

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ב, 2022, גרסה ג' שאלון: 35481

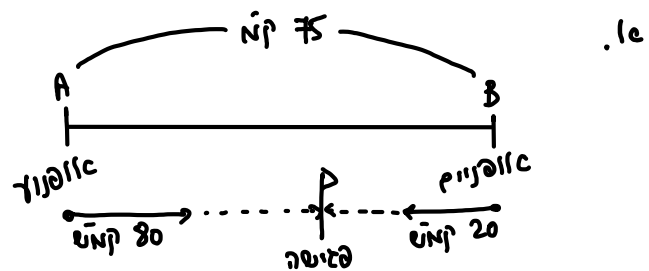
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. המרחק בין עיר A לעיר B הוא 75 ק"מ.
 רוכב אופנוע יצא מעיר A לכיוון עיר B.
 באותו הזמן יצא רוכב אופניים מעיר B לכיוון עיר A.
 שני הרוכבים רכבו באותו המסלול.
 רוכב האופנוע רכב במהירות קבועה של 80 קמ"ש. רוכב האופניים רכב במהירות קבועה של 20 קמ"ש.
 א. כעבור כמה זמן מרגע יציאתם לדרך, נפגשו רוכב האופנוע ורוכב האופניים?
 ב. רוכב האופנוע הגיע לעיר B ומייד התחיל לרכוב חזרה לעיר A.
 בדרכו חזרה לעיר A, פגש רוכב האופנוע בשנית את רוכב האופניים.
 כל אחד מן הרוכבים המשיך לרכוב באותה המהירות שבה רכב קודם.
 ג. כמה זמן עבר מן הפגישה הראשונה בין שני הרוכבים ועד הפגישה השנייה ביניהם?
 ד. מהו המרחק שעבר רוכב האופניים מתחילת רכיבתו עד שנפגש עם רוכב האופנוע בפעם השנייה?



נסמן את זמן הנסיעה הלה של
 האופנוע והאופניים ב- x.
 כיוון שהפגשו, סכום המרחקים שווה ל- 75 ק"מ:

מהירות	זמן	מרחק
80	x	80x
20	x	20x

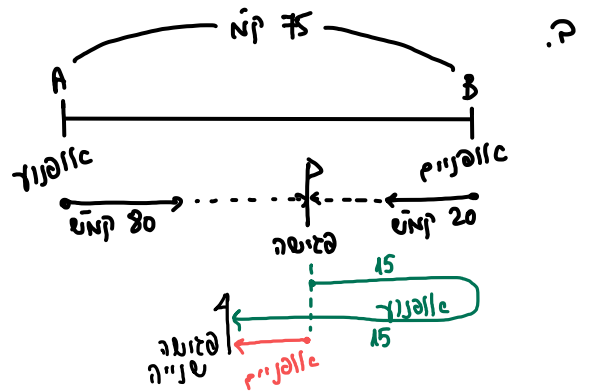
$80x + 20x = 75$
 $100x = 75 \quad | :100$
 $x = 0.75$

כדורים $\frac{3}{4}$ שדה (= 45 שקל) מוזג יוצאתם זניק, (פזשו).

נחידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





היו הפגישה הראשונה זשנייה האופנוצ רוכב
אלה הדרכ שלטו האופניים דג הפגישה הראשונה פלמיים (הזך וטרור) +
הדרכ שלטו האופניים היו הפגישה הראשונה זשנייה.

$$\frac{3}{4} \cdot 20 = \frac{15}{\text{ק"מ}} \quad \begin{matrix} \text{זשנייה} \\ \text{דרכ} \end{matrix}$$

נחשב אלה הדרכ של האופניים דג הפגישה הראשונה:
אנסחן אלה הדרכ שלטו האופניים היו הפגישה
ד- y.

דרכ	מהירות	זמן	
30+y	80	$\frac{30+y}{80}$	אופנוצ
y	20	$\frac{y}{20}$	אופניים

$$\frac{30+y}{80} = \frac{y}{20}$$

$$20(30+y) = 80y \quad | :20$$

$$30+y = 4y$$

$$30 = 3y \quad | :3$$

$$\boxed{10 = y}$$

זכר y=10 קזמן הפגישה של אחד אלה הוכד: $\frac{y}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

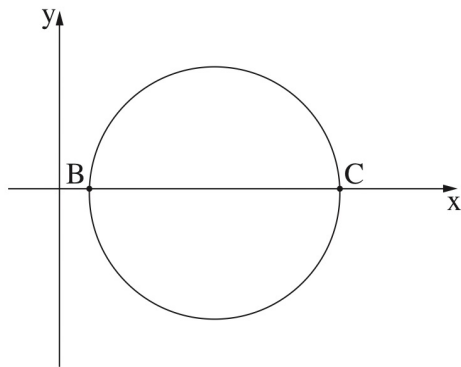
דבנה $\frac{1}{2}$ שדה (= 30 דקלה מרגצ
(הפגישה הראשונה הפגישה השנייה).

ז. רוכב האופניים דגרי דג הפגישה הראשונה: $\frac{3}{4} \cdot 20 = \frac{15}{\text{ק"מ}}$

אמהפגישה הראשונה דג הפגישה השנייה: y=10 קזמן

אנסחן, שלדרי דכך הבל 25 קזמתחילה הוכבה אלה הפגישה השנייה.





2. בסרטוט שלפניכם מתואר מעגל שמשוואתו היא $(x - 6)^2 + y^2 = 25$.

הנקודות B ו-C נמצאות על ציר ה-x, כמתואר בסרטוט.

א. מצאו את שיעורי הנקודות B ו-C.

הנקודה A נמצאת על המעגל ברביע הרביעי.

נתון: שטח המשולש ABC הוא 20.

ב. (1) מצאו את אורך הגובה לצלע BC במשולש ABC.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה A (שתי אפשרויות).

נתון: שיפוע הישר המשיק למעגל בנקודה A הוא חיובי.

ג. מצאו את משוואת הישר המשיק למעגל בנקודה A.

ד. מצאו את שטח המרובע המוגבל על ידי הישרים המשיקים למעגל בנקודות A, B ו-C, ועל ידי ציר ה-x.

א. הנקודות B ו-C הן נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-x.
לכן נציב $y=0$ במשוואת המעגל:

$$\begin{aligned} (x-6)^2 + 0^2 &= 25 \\ (x-6)^2 &= 25 \quad / \sqrt{} \\ x-6 &= 5 \quad \quad x-6 = -5 \\ x &= 11 \quad \quad x = 1 \end{aligned}$$

$x_c > x_b$ כיוון ש-C מחוץ ל-B ולכן ארוכות הצירים, לכן:

$$C(11, 0), B(1, 0)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{h \cdot 10}{2} = 20 \quad \left\{ \begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{h \cdot BC}{2} = 20 \quad (1) \\ BC &= 2R = 10 \end{aligned} \right.$$

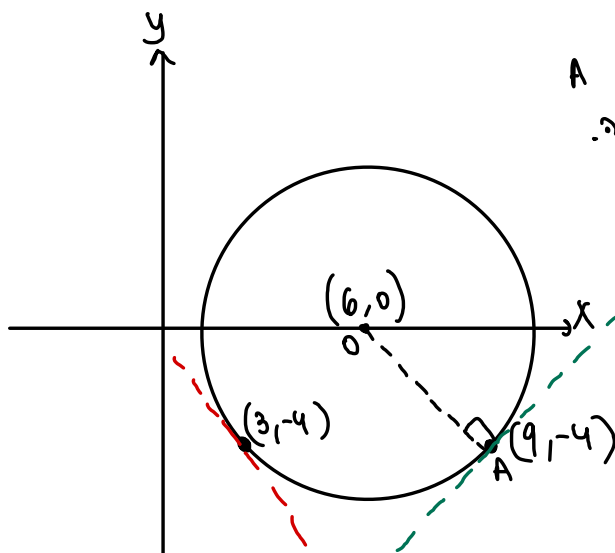
אורך הצוקה של BC במשולש ABC הוא 4.



(2) נתון כי הנקודה A נמצאת בריבוע הרביעי, זמן $y_A < 0$.
 אורך צלע המשוש ABC שווה למרחק של הנקודה A מציר ה-x.
 זמן: $y_A = -4$.
 מצד $y = -4$ קמטוואת המעגל:

$$\begin{aligned} (x-6)^2 + (-4)^2 &= 25 \\ (x-6)^2 + 16 &= 25 \\ (x-6)^2 &= 9 \quad | \sqrt{\quad} \\ \begin{array}{l} / \\ x-6=3 \\ x=9 \\ \downarrow \\ (9, -4) \end{array} & \quad \begin{array}{l} \backslash \\ x-6=-3 \\ x=3 \\ \downarrow \\ (3, -4) \end{array} \end{aligned}$$

שערי הנקודה A הן (שתי אפשרויות): $(9, -4)$, $(3, -4)$



ז. נתון כי שיפוע המשיק למעגל בנקודה A הוא חיובי, כלומר המשיק במעמד עליה. נותן זמנא לזכי הטרנסוס, כי מבין שתי האפשרויות לנקודה A, הנקודה $(9, -4)$ המשיק עליה נמצאת מעל צמטוואת המשיק למעגל בנקודה 15:

$$m_{OA} = \frac{0 - (-4)}{6 - 9} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

המשיק למעגל מאונק זכבוס המעגל בנקודה ההשקיה אויטריים מאונכיים שיפועיהם הופכיים אנגזיים, זמן: $m_{\text{משיק}} = \frac{3}{4}$



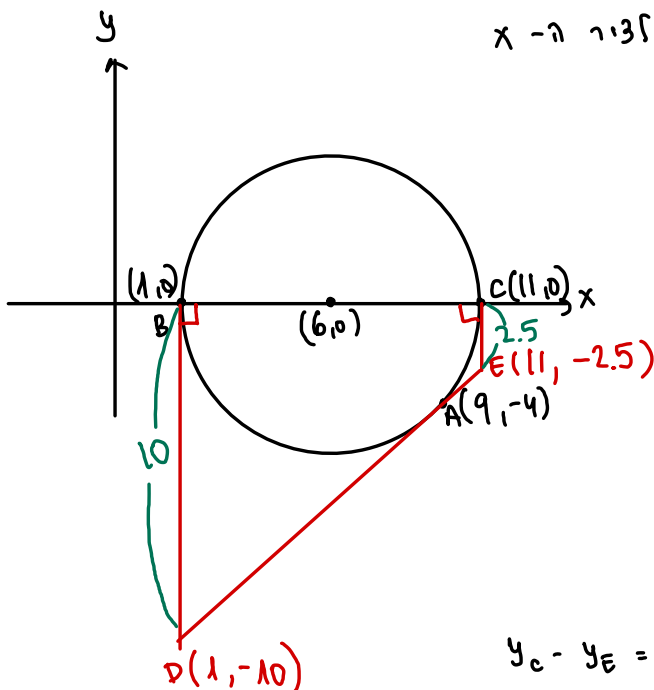
משוואת המשיק, ע"פ: $A(9, -4)$, $m = \frac{3}{4}$

$$y - (-4) = \frac{3}{4}(x - 9)$$

$$y + 4 = \frac{3}{4}x - \frac{27}{4}$$

$$y = 0.75x - 10.75$$

משוואת המשיק למעגל בקצודה A $(9, -4)$ היא: $y = 0.75x - 10.75$



ב. המשיקים למעגל בקצודה B ו-C מאונכים לציר ה-x
כיוון שמאונכים לרדיוסים DB, DC
↓
BD || CE (סימון זוג השווים)
↓
CEDB טרפז.

למצוא את אורכי הקטעים של הטרפז:
שיעורי הקצודה E:

אפשר השימוש: $x = 11$: $y = 0.75x - 10.75$
ז"כ: $y = 0.75 \cdot 11 - 10.75$

$$y = -2.5$$

$$\boxed{E(11, -2.5)}$$

אורך CE : $y_c - y_e = 0 - (-2.5) = 2.5$

שיעורי הקצודה D:
אפשר השימוש: $x = 1$: $y = 0.75x - 10.75$
ז"כ: $y = 0.75 \cdot 1 - 10.75$
 $y = -10$

אורך BD : $y_b - y_d = 0 - (-10) = 10$

$$\boxed{D(1, -10)}$$



צוקה הטרפז CEDB = אורך CB
 . $CB = 2R = 10$
 אף כן, שטח הטרפז:

$$S_{CEDB} = \frac{(BD + CE) \cdot CB}{2}$$

$$S_{CEDB} = \frac{(10 + 2.5) \cdot 10}{2}$$

$$S_{CEDB} = 62.5$$

שטח המלבטף המקוקט: 62.5.



3. חברה מסוימת מיינה מועמדים לעבודה בחברה.

כדי להתקבל לעבודה בחברה, המועמדים צריכים לעבור בהצלחה את שלושת שלבי המיון.

מי שלא עבר בהצלחה את השלב הראשון, לא המשיך לשלב השני, ומי שלא עבר בהצלחה את השלב השני,

לא המשיך לשלב השלישי.

שלבי המיון היו:

שלב ראשון: מבחן התאמה.

שלב שני: ריאיון אישי.

שלב שלישי: סדנה קבוצתית.

כל המועמדים שעברו בהצלחה את כל שלושת השלבים התקבלו לעבודה בחברה.

נתון:

75% מן המועמדים עברו בהצלחה את מבחן ההתאמה.

50% מן המועמדים שעברו בהצלחה את מבחן ההתאמה, עברו בהצלחה את הריאיון האישי.

30% מן המועמדים שעברו בהצלחה את הריאיון האישי, עברו בהצלחה את הסדנה הקבוצתית.

א. בחרו באקראי מועמד. מהי ההסתברות שהוא התקבל לעבודה בחברה?

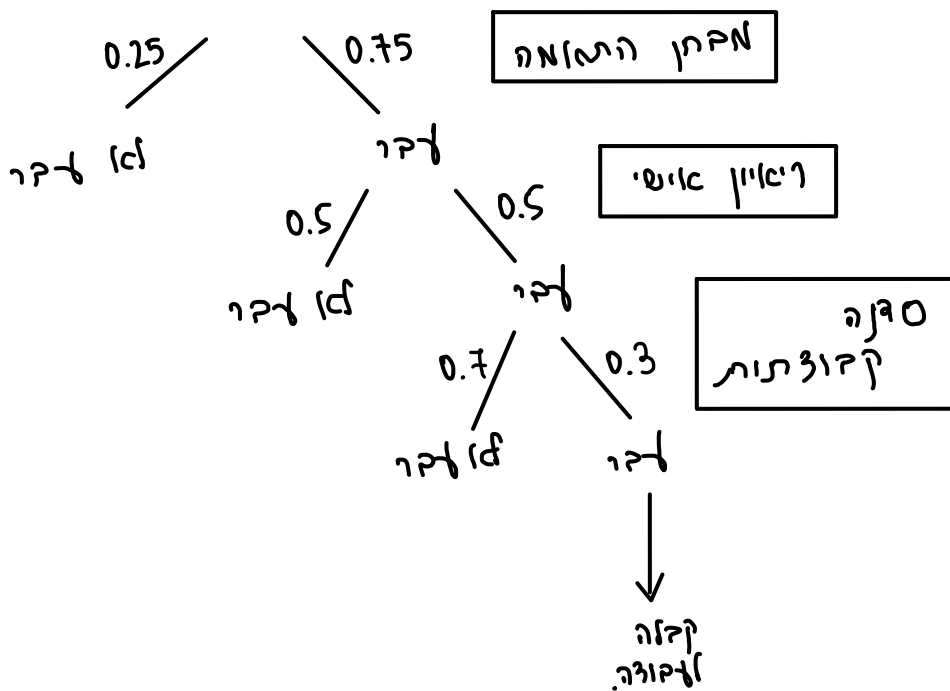
ב. נטע וגלי השתתפו במיונים האלה. מהי ההסתברות שלכל היותר אחת מהן **התקבלה** לעבודה בחברה?

ג. גם עדי השתתפה במיונים. מהי ההסתברות שהיא עברה בהצלחה את הריאיון האישי,

אם ידוע שהיא **לא** התקבלה לעבודה בחברה?

ד. ידוע כי 142 מועמדים מבין כל המועמדים **לא** התקבלו לעבודה בחברה.

כמה מועמדים התקבלו לעבודה בחברה?



א. $P(\text{תקלה / תקלה}) = 0.75 \cdot 0.5 \cdot 0.3 = 0.1125$

הסתברות של מוצא אקראי להתקבל לזכרון היא: 0.1125

ב. ההסתברות שלט יהיה אחת התקלה:

$1 - P(\text{נשל ואזי / התקלה / תיקון})$

$1 - (0.1125^2) = 0.987$

ההסתברות שמבין נשל ואזי זלף יהיה אחת התקלה: 0.987

ז. והסתברות זלף להתקבל: $1 - 0.1125 = 0.8875$

$P(\text{זכרון / זכרון / זכרון / זכרון / זכרון}) = \frac{0.75 \cdot 0.5 \cdot 0.7}{0.9875} = 0.2957$

ההסתברות לעזי זכרון את הרצון (הזכרון) אם יבוא לזלף התקלה: $0.2957 = \frac{21}{71}$

ג. מסמן: כול המוצאים - X

ידוע כי 142 זלף התקלה.

והסתברות זלף להתקבל: $1 - 0.1125 = 0.8875$

$0.8875 \cdot X = 142 \quad | : 0.8875$

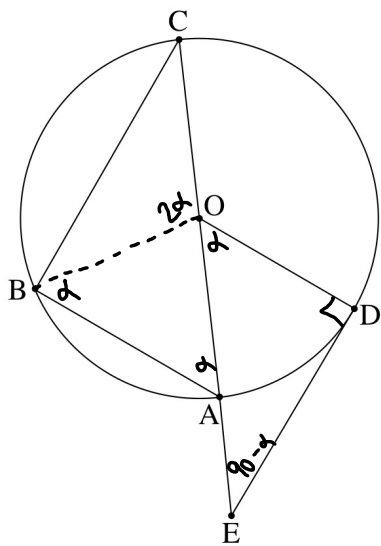
$X = 160$

מבין 160 מוצאים, מספר המוצאים להתקלה:

$0.1125 \cdot 160 = 18$

18 מוצאים להתקלה.





4. CA הוא קוטר במעגל שמרכזו O (ראו סרטוט).
 B ו- D הן נקודות על המעגל כך שמתקיים: $\angle BOC = 2 \cdot \angle AOD$.
 א. הוכיחו: $\angle CAB = \angle AOD$.
 הנקודה E נמצאת על המשך הקוטר CA, כמתואר בסרטוט.
 נתון כי ED משיק למעגל בנקודה D.
 ב. הוכיחו: $BC \parallel ED$.
 ג. הוכיחו: $CA \cdot OD = OE \cdot AB$.
 נתון כי שטח המשולש BAC גדול פי 1.44 משטח המשולש DOE.
 נסמן ב-R את רדיוס המעגל.
 ד. הביעו באמצעות R את אורך הקטע AE.

נימוק	תוצאה
(ט)	1. CA קוטר קוטרי שמרכזו O
(ט)	2. $\angle BOC = 2 \cdot \angle AOD$
\Rightarrow 2, סימון.	3. $\angle AOD = \alpha, \angle BOC = 2\alpha$
\Rightarrow 3, זוויות צמודות משלימות ז-ז (צמודה ז- $\angle BOC$)	4. $\angle BOA = 180 - 2\alpha$
\Rightarrow 1, רדיוסי המעגל שווים זה לזה.	5. $OA = OB = OC = R$
\Rightarrow 5, במשולש מזו צלעות שוות מונחות זוויות שוות.	6. $\angle OBA = \angle CAB$
\Rightarrow 4, 6, סכום זוויות במשולש הוא 180° .	7. $\angle CAB = \frac{180 - (180 - 2\alpha)}{2} = \alpha$
\Rightarrow 3, 7.	8. $\angle CAB = \angle AOD = \alpha$ י.ב.נ.
(ט)	9. ED משיק למעגל בנקודה D
\Rightarrow 9, המשיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה.	10. $\angle ODE = 90^\circ$
\Rightarrow 3, 10, סכום זוויות במשולש הוא 180° .	11. $\angle OED = 90 - \alpha$
\Rightarrow 3, 5, במשולש מזו צלעות שוות מונחות זוויות שוות (סכום הזוויות במשולש הוא 180°).	12. $\angle OBC = \angle OCB = \frac{180 - 2\alpha}{2}$
\Rightarrow 12.	13. $\angle OCB = 90 - \alpha$
\Rightarrow 11, 13, כלל המעלה.	14. $\angle OED = \angle OCB = 90 - \alpha$
\Rightarrow 14, זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות זו לזו.	15. $BC \parallel ED$ י.ב.נ. ק'

נחידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



נימוק	תוצאה
\Rightarrow 1, זווית היקפית הנשלגת קטנה שווה ל-90°	16. $\angle CBA = 90^\circ$
\Rightarrow 16, 10	17. $\angle CBA = \angle ODE = 90^\circ$
\Rightarrow 14, 16, משפט פיתגורס	18. $\triangle ODE \sim \triangle ABC$
\Rightarrow 18, יחסי הצלעות המתאימות קמטולשים פואיס.	19. $\frac{OD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{OE}{AC}$
\Rightarrow 19	20. $AC \cdot OD = DE \cdot AB$ ע.ש.א.
(מ)	21. $\frac{S_{\triangle BAC}}{S_{\triangle DOE}} = 1.44$
\Rightarrow 21, קמטולשים פואיס, יחס הצלעות קריקוף שווה ליחס השטחים.	22. $\left(\frac{AC}{OE}\right)^2 = 1.44$
	23. $\left(\frac{2R}{R+AE}\right)^2 = 1.44 \quad \sqrt{\quad}$
	$\frac{2R}{R+AE} = 1.2$
	$2R = 1.2(R+AE)$
	$2R = 1.2R + 1.2AE$
	$0.8R = 1.2AE \quad : 1.2$
	$AE = \frac{2}{3}R$ ע.ש.א.



5. בסרטוט שלפניכם מתואר משולש ABC שאורכי הצלעות שלו הם:

$$AC = 6, AB = 7, BC = 8$$

AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.

א. (1) מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle ABC$.

(2) מצאו את אורך התיכון AD.

(3) מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle BAD$.

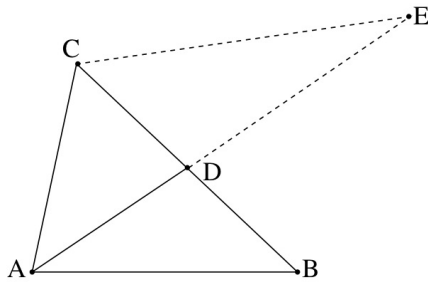
הנקודה E נמצאת על המשך AD, כמתואר בסרטוט.

נתון: שטח המשולש CDE הוא 15.

ב. מצאו את אורך DE.

מן הנקודה C הורידו אנך לתיכון AD, החותך אותו בנקודה F.

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש CDF ובין שטח המשולש CDE.



10. (1) $\triangle ABC$

משפט הקוסינוסים:

$$6^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos \sphericalangle ABC$$

$$-77 = -112 \cdot \cos \sphericalangle ABC$$

$$0.6875 = \cos \sphericalangle ABC$$

$$\sphericalangle ABC = 46.567^\circ$$

(2) $\triangle ABD$

משפט הקוסינוסים:

$$AD^2 = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos(46.567^\circ)$$

$$AD^2 = 26.5 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$AD = 5.148$$

(3) $\triangle ABD$

משפט הקוסינוסים:

$$4^2 = 5.148^2 + 7^2 - 2 \cdot 5.148 \cdot 7 \cdot \cos \sphericalangle BAD$$

$$0.8256 = \cos \sphericalangle BAD$$

$$\sphericalangle BAD = 34.352^\circ$$



$$S_{\triangle CDE} = 15 \quad \text{ב. (נתון):}$$

$$S_{\triangle CDE} = \frac{CD \cdot DE \cdot \sin \angle CDE}{2} = 15$$

לוליה קודקודיות שוות כל ז"א וז"א:

$$\angle CDE = \angle ADB$$

כך ש לוליה במסוגל הוא 180° ז"א:

$$\angle ADB = 180^\circ - 46.567^\circ - 34.352^\circ = 99.081^\circ$$

↓

$$\angle CDE = 99.081^\circ$$

$$S_{\triangle CDE} = \frac{4 \cdot DE \cdot \sin(99.081^\circ)}{2} = 15$$

$$1.975DE = 15$$

$$DE = 7.595$$

אורך DE הוא 7.595



ז. למשושים ΔCDF , ΔCDE זווה משותף $\angle C$.
 מכאן, שיהם השלמים של המשולשים אזו שווה זיחס
 הדסיסיים:

$$\frac{S_{\Delta CDF}}{S_{\Delta CDE}} = \frac{DF}{DE}$$

$$DE = 7.595 \quad \text{זכרון?} :$$

כזה נמצא את אורך DF :

ΔCDF :

$$\angle CDF = 180^\circ - 99.081^\circ = 80.919^\circ$$

(זווית במחזור משלימה ל- 180°)

$$\cos(80.919^\circ) = \frac{DF}{4}$$

$$DF = 0.631$$

זכרון:

$$\frac{S_{\Delta CDF}}{S_{\Delta CDE}} = \frac{DF}{DE} = \frac{0.631}{7.595} = 0.083$$



6. נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
- (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
- ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
- ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- נתונה הפונקצייה $g(x) = -f(x) + k$, הוא פרמטר.
- נתון: משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $g(x)$ היא $y = 2$.
- ד. (1) מצאו את k .
- (2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, ומהו סוגה?

א. (1) נמצא כי: $x^2 - 1 \neq 0$
 (פירוט): $x^2 - 1 = 0$
 $x^2 = 1 \quad | \sqrt{\quad}$
 $x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

אכ"ן שתחום ההגדרה הוא: $x \neq 1, -1$

(2) אסימפטוטות אנכיות: $x = 1, x = -1$

אסימפטוטה אופקית: $y = 4$

(3) חיתוך עם ציר x ($y = 0$):

$\frac{4x^2 - 1}{x^2 - 1} = 0$
 $4x^2 = 1$
 $x^2 = \frac{1}{4} \quad | \sqrt{\quad}$
 $x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$
 $(\frac{1}{2}, 0) \quad (-\frac{1}{2}, 0)$

חיתוך עם ציר y ($x = 0$):

$f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 - 1}{0^2 - 1}$
 $f(0) = 1$
 $(0, 1)$

חיתוך עם ציר x : $(-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0)$
 חיתוך עם ציר y : $(0, 1)$



ק. כדי זאצוא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, נזכור את $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{8x(x^2-1) - 2x(4x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^3 - 8x - 8x^3 + 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}$$

נשווה את $f'(x) = 0$:

$$\frac{-6x}{(x^2-1)^2} = 0 \quad | \cdot (x^2-1)^2$$

$$-6x = 0 \quad | : (-6)$$

$$x = 0$$

נציב את שיעור ה- y של נקודת הקיצון כדי להזכיר $x=0 \rightarrow f(x)$:

$$f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 - 1}{0^2 - 1} = 1$$

נמצא את נקודת הקיצון $(0, 1)$ - נמצא את נקודת הקיצון של $f(x)$ ונחזיק את y ונמצא את x .

נמצא את טווח הקיצון:

$$f'(-2) = \frac{-6 \cdot (-2)}{[(-2)^2 - 1]^2} = +$$

$$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-6 \cdot (-\frac{1}{2})}{[(\frac{1}{2})^2 - 1]^2} = +$$

$$f'(\frac{1}{2}) = \frac{-6 \cdot \frac{1}{2}}{[(\frac{1}{2})^2 - 1]^2} = -$$

$$f'(2) = \frac{-6 \cdot 2}{(2^2 - 1)^2} = -$$

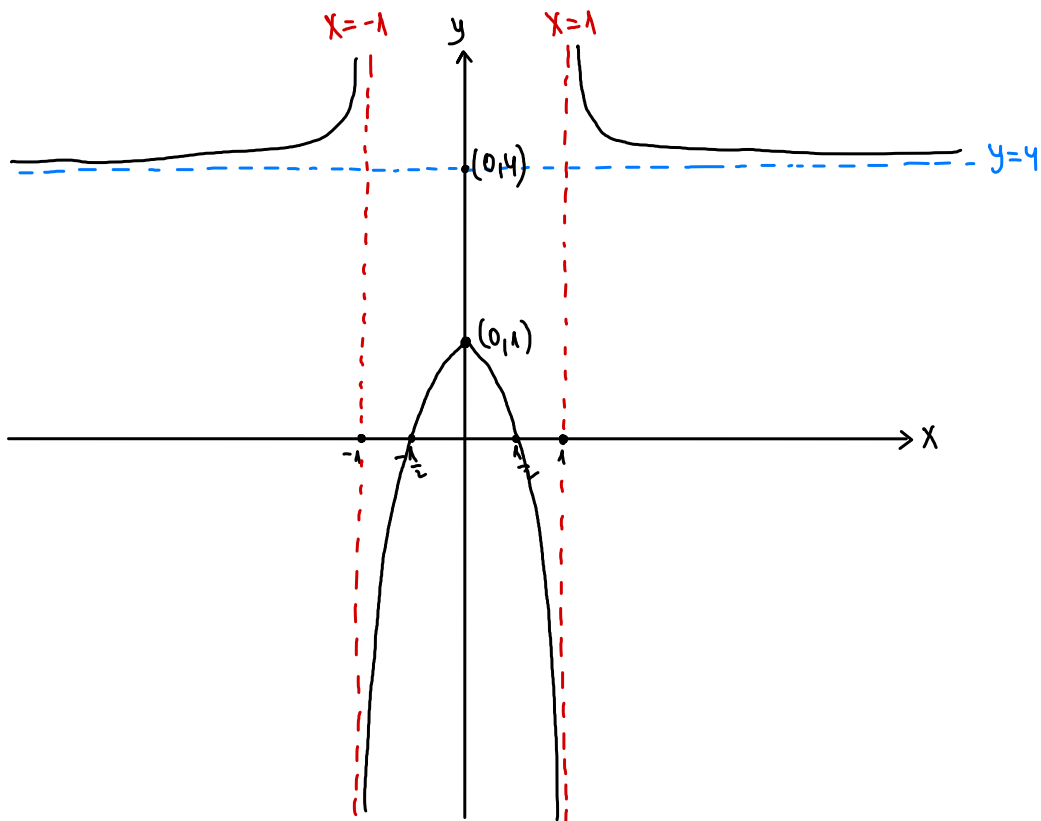
x	(-2)	-1	$(-\frac{1}{2})$	0	$(\frac{1}{2})$	1	(2)
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	\uparrow		\uparrow	1	\downarrow		\downarrow

$(0, 1)$ היא נקודת קיצון אולם מקסימום

בפונקציה $f(x)$.



2. סקיבה של $f(x)$:



3. (1) האסימפטוטה האופקית של $f(x)$ היא: $y = 4$.
 האסימפטוטה האופקית של $-f(x)$ היא: $y = -4$.
 האסימפטוטה האופקית של $g(x) = -f(x) + k$ היא: $y = 2$.
 מכאן ש:
 $-4 + k = 2$
 $k = 6$

(2) נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = -f(x) + 6$:
 שיטת ה- x זהה לשיטת ה- x של נ' הקיצון של $f(x)$ ($x = 0$).
 $g(0) = -f(0) + 6$
 $g(0) = -1 + 6 = 5$
 $g(0) = 5$

תחומי הערך והיובנה של $f(x)$ ושל $-f(x)$ הם הפכים ואז נקודת הקיצון היא $(0, 5)$ מינימום.

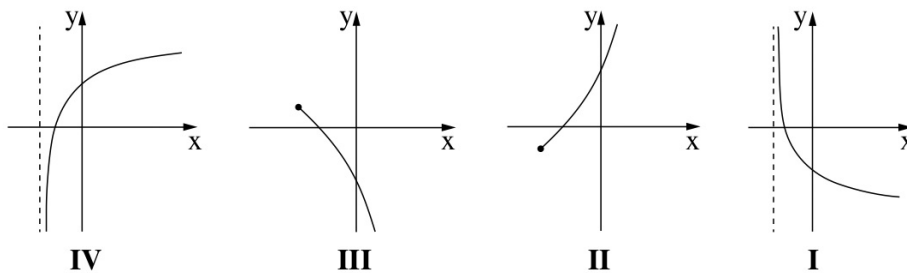
נקודת הקיצון של $g(x)$ היא $(0, 5)$, מינימום.



7. נתונה הפונקצייה $f(x) = x - 2\sqrt{x+a}$, a הוא פרמטר.

גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.

- א. הראו כי $a = 3$.
- ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- ה. אחד מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את הקביעה.
- ו. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, הישר $x = 1$, וציר ה- x .



א. ניתן כי ציר הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$. $f(6) = 0$

$$f(6) = 6 - 2\sqrt{6+a} = 0$$

$$-2\sqrt{6+a} = -6 \quad | :(-2)$$

$$\sqrt{6+a} = 3 \quad | ()^2$$

$$6+a = 9$$

$$a = 3$$

בדיקה:

$$\sqrt{6+3} \stackrel{?}{=} 3$$

$$\sqrt{9} \stackrel{!}{=} 3$$

$a = 3$: אסימפט

ב. תחום ההצורה של $f(x) = x - 2\sqrt{x+3}$:

$$x+3 \geq 0$$

$$x \geq -3$$



2. נקודת קיצון קצה :

$$f(-3) = -3 - 2 \cdot \sqrt{-3+3}$$

$$f(-3) = -3 - 2 \cdot \sqrt{0}$$

$$f(-3) = -3 - 2 \cdot 0$$

$$f(-3) = -3$$

$$(-3, -3)$$

נקודת קיצון פנימית :

$$f'(x) = 1 - \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 0$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{x+3}} \quad | \cdot \sqrt{x+3}$$

$$\sqrt{x+3} = 1 \quad | (\)^2$$

$$x+3 = 1$$

$$x = -2$$

$$f(-2) = -2 - 2 \cdot \sqrt{-2+3}$$

$$f(-2) = -2 - 2 \cdot \sqrt{1}$$

$$f(-2) = -2 - 2 = -4$$

$$(-2, -4)$$

x	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	0
f'(x)		-	0	+
f(x)	-3	↓	-4	↑

$$f'(-2\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{-2.5+3}} = -$$

$$f'(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{0+3}} = +$$

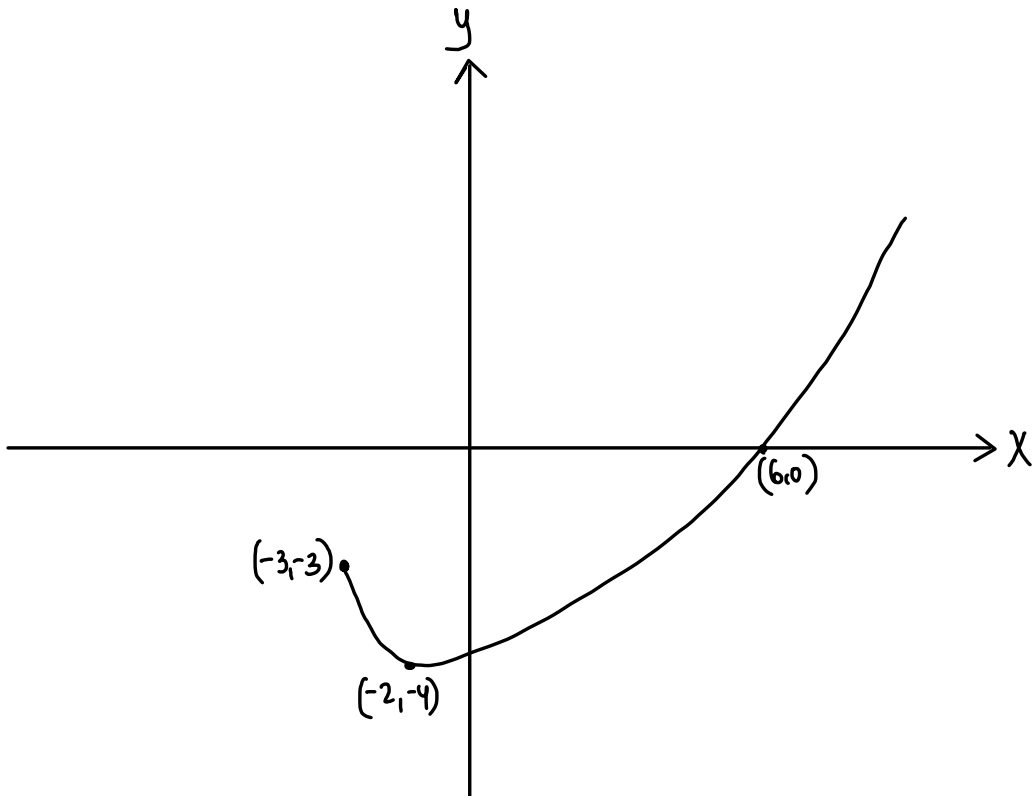
נקודות הקיצון :

קיצון קצה $(-3, -3)$ מקסימום

קיצון פנימי $(-2, -4)$ מינימום



ג. סקיצה של $f(x)$:



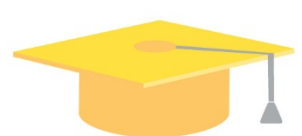
ה. צרף IV הוא קרן הנגזרת $f'(x)$.

נימוק:

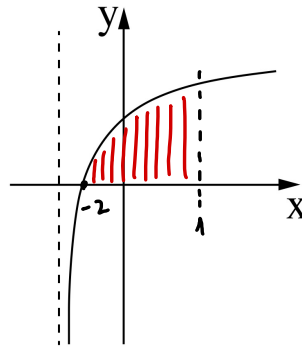
* $f(x)$ נקודת קיצון פנימית כאשר $x = -2$. זמן, $f'(x) = 0$ צריכה להיות נקודת חיתוך עם ציר ה- x כאשר $x = -2$.

* על פי טבלת הנגזרת והירידה בתחום $-3 < x < -2$ הפונקציה $f(x)$ יורדת, וזמן $f'(x)$ שלילית, ובתחום $x > -2$ הפונקציה $f(x)$ עולה וזמן $f'(x)$ חיובית.

צרף IV הוא היחיד שמקיים תנאים אלו.



1. באמצעות אינטגרל - השטח המקוקט.



IV

$$S = \int_{-2}^1 [f'(x) - 0] dx = [f(x)]_{-2}^1 = f(1) - f(-2)$$

$$f(1) = 1 - 2\sqrt{1+3} = -3$$

$$f(-2) = -2 - 2\sqrt{-2+3} = -4$$

$$S = f(1) - f(-2) = -3 - (-4) = 1$$

שטח המקוקט: $S = 1$

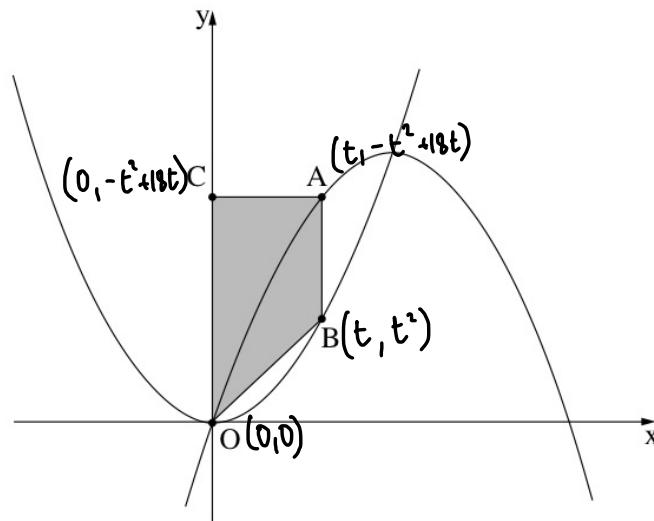


8. נתונות הפונקציות: $g(x) = x^2$, $f(x) = -x^2 + 18x$.

נקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע הראשון מעל לגרף הפונקצייה $g(x)$.
מן הנקודה A מעבירים שני ישרים:
ישר המאונך לציר ה-y וחותר אותו בנקודה C,
וישר המקביל לציר ה-y וחותר את גרף הפונקצייה $g(x)$ בנקודה B (ראו סרטוט).
הנקודה O היא ראשית הצירים.
נסמן ב-t את שיעור ה-x של הנקודה A.

א. הביעו באמצעות t את אורכי הקטעים AC, AB ו- CO.

ב. מצאו את הערך של t שבעבורו שטח הטרפז ABOC הוא מקסימלי.



10. א. [נסמן] $x_A = t$

A נמצאת על זרף הפונקציה $f(x)$, לכן: $y_A = -t^2 + 18t$
שיווי הנקודה A: $(t, -t^2 + 18t)$

C נמצאת על ציר y, לכן: $x_C = 0$.
הישר AC מאונך לציר y, לכן: $y_C = y_A = -t^2 + 18t$
שיווי הנקודה C: $(0, -t^2 + 18t)$

הישר AB מאונך לציר x, לכן: $x_A = x_B = t$.
הנקודה B נמצאת על הפונקצייה $g(x)$, לכן: $y_B = t^2$.
שיווי הנקודה B: (t, t^2)

הנקודה O היא ראשית הצירים ולכן שיווייה היא $(0,0)$.



אורך AC :
 $x_A - x_C = t - 0 = t$

אורך AC : t

אורך AB :
 $y_A - y_B = -t^2 + 18t - t^2$
 $= -2t^2 + 18t$

אורך AB : $-2t^2 + 18t$

אורך CO :
 $y_C - y_O = -t^2 + 18t - 0$

אורך CO : $-t^2 + 18t$

ה. שטח מרובע ABCO : $S = \frac{(AB+CO) \cdot AC}{2}$

פונקציה המטרה :

$$f(t) = \frac{(-2t^2 + 18t - t^2 + 18t) \cdot t}{2}$$

$$f(t) = \frac{(-3t^2 + 36t) \cdot t}{2}$$

$$f(t) = \frac{-3t^3 + 36t^2}{2}$$

כדי למצוא את t שקימו שטח המרובע מקסימלי, נמצא את $f(t)$ ונשווה ל-0 :

$$f'(t) = \frac{(-9t^2 + 72t) \cdot 2 - 0 \cdot (-3t^3 + 36t^2)}{2}$$

$$f'(t) = -9t^2 + 72t$$



$$f'(t) = 0 \Rightarrow -9t^2 + 72t = 0$$

$$-9t(t-8) = 0$$

$$-9t = 0$$
~~$$t = 0$$~~

$$t - 8 = 0$$

$t = 8$

נמאן כן A קריאה ה- I
וכן $x_A = t$, לפי
t צריך להיות חיובי!

נקודת אפס של הקיצון עבור $t = 8$:

x	(1)	8	(9)
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	↗		↘

$$f'(1) = -9 \cdot 1^2 + 72 \cdot 1 = +$$

$$f'(9) = -9 \cdot 9^2 + 72 \cdot 9 = -$$

עבור $t = 8$, שטח החתך הוא מקסימלי.

למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

