פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ב, 2022, גרסה א' שאלון: 35481

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

1. המרחק בין עיר A לעיר B הוא 75 ק"מ.
רוכב אופנוע יצא מעיר A לכיוון עיר B.
באותו הזמן יצא רוכב אופניים מעיר B לכיוון עיר A.
שני הרוכבים רכבו באותו המסלול.
רוכב האופנוע רכב במהירות קבועה של 80 קמ"ש. רוכב האופניים רכב במהירות קבועה של 20 קמ"ש.

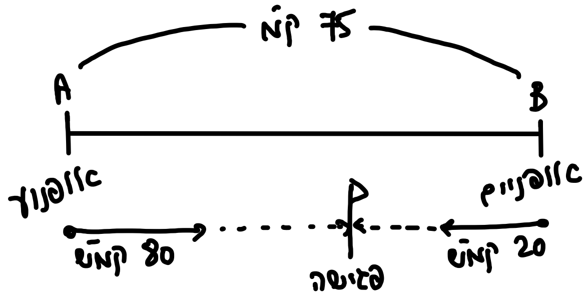
א. כעבור כמה זמן מרגע יציאתם לדרך, נפגשו רוכב האופנוע ורוכב האופניים?

רוכב האופנוע הגיע לעיר B ומייד התחיל לרכוב חזרה לעיר A.
בדרכו חזרה לעיר A, פגש רוכב האופנוע בשנית את רוכב האופניים.
כל אחד מן הרוכבים המשיך לרכוב באותה המהירות שבה רכב קודם.

ב. כמה זמן עבר מן הפגישה ה**ראשונה** בין שני הרוכבים ועד הפגישה ה**שנייה** ביניהם?

ג. מהו המרחק שעבר רוכב האופניים מתחילת רכיבתו עד שנפגש עם רוכב האופנוע בפעם ה**שנייה**?

א.



נסמן את זמן הנסיעה הזה של האופנוע והאופניים ב- x.
כיוון שנפגשו, סכום הדרכים שווה ל- 75 קמ:

	זמן	מהירות	דרך
אופנוע	x	80	80x
אופניים	x	20	20x

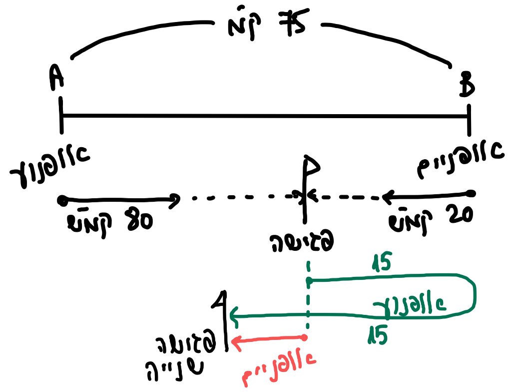
$80x+20x=75$

$100x=75 \quad /:100$

$x=0.75$

כעבור $\frac{3}{4}$ שעה (=45 דקות) מרגע יציאתם לדרך, נפגשו.

ב.



בין הפגישה הראשונה לשנייה, האופנוע רוכב את הדרך שעשו האופניים עד לפגישה הראשונה פעמיים (הלוך ותזור) + הדרך שעושים האופניים בין הפגישה הראשונה לשנייה.

נחשב את הדרך של האופניים עד לפגישה הראשונה: $\underset{(\text{דרך})}{15\ \text{ק"מ}} = \underset{(\text{מהירות})}{20} \cdot \underset{(\text{זמן})}{\frac{3}{4}}$

ונסמן את הדרך שעושים האופניים בין הפגישות ב- y.

	זמן	מהירות	דרך
אופנוע	$\frac{30+y}{80}$	80	$30+y$
אופניים	$\frac{y}{20}$	20	y

$$\frac{30+y}{80} = \frac{y}{20}$$

$$20(30+y) = 80y \quad /:20$$

$$30+y = 4y$$

$$30 = 3y \quad /:3$$

$$\boxed{10 = y}$$

נציב $y=10$ בזמן הנסיעה של אחד מכלי הרכב: $\frac{y}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

עברה $\frac{1}{2}$ שעה (= 30 דקות מרגע הפגישה הראשונה לפגישה השנייה).

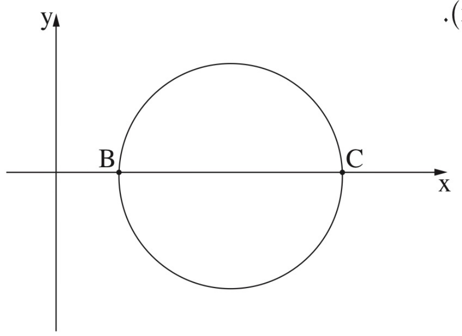
ג. רוכב האופניים עבר עד לפגישה הראשונה: $\frac{3}{4} \cdot 20 = 15$ ק"מ.

ומהפגישה הראשונה עד לפגישה השנייה: $y=10 \Rightarrow 10$ ק"מ.

מכאן, שעבר בסך הכל 25 ק"מ מתחילת הרכיבה ועד הפגישה השנייה.

2. בסרטוט שלפניכם מתואר מעגל שמשוואתו היא $(x-8)^2 + y^2 = 25$.

הנקודות B ו־ C נמצאות על ציר ה־ x, כמתואר בסרטוט.



א. מִצאו את שיעורי הנקודות B ו־ C.

הנקודה A נמצאת על המעגל ברביע הרביעי.

נתון: שטח המשולש ABC הוא 20.

ב. **(1)** מִצאו את אורך הגובה לצלע BC במשולש ABC.

(2) מִצאו את שיעורי הנקודה A (שתי אפשרויות).

נתון: שיפוע הישר המשיק למעגל בנקודה A הוא חיובי.

ג. מִצאו את משוואת הישר המשיק למעגל בנקודה A.

ד. מִצאו את שטח המרובע המוגבל על ידי הישרים המשיקים למעגל בנקודות A, B ו־ C, ועל ידי ציר ה־ x.

א. הנקודות B ו- C הן נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- X.
לכן נציב $y=0$ במשוואת המעגל:

$$(x-8)^2 + 0^2 = 25$$
$$(x-8)^2 = 25 \quad /\sqrt{\ }$$

$$x-8=5 \qquad x-8=-5$$
$$x=13 \qquad x=3$$

$X_C > X_B$ כיוון ש-C רחוקה יותר מראשית הצירים, לכן:
$C(13,0)\ ,\ B(3,0)$

ב. (1)

$$S_{\Delta ABC} = \frac{h \cdot BC}{2} = 20$$
$$BC = 2R = 10$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{h \cdot 10}{2} = 20$$
$$h = 4$$

אורך הגובה לצלע BC במשולש ABC הוא: 4.

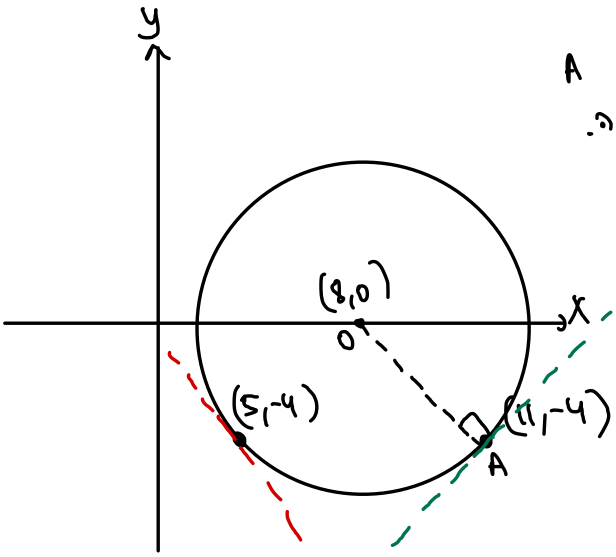
(2) נתון כי הנקודה A נמצאת ברביע הרביעי, לכן $y_A<0$.
אורך גובה המשולש ABC שווה למרחק של הנקודה A מציר ה-x.
לכן: $y_A=-4$.

נציב $y=-4$ במשוואת המעגל:

$$(x-8)^2+(-4)^2=25$$
$$(x-8)^2+16=25$$
$$(x-8)^2=9 \quad /\sqrt{\ }$$

$$x-8=3 \qquad\qquad x-8=-3$$
$$x=11 \qquad\qquad x=5$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$(11,-4) \qquad\qquad (5,-4)$$

שיעורי הנקודה A הן (שתי אפשרויות): $(5,-4)$, $(11,-4)$



ד. נתון כי שיפוע המשיק למעגל בנקודה A הוא חיובי, כלומר המשיק במגמת עליה.
ניתן לראות על פי השרטוט, כי מבין שתי האפשרויות לנקודה A, בנקודה $(11,-4)$ המשיק עולה.

נמצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה זו:

$$M_{OA}=\frac{0-(-4)}{8-11}=\frac{4}{-3}$$

המשיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה וישרים מאונכים שיפועים הופכיים ונגדיים, לכן: $M_{\text{משיק}}=\frac{3}{4}$.

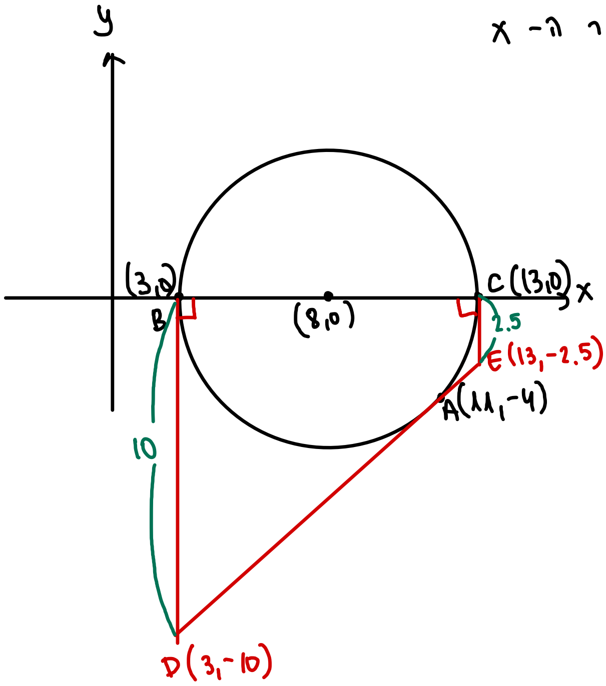
משוואת המשיק, לפי: $m=\frac{3}{4}$, $A(11,-4)$:

$$y-(-4)=\frac{3}{4}(x-11)$$

$$y+4=\frac{3}{4}x-\frac{33}{4}$$

$$y=\frac{3}{4}x-\frac{49}{4}$$

משוואת המשיק לעיגול בנקודה $A(11,-4)$ היא: $y=\frac{3}{4}x-\frac{49}{4}$



ב. המשיקים לעיגול בנקודות B ו-C מאונכים לציר ה-x

כיוון שמאונכים לרדיוסים OB, OC.

$\Downarrow$

BD ∥ CE (סימון על השרטוט)

$\Downarrow$

CEDB טרפז.

נמצא את אורכי הבסיסים של הטרפז:

שיעורי הנקודה E:

מפגש הישרים $x=13$ ו- $y=\frac{3}{4}x-\frac{49}{4}$

לכן: $y=\frac{3}{4}\cdot 13-\frac{49}{4}$

$$y=\frac{39}{4}-\frac{49}{4}$$

$$y=\frac{-10}{4}=-2.5$$

$\boxed{E(13,-2.5)}$ $\Leftarrow$ אורך CE:

$$y_C-y_E=0-(-2.5)=2.5$$

שיעורי הנקודה D:

מפגש הישרים $x=3$ ו- $y=\frac{3}{4}x-\frac{49}{4}$.

לכן: $y=\frac{3}{4}\cdot 3-\frac{49}{4}$

$$y=\frac{9}{4}-\frac{49}{4}$$

$$y=-\frac{40}{4}=-10$$

$\boxed{D(3,-10)}$ $\Leftarrow$ אורך BD:

$$y_B-y_D=0-(-10)=10$$

גובה הטרפז $CEDB$ = אורך CB.

$CB = 2R = 10$.

אם כך, שטח הטרפז:

$$S_{CEDB} = \frac{(BD + CE) \cdot CB}{2}$$

$$S_{CEDB} = \frac{(2.5 + 10) \cdot 10}{2}$$

$$S_{CEDB} = \frac{12.5 \cdot 10}{2} = 62.5$$

שטח המרובע המבוקש: 62.5

3. חברה מסוימת מְיינה מועמדים לעבודה בחברה.

כדי להתקבל לעבודה בחברה, המועמדים צריכים לעבור בהצלחה את שלושת שלבי המיון.

מי שלא עבר בהצלחה את השלב הראשון, לא המשיך לשלב השני, ומי שלא עבר בהצלחה את השלב השני, לא המשיך לשלב השלישי.

שלבי המיון היו:

שלב ראשון: מבחן התאמה.

שלב שני: ריאיון אישי.

שלב שלישי: סדנה קבוצתית.

כל המועמדים שעברו בהצלחה את **כל** שלושת השלבים התקבלו לעבודה בחברה.

נתון:

75% מן המועמדים עברו בהצלחה את מבחן ההתאמה.

50% מן המועמדים שעברו בהצלחה את מבחן ההתאמה, עברו בהצלחה את הריאיון האישי.

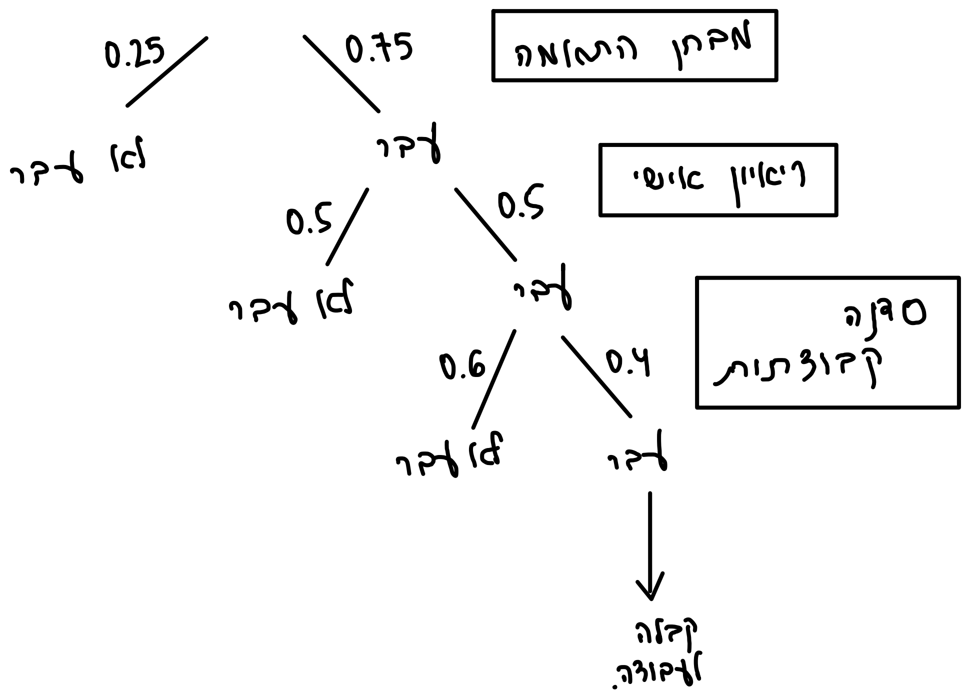
40% מן המועמדים שעברו בהצלחה את הריאיון האישי, עברו בהצלחה את הסדנה הקבוצתית.

א. בחרו באקראי מועמד. מהי ההסתברות שהוא התקבל לעבודה בחברה?

ב. נטע וגלי השתתפו במיונים האלה. מהי ההסתברות שלכל היותר אחת מהן **התקבלה** לעבודה בחברה?

ג. גם עדי השתתפה במיונים. מהי ההסתברות שהיא עברה בהצלחה את הריאיון האישי, אם ידוע שהיא <u>**לא**</u> התקבלה לעבודה בחברה?

ד. ידוע כי 170 מועמדים מבין כל המועמדים <u>לא</u> התקבלו לעבודה בחברה. כמה מועמדים התקבלו לעבודה בחברה?



א. $P(\text{קבלה לעבודה}) = 0.75\cdot 0.5\cdot 0.4 = 0.15$

ההסתברות של מועמד אקראי להתקבל לעבודה היא: 0.15

ב. ההסתברות שלכל היותר אחת התקבלה:

$1-P(\text{נטע ודני התקבלו שתיהן})$

$1-(0.15\cdot 0.15) = 0.9775$.

ההסתברות שמבין נטע ודני לכל היותר אחת התקבלה: 0.9775.

ג. ההסתברות לא להתקבל: $1-0.15 = 0.85$

$$P\left(\text{עברה ריאיון אישי} / \text{לא התקבלה}\right) = \frac{0.75\cdot 0.5\cdot 0.6}{0.85} = 0.265$$

ההסתברות שנטע עברה את הריאיון האישי, אם ידוע שלא התקבלה: $0.265 = \frac{9}{34}$

ד. נסמן: כלל המועמדים - X.

ידוע כי 170 לא התקבלו.

ההסתברות לא להתקבל: $1-0.15=0.85$

$0.85\cdot X = 170 \quad /:0.85$

$X = 200$

מבין 200 מועמדים, מספר המועמדים שהתקבלו:

$0.15\cdot 200 = 30$

30 מועמדים התקבלו.

.4 BA הוא קוטר במעגל שמרכזו O (ראו סרטוט).

C ו־ D הן נקודות על המעגל כך שמתקיים: $\sphericalangle BOC = 2 \cdot \sphericalangle AOD$.

א. הוכיחו: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle AOD$.

הנקודה E נמצאת על המשך הקוטר BA , כמתואר בסרטוט.

נתון כי ED משיק למעגל בנקודה D .

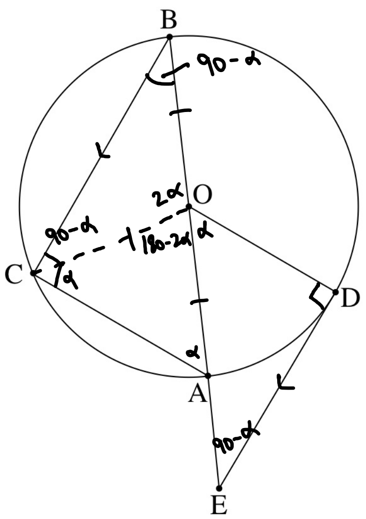
ב. הוכיחו: $CB \parallel ED$.

ג. הוכיחו: $BA \cdot OD = OE \cdot AC$.

נתון כי שטח המשולש CAB גדול פי 1.44 משטח המשולש DOE .

נסמן ב־ R את רדיוס המעגל.

ד. הביעו באמצעות R את אורך הקטע AE .



טענה		נימוק
.1	AB קוטר במעגל שמרכזו O	נתון
.2	$\sphericalangle BOC = 2 \cdot \sphericalangle AOD$	נתון
.3	$\sphericalangle AOD = \alpha$, $\sphericalangle BOC = 2\alpha$	$\Rightarrow$ 2, סימון.
.4	$\sphericalangle COA = 180° - 2\alpha$	$\Rightarrow$ 3, זוויות צמודות משלימות ל- 180° (צמודה ל- $\sphericalangle BOC$).
.5	$OA = OB = OC = R$	$\Rightarrow$ 1, רדיוסי המעגל שווים זה לזה.
.6	$\sphericalangle OCA = \sphericalangle CAB$	$\Rightarrow$ 5, במשולש מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות.
.7	$\sphericalangle CAB = \frac{180° - (180° - 2\alpha)}{2} = \alpha$	$\Rightarrow$ 4, 6, סכום זוויות במשולש הוא 180°.
.8	$\sphericalangle CAB = \sphericalangle AOD = \alpha$ מ.ש.ל א'	$\Rightarrow$ 3, 7.
.9	ED משיק למעגל בנקודה D	נתון
.10	$\sphericalangle ODE = 90°$	$\Rightarrow$ 9, המשיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה.
.11	$\sphericalangle OED = 90° - \alpha$	$\Rightarrow$ 3, 10, סכום זוויות במשולש הוא 180°
.12	$\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = \frac{180° - 2\alpha}{2}$	$\Rightarrow$ 3, 5, במשולש מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות, וסכום הזוויות במשולש הוא 180°.
.13	$\sphericalangle OBC = 90° - \alpha$	$\Rightarrow$ 12.
.14	$\sphericalangle OED = \sphericalangle OBC = 90° - \alpha$	$\Rightarrow$ 11, 13, כלל המעבר.
.15	$BC \parallel ED$ מ.ש.ל ב'	$\Rightarrow$ 14, זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות זו לזו.

	טענה	נימוק
16.	$\sphericalangle BCA = 90^\circ$	⇐ 1, זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- 90°.
17.	$\sphericalangle BCA = \sphericalangle ODE = 90^\circ$	⇐ 10, 16.
18.	$\triangle ODE \sim \triangle ACB$	⇐ 14, 16, משפט דמיון ז.ז.
19.	$\frac{OD}{AC} = \frac{DE}{CB} = \frac{OE}{AB}$	⇐ 18, יחסי הצלעות המתאימות במשולשים דומים.
20.	$OD \cdot AB = OE \cdot AC$ מ.ש.ל. ב'	⇐ 19.
21.	$\frac{S_{\triangle CAB}}{S_{\triangle DOE}} = 1.44$	נתון
22.	$\left(\frac{AB}{OE}\right)^2 = 1.44$	⇐ 21, במשולשים דומים, יחס הדמיון בריבוע שווה ליחס השטחים.
23.	$\left(\frac{2R}{R+AE}\right)^2 = 1.44 \quad / \sqrt{\ }$	

$$\frac{2R}{R+AE} = 1.2$$

$$2R = 1.2(R+AE)$$

$$2R = 1.2R + 1.2AE$$

$$0.8R = 1.2AE \quad /:1.2$$

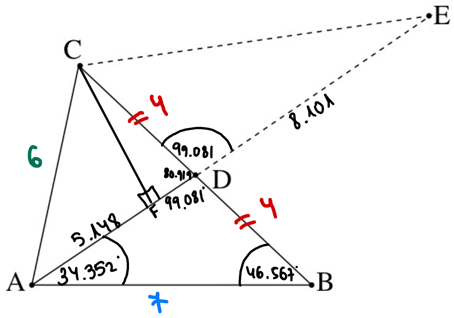
$$AE = \frac{2}{3}R$$

מ.ש.ל. ג'

5. בסרטוט שלפניכם מתואר משולש ABC שאורכי הצלעות שלו הם:

$AC = 6$, $AB = 7$, $BC = 8$.

AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.



א. (1) מִצאו את גודל הזווית $\sphericalangle ABC$.

(2) מִצאו את אורך התיכון AD.

(3) מִצאו את גודל הזווית $\sphericalangle BAD$.

הנקודה E נמצאת על המשך AD, כמתואר בסרטוט.

נתון: שטח המשולש CDE הוא 16.

ב. מִצאו את אורך DE.

מן הנקודה C הורידו אנך לתיכון AD, החותך אותו בנקודה F.

ג. מִצאו את היחס בין שטח המשולש CDF ובין שטח המשולש CDE.

א. (1) $\triangle ABC$

משפט הקוסינוסים:

$6^2 = 8^2 + 7^2 - 2\cdot 8\cdot 7\cdot \cos\sphericalangle ABC$

$-77 = -112\cdot\cos\sphericalangle ABC$

$0.6875 = \cos\sphericalangle ABC$

$\sphericalangle ABC = 46.567^\circ$

(2) $\triangle ABD$

משפט הקוסינוסים:

$AD^2 = 7^2 + 4^2 - 2\cdot 7\cdot 4\cdot\cos(46.567^\circ)$

$AD^2 = 26.5 \quad /\sqrt{\ }$

$AD = 5.148$

(3) $\triangle ABD$

משפט הקוסינוסים:

$4^2 = 5.148^2 + 7^2 - 2\cdot 5.148\cdot 7\cdot\cos\sphericalangle BAD$

$0.8256 = \cos\sphericalangle BAD$

$\sphericalangle BAD = 34.352^\circ$

ב. נתון:

$S_{\triangle CDE} = 16$

$S_{\triangle CDE} = \dfrac{CD\cdot DE\cdot \sin\sphericalangle CDE}{2} = 16$

זוויות קודקודיות שוות זו לזו ולכן:

$\sphericalangle CDE = \sphericalangle ADB$

סכום זוויות במשולש הוא 180° ולכן:

$\sphericalangle ADB = 180^\circ - 46.567^\circ - 34.352^\circ = 99.081^\circ$

$\Downarrow$

$\sphericalangle CDE = 99.081^\circ$

$S_{\triangle CDE} = \dfrac{4\cdot DE\cdot \sin(99.081^\circ)}{2} = 16$

$1.975\cdot DE = 16 \quad /:1.975$

$DE = 8.101$

אורך DE הוא 8.101.

ג. למשולשים $\Delta CDE, \Delta CDF$ גובה משותף CF.
מכאן, שיחס השטחים של משולשים כאלו שווה ליחס הבסיסים:

$$\frac{S_{\Delta CDF}}{S_{\Delta CDE}} = \frac{DF}{DE}$$

מסעיף ב': $DE = 8.101$

כעת נמצא את אורך DF:

$\underline{\Delta CFD:}$

$$\sphericalangle CDF = 180^\circ - 99.081^\circ = 80.919^\circ$$

(זוויות צמודות משלימות ל- 180°)

$$\cos(80.919^\circ) = \frac{DF}{4}$$

$$DF = 0.631$$

לכן:

$$\frac{S_{\Delta CDF}}{S_{\Delta CDE}} = \frac{DF}{DE} = \frac{0.631}{8.101} = 0.0779.$$

6. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{4x^2-1}{x^2-1}$.

א. **(1)** מִצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מִצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מִצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מִצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקִבעו את סוגה.

ג. סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=-f(x)+k$, k הוא פרמטר.

נתון: משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $g(x)$ היא $y=1$.

ד. **(1)** מִצאו את k .

(2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, ומהו סוגה?

א. (1) נזכור כי: $x^2-1\neq 0$

פתור: $x^2-1=0$

$x^2=1 \quad /\sqrt{\ }$

$x_1=1 \quad x_2=-1$

מכאן שתחום ההגדרה הוא: $x\neq 1,-1$

(2) אסימפטוטות אנכיות: $x=1,\ x=-1$

אסימפטוטה אופקית: $y=4$

(3) חיתוך עם ציר x $(y=0)$:

$$\frac{4x^2-1}{x^2-1}=0$$

$4x^2=1$

$x^2=\frac{1}{4} \quad /\sqrt{\ }$

$x_1=\frac{1}{2} \quad x_2=-\frac{1}{2}$

$(\frac{1}{2},0) \quad (-\frac{1}{2},0)$

חיתוך עם ציר y $(x=0)$:

$$f(0)=\frac{4\cdot 0^2-1}{0^2-1}$$

$f(0)=1$

$(0,1)$

חיתוך עם ציר x: $(-\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},0)$

חיתוך עם ציר y: $(0,1)$

ב. כדי למצוא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, נגזור את $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{8x(x^2-1) - 2x(4x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^3 - 8x - 8x^3 + 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}$$

נשווה את $f'(x)$ ל- 0:

$$\frac{-6x}{(x^2-1)^2} = 0 \quad / \cdot (x^2-1)^2$$

$$-6x = 0 \quad / : (-6)$$

$$x = 0$$

נמצא את שיעור ה- y של נקודת הקיצון ע"י הצבת $x=0$ ב- $f(x)$:

$$f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 - 1}{0^2 - 1} = 1.$$

$(0,1)$ - שמשמעה נק' החיתוך עם ציר ה- y היא גם נקודת הקיצון של $f(x)$.

נמצא את סוג הקיצון:

x	(-2)	-1	$(-\frac{1}{2})$	0	$(\frac{1}{2})$	1	(2)
y'	+		+	0	−		−
y	↗		↗	1	↘		↘

$$f'(-2) = \frac{-6 \cdot (-2)}{[(-2)^2 - 1]^2} = +$$

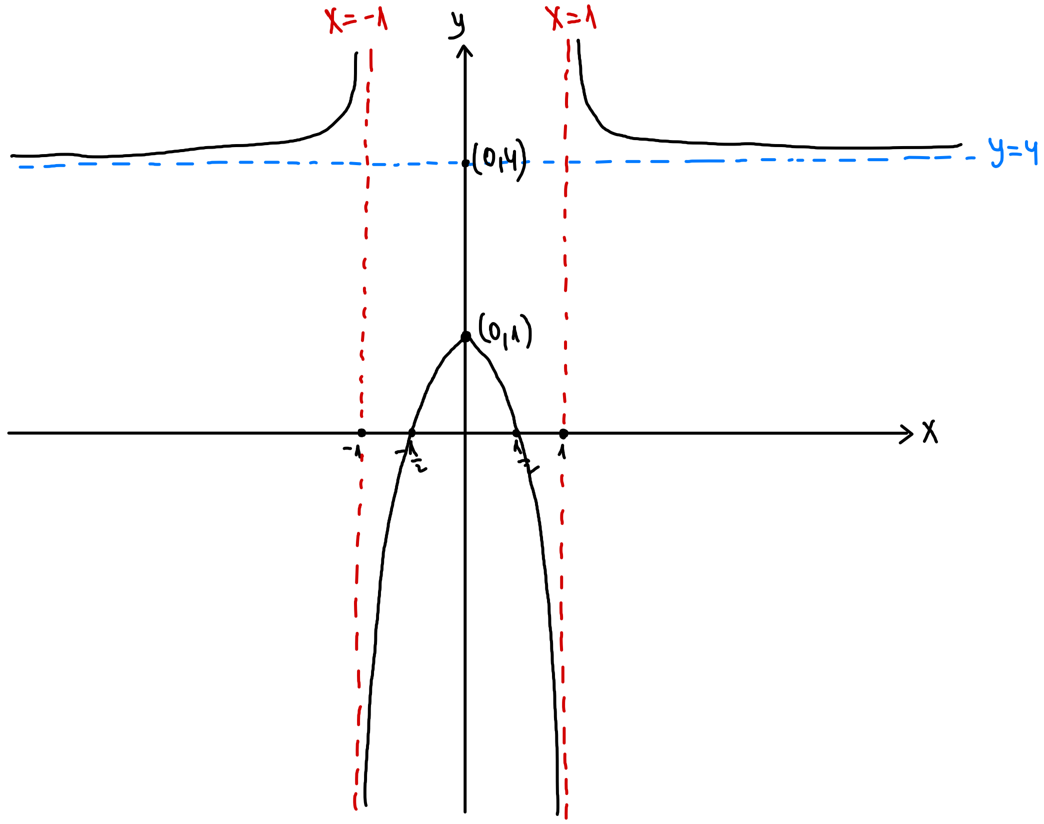
$$f'(-\tfrac{1}{2}) = \frac{-6 \cdot (-\frac{1}{2})}{[(-\frac{1}{2})^2 - 1]^2} = +$$

$$f'(\tfrac{1}{2}) = \frac{-6 \cdot \frac{1}{2}}{[(\frac{1}{2})^2 - 1]^2} = -$$

$$f'(2) = \frac{-6 \cdot 2}{(2^2-1)^2} = -$$

$(0,1)$ היא נקודת קיצון מסוג מקסימום בפונקציה $f(x)$.

ד. סקיצה של $f(x)$:



ה. (1) האסימפטוטה האופקית של $f(x)$ היא: $y=4$.

האסימפטוטה האופקית של $-f(x)$ היא: $y=-4$.

האסימפטוטה האופקית של $g(x)=-f(x)+k$ היא: $y=1$.

מכאן ש:

$$-4+k=1$$

$$k=5$$

(2) נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)=-f(x)+5$:

שיעור ה-x נשאר כמו שיעור ה-x של נק' הקיצון של $f(x)$ $(x=0)$.

$$g(0)=-f(0)+5$$

$$g(0)=-1+5=4$$

$$g(0)=4$$

תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ ושל $-f(x)$ הם הפוכים ולכן נקודת הקיצון היא מסוג מינימום.

נקודת הקיצון של $g(x)$ היא $(0,4)$, מינימום.

.7 נתונה הפונקצייה $f(x) = x - 2\cdot\sqrt{x+a}$, a הוא פרמטר.

גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה $(6, 0)$.

א. הַראו כי $a = 3$.

ב. מִצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

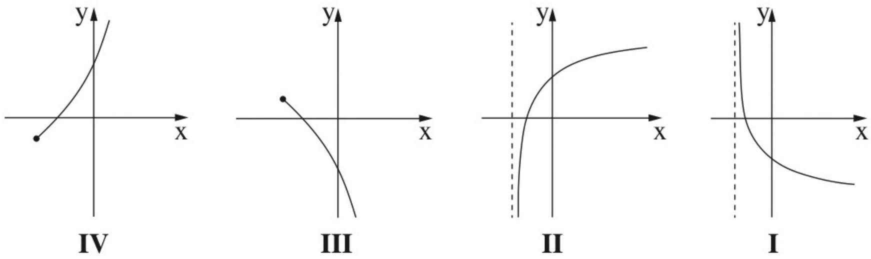
ג. מִצאו את שיעורי **כל** נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקִבעו את סוגן.

ד. סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. אחד מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

קִבעו איזה מהם, ונַמקו את הקביעה.

ו. מִצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, הישר $x = 1$, וציר ה־ x .



א. נתון כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודה (6,0). לכן: $f(6) = 0$.

$$f(6) = 6 - 2\cdot\sqrt{6+a} = 0$$

$$-2\cdot\sqrt{6+a} = -6 \quad |:(-2)$$

$$\sqrt{6+a} = 3 \quad /(\ )^2$$

$$6+a = 9$$

$$a = 3$$

בדיקה:

$$\sqrt{6+3} \stackrel{?}{=} 3$$

$$\sqrt{9} \stackrel{\checkmark}{=} 3$$

לסיכום: $a=3$

ב. תחום ההגדרה של $f(x) = x - 2\sqrt{x+3}$:

$$x+3 \geq 0$$

$$x \geq -3$$

ג. נקודת קיצון קצה:

$$f(-3) = -3-2\cdot\sqrt{-3+3}$$
$$f(-3) = -3-2\cdot\sqrt{0}$$
$$f(-3) = -3-2\cdot 0$$
$$f(-3) = -3$$
$$(-3,-3)$$

נקודת קיצון פנימית:

$$f'(x) = 1 - \frac{2\cdot 1}{2\sqrt{x+3}}$$
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$
$$f'(x) = 0$$
$$1 - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 0$$
$$1 = \frac{1}{\sqrt{x+3}} \quad /\cdot\sqrt{x+3}$$
$$\sqrt{x+3} = 1 \quad /(\ )^2$$
$$x+3 = 1$$
$$x = -2$$
$$f(-2) = -2-2\cdot\sqrt{-2+3}$$
$$f(-2) = -2-2\cdot\sqrt{1}$$
$$f(-2) = -2-2 = -4.$$
$$(-2,-4)$$

x	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$

$$f'(-2\tfrac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{-2.5+3}} = -$$

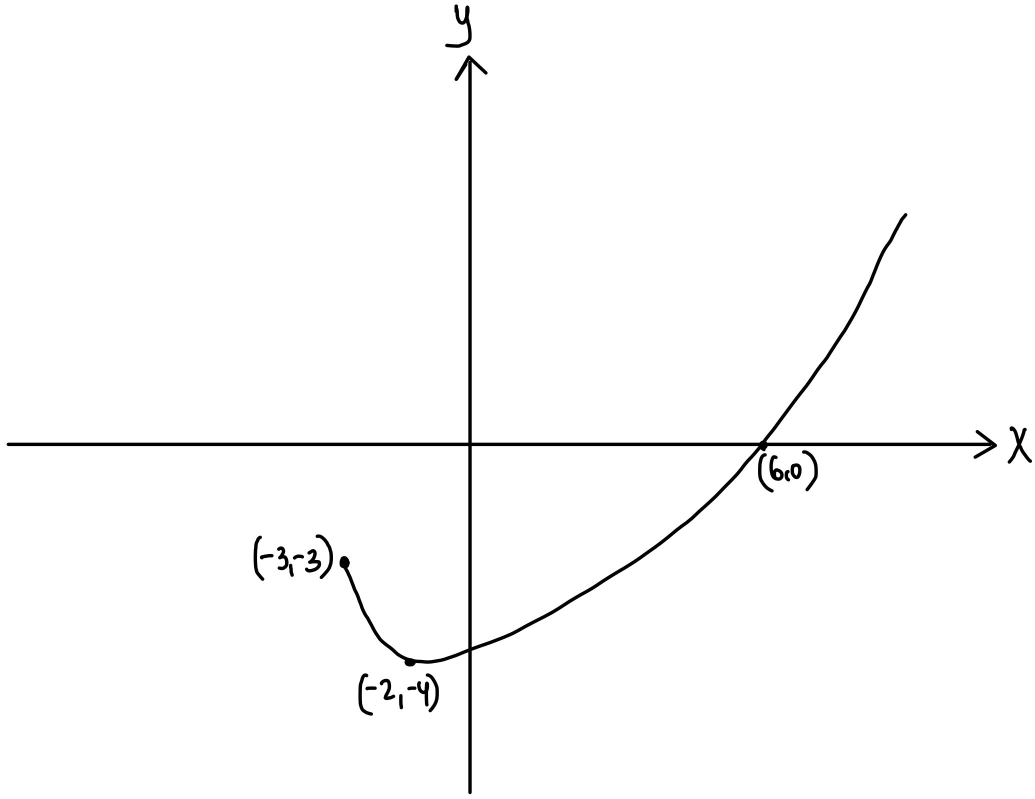
$$f'(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{0+3}} = +$$

נקודות הקיצון:

קיצון קצה $(-3,-3)$ מקסימום

קיצון פנימית $(-2,-4)$ מינימום

ד. סקיצה של $f(x)$:



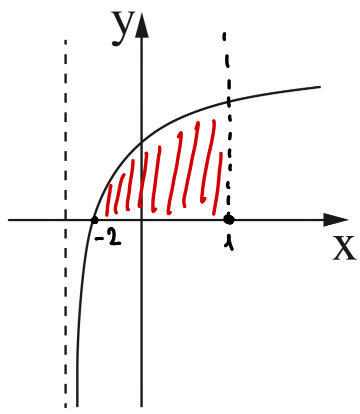
ה. גרף II הוא גרף הנגזרת $f'(x)$.

נימוק:

* ל- $f(x)$ נקודת קיצון פנימית כאשר $x=-2$. לכן, ל- $f'(x)$ צריכה להיות נקודת חיתוך עם ציר ה- x כאשר $x=-2$.
* על פי טבלת העליה והירידה בתחום $-3<x<-2$ הפונקציה $f(x)$ יורדת, ולכן $f'(x)$ שליליות, ובתחום $x>-2$ הפונקציה $f(x)$ עולה ולכן $f'(x)$ חיוביות.

גרף II הוא היחיד שמקיים תנאים אלו.

1. באדום - מסומן השטח המבוקש.



II

$$S = \int_{-2}^{1} [f'(x) - 0]\,dx = [f(x)]_{-2}^{1} = f(1) - f(-2)$$

$$f(1) = 1 - 2\sqrt{1+3} = -3$$
$$f(-2) = -2 - 2\sqrt{-2+3} = -4$$

$$S = f(1) - f(-2) =$$
$$-3 - (-4) = 1$$

גודל השטח המבוקש: $S = 1$

8. נתונות הפונקציות: $g(x) = x^2 , f(x) = -x^2 + 9x$.

נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון מעל לגרף הפונקציה $g(x)$.

מן הנקודה A מעבירים שני ישרים:

ישר המאונך לציר ה־ y וחותך אותו בנקודה C ,

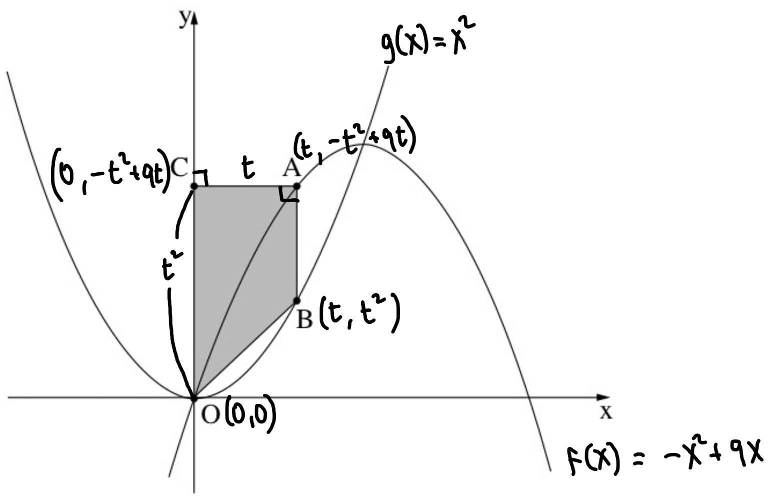
וישר המקביל לציר ה־ y וחותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B (ראו סרטוט).

הנקודה O היא ראשית הצירים.

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A .

א. הביעו באמצעות t את אורכי הקטעים CO, AC ו־ AB .

ב. מצאו את הערך של t שבעבורו שטח הטרפז ABOC הוא מקסימלי.



א. נסמן: $x_A = t$

A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, לכן: $y_A = -t^2+9t$

שיעורי הנקודה A: $(t,-t^2+9t)$.

C נמצאת על ציר y, לכן: $x_C = 0$.

הישר AC מאונך לציר y, לכן: $y_C = y_A = -t^2+9t$

שיעורי הנקודה C: $(0,-t^2+9t)$.

הישר AB מאונך לציר x, לכן: $x_A = x_B = t$.

הנקודה B נמצאת על הפונקציה $g(x)$, לכן $y_B = t^2$.

שיעורי הנקודה B: (t,t^2).

הנקודה O היא ראשית הצירים ולכן שיעוריה הם $(0,0)$.

אורך AC:

$x_A - x_C = t - 0 = t$

אורך AC: t

אורך AB:

$y_A - y_B = -t^2 + 9t - t^2$

$= -2t^2 + 9t$

אורך AB: $-2t^2 + 9t$

אורך CO:

$y_C - y_O = -t^2 + 9t - 0$

אורך CO: $-t^2 + 9t$

ב. שטח טרפז ABCO: $S = \frac{(AB + CO) \cdot AC}{2}$

פונקציית המטרה:

$$f(t) = \frac{(-2t^2 + 9t - t^2 + 9t) \cdot t}{2}$$

$$f(t) = \frac{(-3t^2 + 18t) \cdot t}{2}$$

$$f(t) = \frac{-3t^3 + 18t^2}{2}$$

כדי למצוא את t עבורו שטח הטרפז מקסימלי, נגזור את $f(t)$ ונשווה ל-0:

$$f'(t) = \frac{(-9t^2 + 36t) \cdot 2 - 0 \cdot (-3t^3 + 18t^2)}{2}$$

$$f'(t) = -9t^2 + 36t$$

$f'(t)=0 \Rightarrow$ $-9t^2+36t=0$

$-9t(t-4)=0$

$-9t=0$ $t-4=0$

$\cancel{t=0}$ $\boxed{t=4}$

נתון כי A ברביע ה-I
וכי $x_A=t$, לכן
t צריך להיות חיובי!

נבדוק את סוג הקיצון עבור $t=4$:

x	(1)	4	(5)
$f'(t)$	+	0	−
$f(t)$	↗		↘

$f'(1)=-9\cdot1^2+36\cdot1=+$

$f'(5)=-9\cdot5^2+36\cdot5=-$

עבור $t=4$, שטח המשולש הוא מקסימלי.