פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ב, 2022, גרסה א' שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

.1 a_n היא סדרה **הנדסית**.

נתון: $a_5 = t$, $a_3 = 4t$. t הוא פרמטר.

א. מצאו את מנת הסדרה a_n (שתי אפשרויות).

נתון כי כל איברי הסדרה a_n חיוביים וכי סכום אין־סוף האיברים בסדרה הוא 4 .

ב. מצאו את a_1 , האיבר הראשון בסדרה, ואת t .

b_n היא סדרה **חשבונית** המקיימת: $b_1 = a_1$, $b_3 = a_3$.

בסדרה b_n יש 63 איברים.

ג. מצאו את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה b_n .

א. לפי נוסחת האיבר הכללי בסדרה הנדסית: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_5 = t \Rightarrow a_1 q^4 = t$$
$$a_3 = 4t \Rightarrow a_1 q^2 = 4t$$

נחלק:

$$\frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1 q^4}{a_1 q^2} = \frac{t}{4t}$$

$$q^2 = \frac{1}{4} \quad / \sqrt{\ }$$

$$q = \frac{1}{2} \qquad q = -\frac{1}{2}$$

שתי אפשרויות למנת הסדרה: $q = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

ב. נתון כי כל איברי הסדרה חיוביים, מכאן ש: $q = +\frac{1}{2}$.

בנוסף נתון כי: $\underset{\text{אינסוף האיברים}}{S} = 4$

$$\frac{a_1}{1-q} = 4$$

$$\frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

ידוע כי: $a_1 q^4 = t$, $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{2}$ ולכן:

$$\boxed{t = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}}$$

לסיכום, $a_1 = 2$, $t = \frac{1}{8}$.

ג. נתון כי b_n סדרה חשבונית בה מתקיים:

$b_1 = a_1$, $b_3 = a_3$, $n = 63$.

$b_1 = a_1 \Rightarrow \boxed{b_1 = 2}$

$$b_3 = a_3 \Rightarrow b_3 = a_1 q^2$$

$$b_3 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{b_3 = \frac{1}{2}}$$

סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה b_n :

איבר I: b_2 .

$$b_3 - b_1 = 2d .$$

$$\frac{1}{2} - 2 = 2d$$

$$-1.5 = 2d \quad /:2$$

$$-\frac{3}{4} = d$$

$$b_2 = b_1 + d$$

$$\boxed{b_2 = 2 + \left(-\frac{3}{4}\right) = 1.25}$$

הפרש הסכום: $\boxed{2d = 2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}}$.

מס' האיברים בסכום: $\boxed{\frac{63-1}{2} = \frac{62}{2} = 31}$

$$\underset{\text{במקומות הזוגיים}}{S_{31}} = \left[2\cdot 1.25 + (31-1)\cdot(-1.5)\right]\cdot\frac{31}{2} = -658.75$$

סכום האיברים במקומות הזוגיים: -658.75 .

.2 נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא מלבן (ראו ציור).
הזווית החדה בין שני אלכסוני המלבן היא 40°.
גובה הפירמידה הוא SO.
נתון: $SO = AB$, $AB > BC$.
נסמן את אורך הצלע BC ב־ a.

א. הביעו את אורך הצלע AB באמצעות a.

ב. מצאו את גודל הזווית בין מקצוע צדדי לבין בסיס הפירמידה.

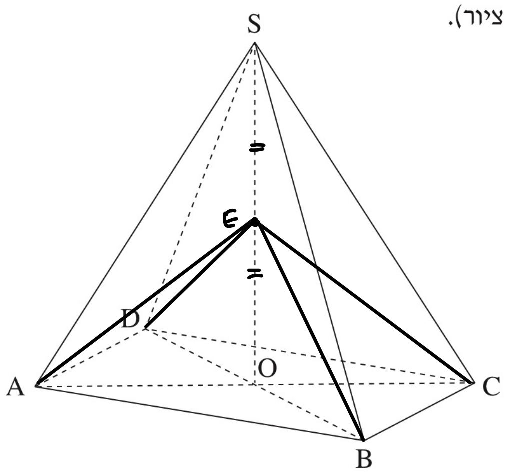
ג. מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle ASC$.

נתון: שטח המשולש ASC הוא 14.

ד. מצאו את a.

הנקודה E היא אמצע הגובה SO.

ה. חשבו את נפח הפירמידה EABCD.



א. $\triangle BOC$:

$\sphericalangle BOC = 40^{\circ}$

$OC = OB$ אלכסוני המלבן שווים וחוצים זה את זה.

$\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = \frac{180^{\circ}-40^{\circ}}{2} = 70^{\circ}$ זוויות בבסיס במשולש שווה שוקיים.

$\triangle ABC$:

$\tan 70^{\circ} = \frac{AB}{a}$

$AB = a \cdot \tan 70^{\circ}$

$AB = 2.747a$

ב. $\triangle ABC$:

פיתגורס :

$(2.747a)^2 + a^2 = AC^2$

$8.548a^2 = AC^2 \quad /\sqrt{}$

$2.923a = AC$

$\boxed{OC = \frac{1}{2}AC = 1.462a}$

$\triangle SOC$:

$SO = AB = 2.747a$

$SO \perp AC \Rightarrow \sphericalangle SOC = 90^{\circ}$

נסמן: $\sphericalangle SCO = \alpha$

$\tan\alpha = \frac{SO}{OC}$

$\tan\alpha = \frac{2.747\cancel{a}}{1.462\cancel{a}}$

$\tan\alpha = 1.879$

$\boxed{\alpha = 61.98^{\circ}}$

גודל הזווית בין מקצוע צדדי
ובסיס הפירמידה: 61.98°.

ב. ΔSOC:

$$\sin(61.98^\circ) = \frac{2.747a}{SC}$$

$$SC = \frac{2.747a}{\sin(61.98^\circ)}$$

$$SC = 3.11a$$

כי המקצועות הצדדיים של הפירמידה שווים, לכן: $SA = SC = 3.11a$

ΔASC:

משפט הקוסינוסים:

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2 \cdot SA \cdot SC \cdot \cos(\measuredangle ASC)$$

$$(2.923a)^2 = (3.11a)^2 \cdot 2 - 2 \cdot (3.11a)^2 \cdot \cos(\measuredangle ASC)$$

$$-10.8\cancel{a^2} = -19.3442\cancel{a^2} \cdot \cos(\measuredangle ASC)$$

$$0.558 = \cos(\measuredangle ASC)$$

$$\measuredangle ASC = 56.061^\circ$$

ג. נתון כי: $S_{ASC} = 14$

$$\downarrow$$

$$\frac{SA \cdot SC \cdot \sin(\measuredangle ASC)}{2} = 14$$

$$\frac{(3.11a)^2 \cdot \sin(56.061^\circ)}{2} = 14$$

$$4.012a^2 = 14 \quad /:4.012$$

$$a^2 = 3.489 \quad /\sqrt{\ }$$

$$a = \pm 1.868$$

כיוון ש-a מייצגת אורך צלע, לכן:

$$a = 1.868$$

ה. נתון: E אמצע SO $\Leftarrow$ $EO = \frac{1}{2} \cdot SO$

$EO = \frac{1}{2} \cdot 2.747a$

$\boxed{EO = 1.3735a}$

$\boxed{S_{\text{מלבן } ABCD} = 2.747a \cdot a = 2.747a^2}$

$V_{\text{פירמידה } EABCD} = \frac{EO \cdot S_{ABCD}}{3} = \frac{1.3735a \cdot 2.747a^2}{3}$

$V = 1.257a^3$

מהסעיף הקודם ידוע כי: $a = 1.868$

לכן: $V = 1.257 \cdot (1.868)^3$

$V = 8.197$

נפח הפירמידה EABCD הוא 8.197.

.3 נתונה הפונקצייה $f(x)=a+\frac{1}{2}\sin(2x)$ המוגדרת בתחום: $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}$.
$a>0$ הוא פרמטר.

א. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש צורך, הביעו באמצעות a).

נתון כי שיעור ה־ y של נקודת המקסימום הפנימית של הפונקצייה $f(x)$ הוא 3.5 .

ב. מצאו את a .

הציבו $a=3$ וענו על הסעיפים ג–ד.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

מעבירים משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודת המינימום הפנימית שלה.

ד. **(1)** מצאו את משוואת המשיק.

(2) מצאו את השטח המוגבל על ידי המשיק, על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי הישר $x=-\frac{\pi}{3}$,
ועל ידי ציר ה־ y .

א.

$$f'(x)=0+\frac{1}{2}\cdot 2\cos(2x)$$

$$f'(x)=\cos(2x)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \cos(2x)=0$$

$$\cos(2x)=\cos(90^\circ)$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \qquad 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi k \qquad x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$$

k	x
0	$\frac{\pi}{4}$
1	לא בתחום
-1	לא בתחום

k	x
0	$-\frac{\pi}{4}$
1	לא בתחום
-1	לא בתחום

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a+\frac{1}{2}\sin(2\cdot 45^\circ)=a+\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, a+\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=a+\frac{1}{2}\sin[2\cdot(-45)]=a-\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}, a-\frac{1}{2}\right)$$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)= a+\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot 60^\circ) = a+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = a+\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{3}, a+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)= a+\frac{1}{2}\cdot\sin[2\cdot(-60^\circ)] = a+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a-\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{3}, a-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

x	$-\frac{\pi}{3}$	(-50°) $\left(-\frac{5\pi}{18}\right)$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	(50°) $\left(\frac{5}{18}\pi\right)$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↓		↑		↓	

$f'\left(-\frac{5\pi}{18}\right) = \cos[2\cdot(-50^\circ)] = -$

$f'(0) = \cos(2\cdot 0) = +$

$f'\left(\frac{5\pi}{18}\right) = \cos(2\cdot 50^\circ) = -$

נקודות הקיצון בפונקציה $f(x)$:

קצה max $\left(-\frac{\pi}{3}, a-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

min $\left(-\frac{\pi}{4}, a-\frac{1}{2}\right)$

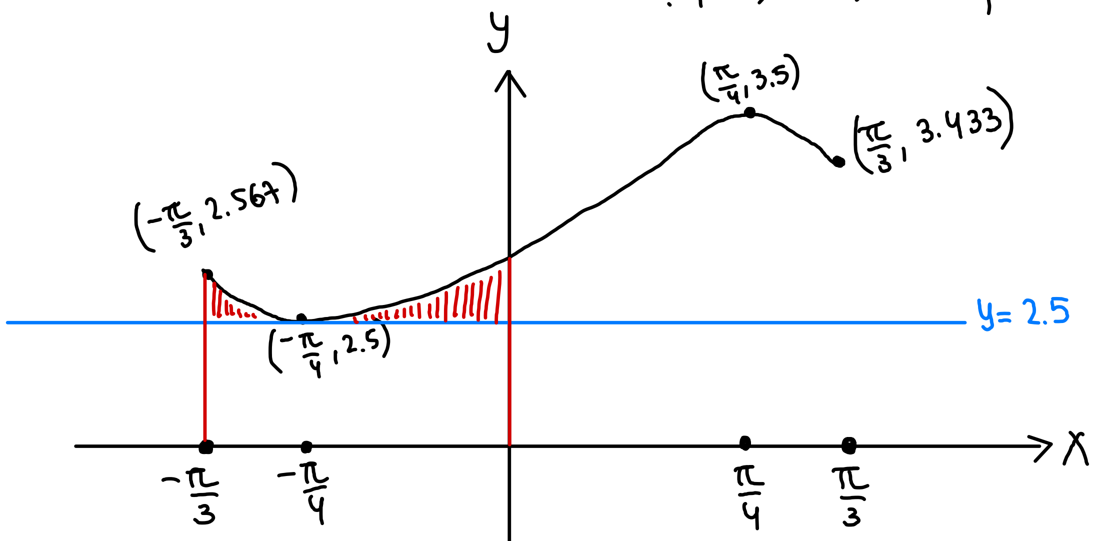
max $\left(\frac{\pi}{4}, a+\frac{1}{2}\right)$

קצה min $\left(\frac{\pi}{3}, a+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

ב. נתון: $a+\frac{1}{2}=3.5$

$a=3$

ג. סקיצה של $f(x)$:



ד. (1) כאשר מעבירים משיק בנקודת קיצון פנימי, שיפוע המשיק שווה ל-0.
המשיק עובר בנקודה $(-\frac{\pi}{4}, 2.5)$ ולכן משוואתו: $y=2.5$.

משוואת המשיק: $y=2.5$.

(2) השטח המבוקש - מסומן בארגמן בשרטוט.

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\left(3+\frac{1}{2}\sin(2x)-2.5\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2x)\right]dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos 2x}{2}\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{0}$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{\cos(2\cdot 0)}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\cos(-120^\circ)}{4}\right)=-\frac{1}{4}-\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}\right)$$

$$=-\frac{3}{8}+\frac{\pi}{6}=0.1486.$$

שטח השטח המבוקש: 0.1486.

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = (4 - 3x) \cdot e^{3x}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$?

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

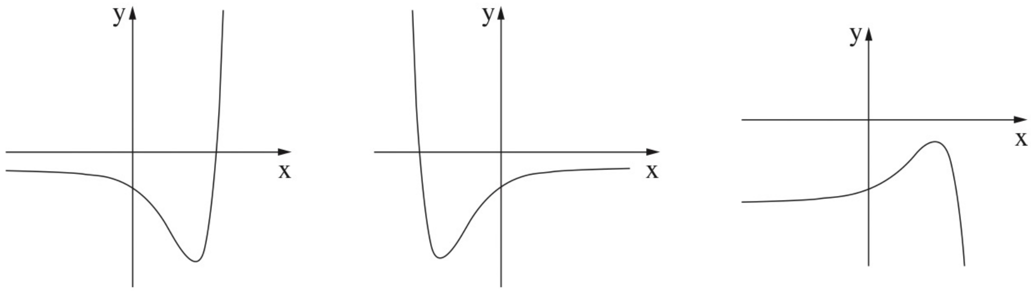
(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = -2 \cdot f(x) - 1$.

ה. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) אחד מן הגרפים I–III שלפניכם מתאר את גרף הפונקצייה $g(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



III II I

א. תחום הגדרה: כל x.

ב. חיתוך עם ציר x $(y=0)$:

$$(4-3x) \cdot e^{3x} = 0$$

$4-3x=0$

$4=3x$

$1\frac{1}{3}=x$

$\boxed{(1\frac{1}{3},0)}$

$e^{3x}=0$

אין פתרון.
ביטוי מעריכי
שבסיסו e
תמיד חיובי.

חיתוך עם ציר y $(x=0)$:

$f(0) = (4-3\cdot 0)\cdot e^{3\cdot 0}$

$f(0) = 4\cdot e^{0} = 4$

$\boxed{(0,4)}$

נקודות החיתוך עם הצירים:

$(1\frac{1}{3},0)$, $(0,4)$

ג. (1)

$$f'(x) = -3\cdot e^{3x} + 3e^{3x}\cdot(4-3x)$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-3e^{3x} + 3e^{3x}(4-3x) = 0$$

$$e^{3x}\left[-3+3(4-3x)\right] = 0$$

$e^{3x} = 0$
אין פתרון

$$-3+12-9x=0$$

$$9 = 9x$$

$$\boxed{1 = x}$$

$$f(1) = (4-3\cdot 1)\cdot e^{3\cdot 1}$$

$$\boxed{f(1) = e^3}$$

שיעורי נקודת הקיצון: $(1, e^3)$.

סוג הקיצון:

x	(0)	1	(2)
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^3	$\searrow$

$$f'(x) = e^{3x}(9-9x)$$

$$f'(0) = e^{3\cdot 0}\cdot(9-9\cdot 0) = \oplus$$

$$f'(2) = e^{3\cdot 2}\cdot(9-9\cdot 2) = \ominus$$

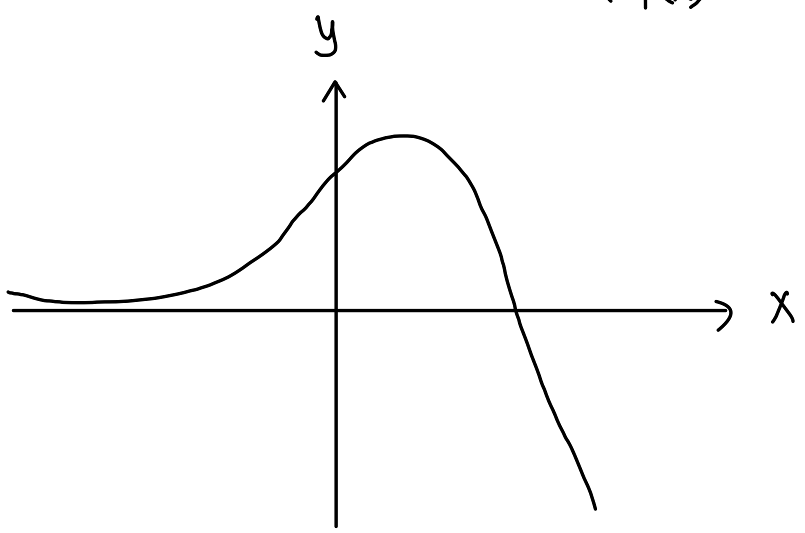
נקודת הקיצון וסוגה: $(1, e^3)$, מקסימום.

(2) על פי טבלת העלייה וירידה:

תחומי עלייה: $x<1$

תחומי ירידה: $x>1$

ג. סקיצה של $f(x)$:



ה. $g(x) = -2\cdot f(x) - 1$

(1) $g'(x) = -2\cdot f'(x)$

כשנשווה את $g'(x)$ ל-0, נקבל את אותו שיעור x של נקודת הקיצון של $f(x)$.
נמצא את שיעור ה-y המתאים:

$$g(1) = -2\cdot f(1) - 1$$

$$f(1) = e^3$$

$$g(1) = -2e^3 - 1$$

הנקודה היא נקודת מינימום, כיוון שהפונקציה $f(x)$ מוכפלת במספר שלילי, כך שתחומי העליה והירידה מתהפכים.

לסיכום, נקודת הקיצון של $g(x)$ היא: $(1,-2e^3-1)$, מינימום.

(2) גרף I - מתאר נקודת מקסימום ולכן נפסל.

גרף II - מתאר נקודת מינימום, אך מיקומה ברביע השלישי, ולא ברביע הרביעי.

גרף III - מתאים בסוג הקיצון ובמיקום הנקודה ברביע IV.

הגרף שמתאר את הפונקציה $g(x)$ הוא גרף III.

5. נתונה הפונקציה $f(x)=x\cdot(\ell nx)^2$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

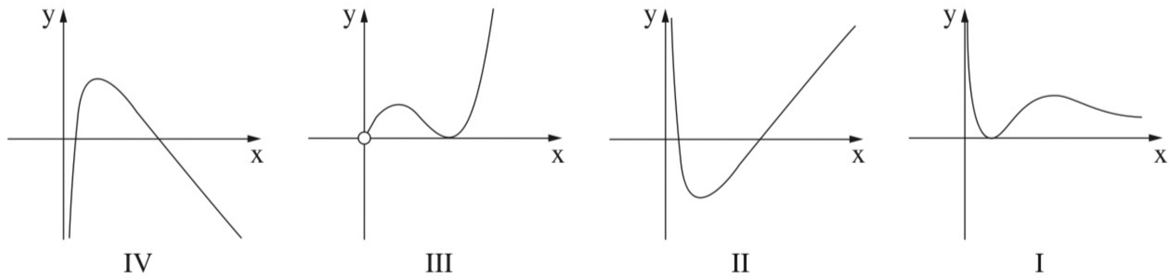
ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. הסבירו מדוע מתקיים: $f(x)\geq 0$ בעבור כל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. אחד מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$ ואחד מהם מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

קבעו איזה מהם מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$ ואיזה מהם מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ונמקו את קביעותיכם.

ה. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ועל ידי ציר ה־ x .



א. תחום הגדרה: $x>0$.

ב. נקודות הקיצון:

$$f'(x)=1\cdot(\ln x)^2+\frac{x\cdot 2\ln x}{x}$$

$$f'(x)=(\ln x)^2+2\ln x$$

$$f'(x)=0$$

$$(\ln x)^2+2\ln x=0$$

$$\ln x(\ln x+2)=0$$

$$\ln x=0$$
$$x=1$$

$$\ln x+2=0$$
$$\ln x=-2$$
$$x=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

$$f(1) = 1\cdot(\ln 1)^2 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2}\cdot\left(\ln \frac{1}{e^2}\right)^2 = \frac{4}{e^2}.$$

שיעורי הנקודות:

$$(1,0),\ \left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$$

סימן:

x	0	(0.1)	$\frac{1}{e^2}$	(0.5)	1	(2)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f'(0.1) = (\ln(0.1))^2 + 2\ln(0.1) = +$$

$$f'(0.5) = (\ln(0.5))^2 + 2\ln(0.5) = -$$

$$f'(2) = (\ln 2)^2 + 2\ln(2) = +$$

נקודות הקיצון וסוגן:

$(1,0)$ min

$\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$ max

ד. נקודת המינימום היחידה של הפונקציה נמצאת ב- $(1,0)$, כאשר $y=0$.
מכאן שהנקודה הנמוכה ביותר בפונקציה נמצאת על ציר ה- x.
לכן כל שיעורי ה- y של הפונקציה מקיימים את התנאי: $f(x)\ge 0$.

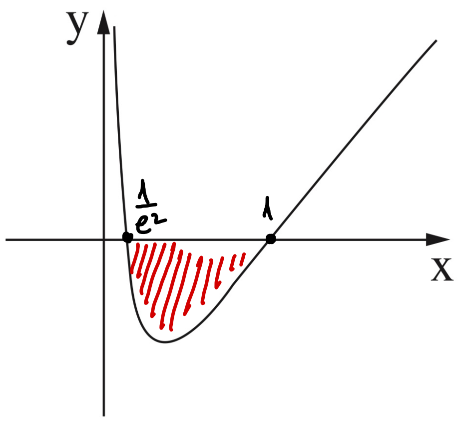
ג. גרף III - $f(x)$. מכוון שתי נקודות קיצון במיקומים נכונים -
min $(1,0)$ ו- max $\left(\frac{1}{e^2},\frac{4}{e^2}\right)$.

גרף II - $f'(x)$. זהו הגרף היחיד שמקיים את תנאי הנגזרת $f'(x)$:

* נק' חיתוך עם ציר x: $\left(\frac{1}{e^2},0\right)$, $(1,0)$.
* תחומי חיוביות: $x<\frac{1}{e^2}$, $x>1$.
* תחומי שליליות: $\frac{1}{e^2}<x<1$.

ניתן להיעזר בטבלת העליה-ירידה מהסעיף הקודם.

ה. השטח המבוקש מסומן בגרף:



II

$$S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{1}\left[0-f'(x)\right]dx=\Big[-f(x)\Big]_{\frac{1}{e^2}}^{1}$$

$$-f(1)-\left[-f\left(\frac{1}{e^2}\right)\right]=$$

$$-0+\frac{4}{e^2}=\frac{4}{e^2}.$$

סופית השטח המבוקש: $\frac{4}{e^2}$.