SO.

נתון: $SO = AB$, $AB > BC$.

נסמן את אורך הצלע BC ב־ a.

א. הביעו את אורך הצלע AB באמצעות a.

ב. מצאו את גודל הזווית בין מקצוע צדדי לבין בסיס הפירמידה.

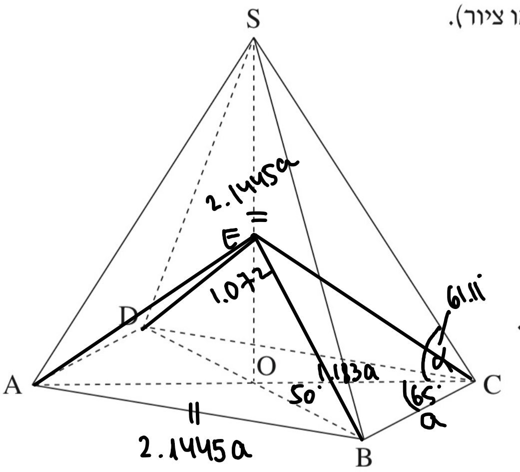
ג. מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle ASC$.

נתון: שטח המשולש ASC הוא 18.

ד. מצאו את a.

הנקודה E היא אמצע הגובה SO.

ה. חשבו את נפח הפירמידה EABCD.



א.

$\triangle BOC$:

$\sphericalangle BOC = 50^{\circ}$

$OC = OB$ אלכסוני המלבן שווים וחוצים זה את זה.

$\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = \frac{180 - 50^{\circ}}{2} = 65^{\circ}$ זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים.

$\triangle ABC$:

$\tan 65^{\circ} = \frac{AB}{a}$

$AB = a \cdot \tan 65^{\circ}$

$AB = 2.1445a$

ב.

$\triangle ABC$:

פיתגורס:

$(2.1445a)^2 + a^2 = AC^2$

$5.598a^2 = AC^2 \quad / \sqrt{\ }$

$2.366a = AC$

$\boxed{OC = \frac{1}{2}AC = 1.183a}$

$\triangle SOC$:

$SO = AB = 2.1445a$

$SO \perp AC \Rightarrow \sphericalangle SOC = 90^{\circ}$

נסמן: $\sphericalangle SCO = \alpha$

$\tan\alpha = \frac{SO}{OC}$

$\tan\alpha = \frac{2.1445\cancel{a}}{1.183\cancel{a}}$

$\tan\alpha = 1.812$

$\boxed{\alpha = 61.11^{\circ}}$

גודל הזווית בין מקצוע לבסיס הפירמידה: 61.11°

ד. $\underline{\Delta SOC}$:

$$\sin(61.11^\circ) = \frac{2.1445a}{SC}$$

$$SC = \frac{2.1445a}{\sin(61.11^\circ)}$$

$$SC = 2.45a$$

כי המקצועות הצדדיים של הפירמידה שווים, לכן: $SA = SC = 2.45a$

$\underline{\Delta ASC}$:

משפט הקוסינוסים:

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2 \cdot SA \cdot SC \cdot \cos(\measuredangle ASC)$$

$$(2.366a)^2 = (2.45a)^2 \cdot 2 - 2 \cdot (2.45a)^2 \cdot \cos(\measuredangle ASC)$$

$$-6.407\cancel{a^2} = -12.005\cancel{a^2} \cdot \cos(\measuredangle ASC)$$

$$0.5336 = \cos(\measuredangle ASC)$$

$$\measuredangle ASC = 57.74^\circ$$

ה. נתון כי: $S_{ASC} = 18$

$$\downarrow$$

$$\frac{SA \cdot SC \cdot \sin(\measuredangle ASC)}{2} = 18$$

$$\frac{(2.45a)^2 \cdot \sin(57.74^\circ)}{2} = 18$$

$$2.537a^2 = 18 \quad /:2.703$$

$$a^2 = 7.092 \quad /\sqrt{\ }$$

$$a = \pm 2.663$$

כיוון ש- a מייצ"ת אורך צלע, $a>0$:

$$a = 2.663$$

ה. נתון: E אמצע SO $\Leftarrow$ $EO = \frac{1}{2} \cdot SO$

$$EO = \frac{1}{2} \cdot 2.1445$$

$$\boxed{EO = 1.07225a}$$

$$\boxed{S_{\substack{\text{מלבן} \\ ABCD}} = 2.1445a \cdot a = 2.1445a^2}$$

$$V_{\substack{\text{פירמידה} \\ EABCD}} = \frac{EO \cdot S_{ABCD}}{3} = \frac{1.07225a \cdot 2.1445a^2}{3}$$

$$V = 0.766a^3$$

מהסעיף הקודם ידוע כי: $a = 2.663$

לכן: $V = 0.766 \cdot (2.663)^3$

$$V = 14.474.$$

נפח הפירמידה EABCD הוא 14.474.

3. נתונה הפונקציה $f(x)=a+\frac{1}{2}\sin(2x)$ המוגדרת בתחום: $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}$.
$a>0$ הוא פרמטר.

א. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש צורך, הביעו באמצעות a).

נתון כי שיעור ה־ y של נקודת המקסימום הפנימית של הפונקציה $f(x)$ הוא 4.5.

ב. מצאו את a.

הציבו $a=4$ וענו על הסעיפים ג–ד.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המינימום הפנימית שלה.

ד. **(1)** מצאו את משוואת המשיק.

(2) מצאו את השטח המוגבל על ידי המשיק, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר $x=-\frac{\pi}{3}$, ועל ידי ציר ה־ y.

א.

$$f'(x)=0+\frac{1}{2}\cdot 2\cos(2x)$$

$$f'(x)=\cos(2x)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \cos(2x)=0$$

$$\cos(2x)=\cos(90^\circ)$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \qquad 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi k \qquad x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$$

k	x
0	$\frac{\pi}{4}$
1	לא בתחום
-1	לא בתחום

k	x
0	$-\frac{\pi}{4}$
1	לא בתחום
-1	לא בתחום

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a+\frac{1}{2}\sin(2\cdot 45^\circ)=a+\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4},\ a+\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=a+\frac{1}{2}\sin[2\cdot(-45)]=a-\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{4},\ a-\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)= a+\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot 60^\circ) = a+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = a+\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{3}, a+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)= a+\frac{1}{2}\cdot\sin[2\cdot(-60^\circ)] = a+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a-\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{3}, a-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

x	$-\frac{\pi}{3}$	(-50°) $\left(-\frac{5\pi}{18}\right)$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	(50°) $\left(\frac{5}{18}\pi\right)$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↓		↑		↓	

$$f'\left(-\frac{5\pi}{18}\right)= \cos[2\cdot(-50^\circ)] = \ominus$$

$$f'(0) = \cos(2\cdot 0) = \oplus$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{18}\right)= \cos(2\cdot 50^\circ) = \ominus$$

נקודות הקיצון בפונקציה $f(x)$:

קצה max $\left(-\frac{\pi}{3}, a-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

min $\left(-\frac{\pi}{4}, a-\frac{1}{2}\right)$

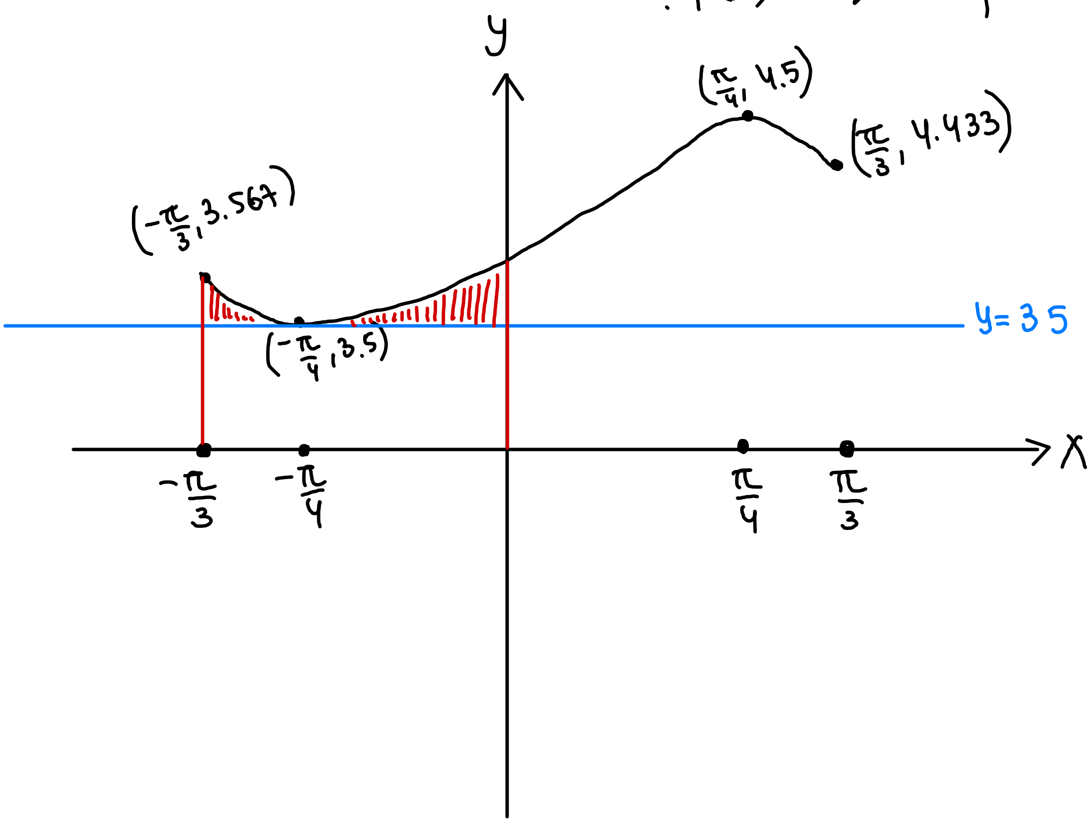
max $\left(\frac{\pi}{4}, a+\frac{1}{2}\right)$

קצה min $\left(\frac{\pi}{3}, a+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

ב. נתון: $a+\frac{1}{2}=4.5$

$a=4$

ג. סקיצה של $f(x)$:



ד. (1) כאשר מעבירים משיק בנקודת קיצון פנימי, שיפוע המשיק שווה ל-0.
המשיק עובר בנקודה $(-\frac{\pi}{4},3.5)$ ולכן משוואתו: $y=3.5$.

משוואת המשיק: $y=3.5$.

(2) השטח המבוקש - מסומן בכתום בשרטוט.

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\left(4+\tfrac{1}{2}\sin(2x)-3.5\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sin(2x)\right]dx=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{-\cos 2x}{2}\Bigg]_{-\frac{\pi}{3}}^{0}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\cdot 0-\frac{\cos(2\cdot 0)}{4}\right)-\left(\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)-\frac{\cos(-120^\circ)}{4}\right)=-\tfrac{1}{4}-\left(-\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{1}{8}\right)$$

$$=-\frac{3}{8}+\frac{\pi}{6}=0.1486.$$

גודל השטח המבוקש: 0.1486.

4. נתונה הפונקציה $f(x)=(4-3x)\cdot e^{3x}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

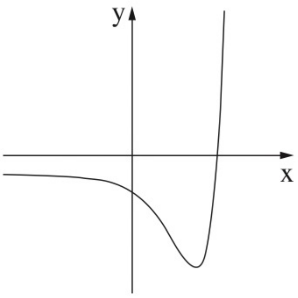
(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

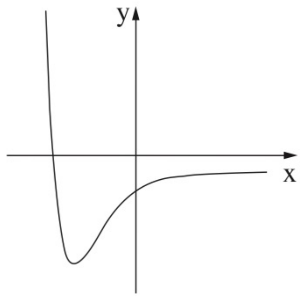
נתונה הפונקציה $g(x)=-2\cdot f(x)-3$.

ה. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

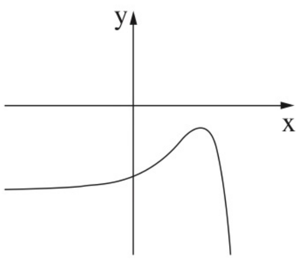
(2) אחד מן הגרפים I–III שלפניכם מתאר את גרף הפונקציה $g(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



III



II



I

א. תחום הגדרה: כל x.

ב. חיתוך עם ציר x $(y=0)$:

$(4-3x)\cdot e^{3x}=0$

$4-3x=0$

$4=3x$

$1\frac{1}{3}=x$

$\boxed{(1\frac{1}{3},0)}$

$e^{3x}=0$

אין פתרון. ביטוי מעריכי שבסיסו e תמיד חיובי.

חיתוך עם ציר y $(x=0)$:

$f(0)=(4-3\cdot 0)\cdot e^{3\cdot 0}$

$f(0)=4\cdot e^{0}=4$

$\boxed{(0,4)}$

נקודות החיתוך עם הצירים:

$(1\frac{1}{3},0)$, $(0,4)$

ב. (1)

$$f'(x) = -3\cdot e^{3x} + 3e^{3x}\cdot(4-3x)$$

$$f'(x) = 0$$

$$-3e^{3x} + 3e^{3x}(4-3x) = 0$$

$$e^{3x}\left[-3+3(4-3x)\right] = 0$$

$$e^{3x} = 0$$

אין פתרון

$$-3+12-9x=0$$

$$9 = 9x$$

$$\boxed{1 = x}$$

$$f(1) = (4-3\cdot 1)\cdot e^{3\cdot 1}$$

$$\boxed{f(1) = e^3}$$

שיעורי נקודת הקיצון: $(1, e^3)$.

סוג הקיצון:

x	(0)	1	(2)
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^3	$\searrow$

$$f'(x) = e^{3x}(9-9x)$$

$$f'(0) = e^{3\cdot 0}\cdot(9-9\cdot 0) = \oplus$$

$$f'(2) = e^{3\cdot 2}\cdot(9-9\cdot 2) = \ominus$$

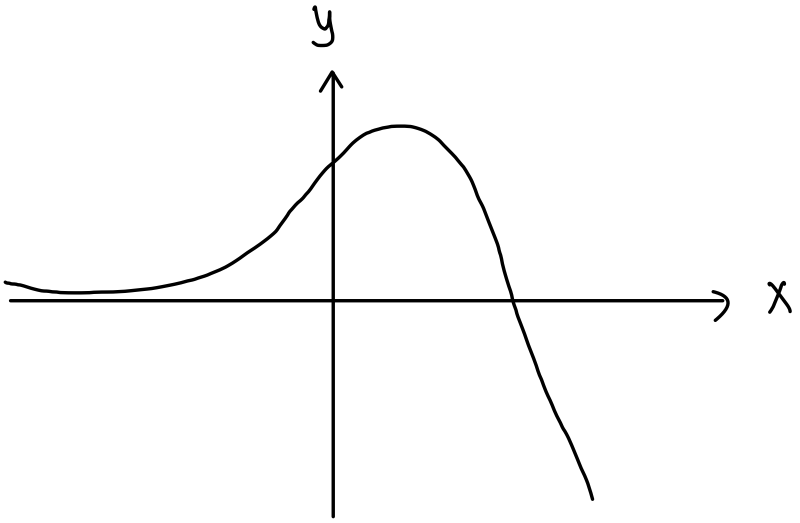
נקודת הקיצון וסוגה: $(1, e^3)$, מקסימום.

(2) על פי טבלת העלייה וירידה:

תחומי עלייה: $x<1$

תחומי ירידה: $x>1$

ג. סקיצה של $f(x)$:



ה. $g(x) = -2\cdot f(x) - 3$

(1) $g'(x) = -2\cdot f'(x)$

כשנשווה את $g'(x)$ ל-0, נקבל את אותו שיעור x של נקודת הקיצון של $f(x)$.
נמצא את שיעור ה-y המתאים:

$$g(1) = -2\cdot f(1) - 3$$

$$f(1) = e^3$$

$$g(1) = -2e^3 - 3$$

הנקודה היא נקודת מינימום, כיוון שהפונקציה $f(x)$ מוכפלת במספר שלילי, כך שתחומי העלייה והירידה מתהפכים.

לסיכום, נקודת הקיצון של $g(x)$ היא: $(1, -2e^3-3)$, מינימום.

(2) גרף I - מתאר נקודת מקסימום ולכן נפסל.

גרף II - מתאר נקודת מינימום, אך מיקומה ברביע השלישי, ולא ברביע הרביעי.

גרף III - מתאים בסוג הקיצון ובמיקום הנקודה ברביע IV.

הגרף שמתאר את הפונקציה $g(x)$ הוא גרף III.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x \cdot (\ell n x)^2$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

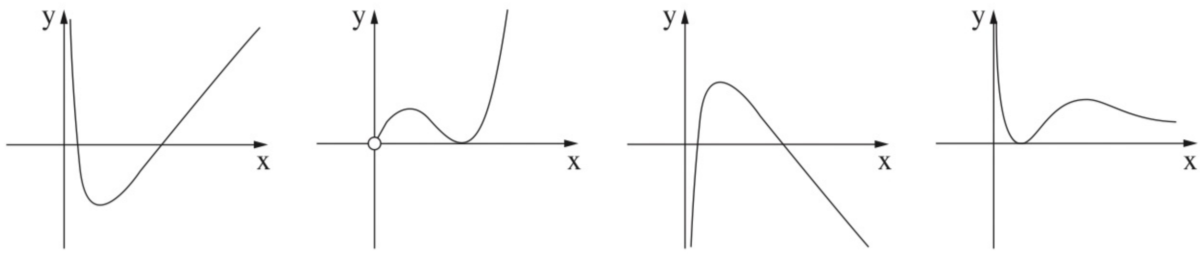
ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. הסבירו מדוע מתקיים: $f(x) \geq 0$ בעבור כל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. אחד מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$ ואחד מהם מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

קבעו איזה מהם מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$ ואיזה מהם מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ונמקו את קביעותיכם.

ה. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ועל ידי ציר ה־ x .



IV III II I

א. תחום הגדרה: $x>0$.

ב. נקודות הקיצון:

$$f'(x) = 1\cdot(\ln x)^2 + \frac{x\cdot 2\ln x}{x}$$

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x$$

$$f'(x) = 0$$

$$(\ln x)^2 + 2\ln x = 0$$

$$\ln x(\ln x + 2) = 0$$

$$\ln x = 0$$
$$x = 1$$

$$\ln x + 2 = 0$$
$$\ln x = -2$$
$$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$f(1) = 1 \cdot (\ln 1)^2 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} \cdot \left(\ln \frac{1}{e^2}\right)^2 = \frac{4}{e^2}.$$

שיעורי הנקודות:

$$(1,0), \left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$$

סוגן:

x	0	(0.1)	$\frac{1}{e^2}$	(0.5)	1	(2)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f'(0.1) = (\ln(0.1))^2 + 2\ln(0.1) = +$$

$$f'(0.5) = (\ln(0.5))^2 + 2\ln(0.5) = -$$

$$f'(2) = (\ln 2)^2 + 2\ln(2) = +$$

נקודות הקיצון וסוגן:

$(1,0)$ min

$\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$ max

ד. נקודת המינימום היחידה של הפונקציה נמצאת ב- $(1,0)$, כאשר $y=0$.
מכיון שהנקודה הנמוכה ביותר בפונקציה נמצאת על ציר ה- x.
לכן כל שיעורי ה- y של הפונקציה מקיימים את התנאי: $f(x) \geq 0$.

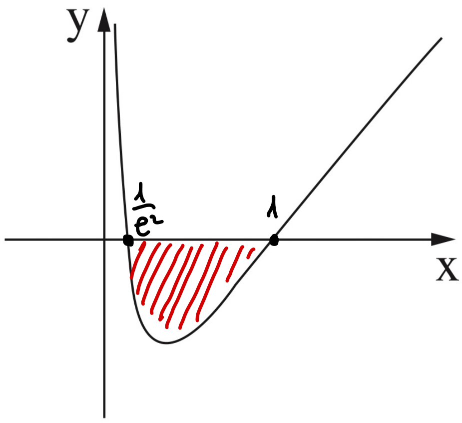
ג. גרף III - $f(x)$. מאחר שתי נקודות קיצון במיקומים נכונים -
min $(1,0)$ ו- max $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$.

גרף IV - $f'(x)$ זהו הגרף היחיד שמקיים את תנאי הנגזרת $f'(x)$:

* נק' חיתוך עם ציר x: $\left(\frac{1}{e^2}, 0\right), (1,0)$.
* תחומי חיוביות: $x>1$, $x<\frac{1}{e^2}$.
* תחומי שליליות: $\frac{1}{e^2}<x<1$.

ניתן להיעזר בטבלת העלייה-ירידה מהסעיף הקודם.

ה. השטח המבוקש מסומן בקווים:



$$S = \int_{\frac{1}{e^2}}^{1} \left[0 - f'(x)\right] dx = \left[-f(x)\right]_{\frac{1}{e^2}}^{1}$$

$$-f(1) - \left[-f\left(\frac{1}{e^2}\right)\right] =$$

$$-0 + \frac{4}{e^2} = \frac{4}{e^2}.$$

גודל השטח המבוקש: $\frac{4}{e^2}$.