

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ב, 2022, גרסה א' שאלון: 35581

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

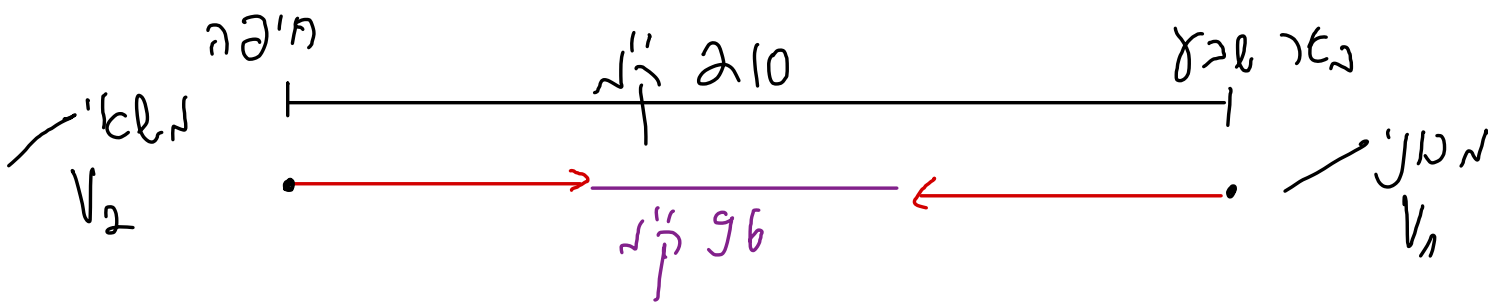
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. מכונית יצאה מביאר שבע לחיפה במהירות קבועה v_1 . באותו הזמן בדיוק יצאה משאית מחיפה לביאר שבע במהירות קבועה v_2 . המרחק בין חיפה לביאר שבע הוא 210 ק"מ. המשאית נעצרה בצד הדרך עקב תקלה, לפני שחלפה המכונית על פניה. באותו הזמן המרחק בין המשאית לבין המכונית היה 96 ק"מ.
 - א. הביעו באמצעות v_1 ו- v_2 את הזמן שחלף מרגע תחילת הנסיעה ועד שנעצרה המשאית בצד הדרך. זמן שהיית המשאית בצד הדרך היה גדול פי 1.5 מן הזמן שחלף מרגע יציאתה מחיפה עד לרגע עצירתה. המשאית יצאה שוב לדרך באותה המהירות, v_2 , בדיוק ברגע שבו חלפה המכונית על פניה.
 - ב. מצאו את היחס בין מהירות המכונית לבין מהירות המשאית.
 - ג. 128 דקות לאחר שיצאה המשאית שוב לדרך, היא הגיעה לביאר שבע. מצאו את מהירות המכונית ואת מהירות המשאית.

א. נעצר בשראון נתיב הלאה.



נסמן t - א זמן נסיעה המכונית
זה המשאית עד לרגע עצירה
המשאית

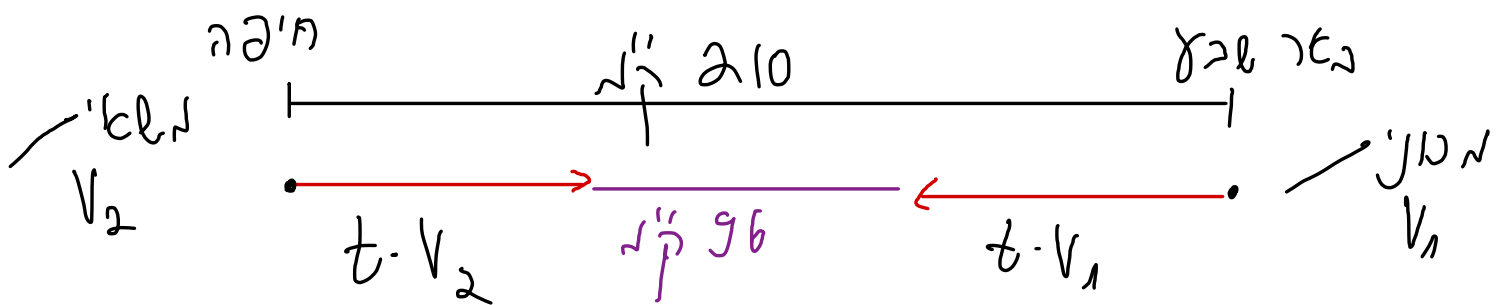


ניצטר בקלר: מהירות זמן = זרן
 ונרשום את הנתונים בטבלה

זרן	מהירות	זמן	מכונת
$t \cdot v_1$	v_1	t	מכונת
$t \cdot v_2$	v_2	t	הלא

נרשום את הזרכים של המכונת והלא

של הטרנס:



נתן לראש כי סכום הזרכים ה'ן
 20 ק"מ. הלואה התאמה:

נחידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעבודה יש פעם בחיים.
 אל תתפשר עליה.



$$t \cdot v_1 + t \cdot v_2 + 96 = 210$$

$$t \cdot v_1 + t \cdot v_2 = 114$$

$$t(v_1 + v_2) = 114 \quad \text{נבדוק א } t$$

$$t = \frac{114}{v_1 + v_2}$$

ג. הצמין לבו עברה המכונה א
 96 הקילומטרים שבינה לבין המשאית
 הינו $t = 1.5$, כלומר $1.5 \cdot \frac{114}{v_1 + v_2}$

ולכן משוואת הדירק תהיה:

$$1.5 \cdot \frac{114}{v_1 + v_2} \cdot v_1 = 96$$



$$\frac{171 \cdot V_1}{V_1 + V_2} = 96$$

$$171 \cdot V_1 = 96 \cdot V_1 + 96 \cdot V_2$$

$$75 \cdot V_1 = 96 \cdot V_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{32}{25}$$

יחס הנפחים:

ל. הזרקה לעברה הנשאית עם אקולה

$$\frac{114}{V_1 + V_2} \cdot V_2$$

לפי סעיף 1 $V_1 = 1.28V_2$, נ"כ:

$$\frac{114}{1.28V_2 + V_2} \cdot V_2 \Rightarrow 50$$



כאומר עק לקבלה עברה האלוא
50 קילומטרים היען 20 קילומטרים.
הזיון שנסעה לאחר העצירה היתה
160 קילומטרים.

זמן הנסיעה הינו 128 ק"מ $\frac{32}{15}$ ← 180

ולכן $\frac{32}{15} \cdot V_2 = 160$

$V_2 = 75$

$V_1 = 1.28 \cdot 75$

$V_1 = 96$

ולכן

מהירות → המכונית 96 קמ"ש
מהירות → האלוא 75 קמ"ש



2. סדרה I היא סדרה הנדסית איך-סופית שאיבריה הם a_1, a_2, a_3, \dots ומנתה היא $9 \cdot r^2$.
נתון: $0 < r < \frac{1}{3}$.

בין כל שני איברים בסדרה I הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם b_1, b_2, b_3, \dots ומנתה היא q.

א. הביעו את q באמצעות r.

ב. הסבירו מדוע שתי הסדרות I ו-II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום סדרה I.

ג. חשבו את q.

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 12.

ד. מצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב-5 ($b_5, b_{10}, b_{15}, \dots$).

ה. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ו. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

א (1) נתתי השאלה נ"ך והסוף כ"י

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_3, \quad Q_a = 9r^2, \quad Q_b = q$$

$$\frac{b_3}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

↓ ↓

$$q^2 = 9r^2$$

↙ ↘

$q = 3r$

~~$q = -3r$~~

מכיון שהיחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה



(2) ניתן כי $0 < r < \frac{1}{3}$ ולכן טווח הערכים
של a_n סדרה I היא $0 < r^2 < r < 0$.
כלומר $0 < Q_a < 1$

באילו אופן גם היא סדרה II היא
טווח הערכים $0 < 3r < 1 < 0$
כלומר $0 < Q_b < 1$

ולכן שתי הסדרות מתכנסות.

$$S_2 = \frac{4}{3} S_1$$

$$\frac{a_1}{1-3r} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a_1}{1-r^2}$$

$$\frac{1}{1-3r} = \frac{4}{3(1+r)(1-r)}$$



$$3(1+3r) = 4$$

$$3 + 9r = 4$$

$$r = \frac{1}{9}$$

$$q = 3r$$

$$q = \frac{1}{3}$$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 12$
 איברים
 במונחים
 של a_1

$$12 = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{9}}$$

$$10\frac{2}{3} = \frac{a_1}{3}$$

$$a_1 = 32$$

↓

$$b_1 = a_1 = 32$$

איבר n : $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = \frac{a_1}{3}$
 $q^2 = \frac{1}{9}$
 מנה



הסכום הנקרא ה'נ' סכום סדרה
 סדרה ג' / סדרה ג'
 $b_5, b_{10}, b_{15} \dots$

האיבר הראשון: $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 32 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{32}{81}$
 האינה $q^5 = \frac{1}{243}$

$$S = \frac{\frac{32}{81}}{1 - \frac{1}{243}}$$

$$S = \frac{48}{121}$$



$$\frac{b_5}{S_{b_6 \rightarrow \infty}} = \frac{b_5}{\frac{b_6}{1-q}} = \frac{b_5(1-q)}{b_6} = \frac{\cancel{b_5}(1-q)}{\cancel{b_5} \cdot q} \quad ?$$

$$\frac{b_5}{S_{b_6 \rightarrow \infty}} = \frac{1-q}{q} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

ה. נראה כי היחס $\frac{a_n}{S_{n+1 \rightarrow \infty}}$

אינו תלוי ב- n

$$\frac{a_n}{S_{n+1 \rightarrow \infty}} = \frac{a_n}{\frac{a_{n+1}}{1-q}} = \frac{a_n(1-q)}{a_{n+1}} = \frac{\cancel{a_n}(1-q)}{\cancel{a_n} \cdot q}$$



$$\frac{a_n}{S_{n+1} \rightarrow \infty} = \frac{1-q}{q}$$

מכיוון שהתוצאה אינה תלויה ב-n
 היחס הינו קבוע עבור כל סדרה.



3. נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תיקו והפסד. ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק. נסמן ב- p את ההסתברות שנטע תפסיד במשחק ($p > 0$). בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.
- נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא $4.5p$.
- מצאו את הערך של p .
 - נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.
 - מצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב-3 משחקים לפחות.
 - מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.
 - מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.
- (2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות. מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

ע. נניח באמצעות p את ההסתברות

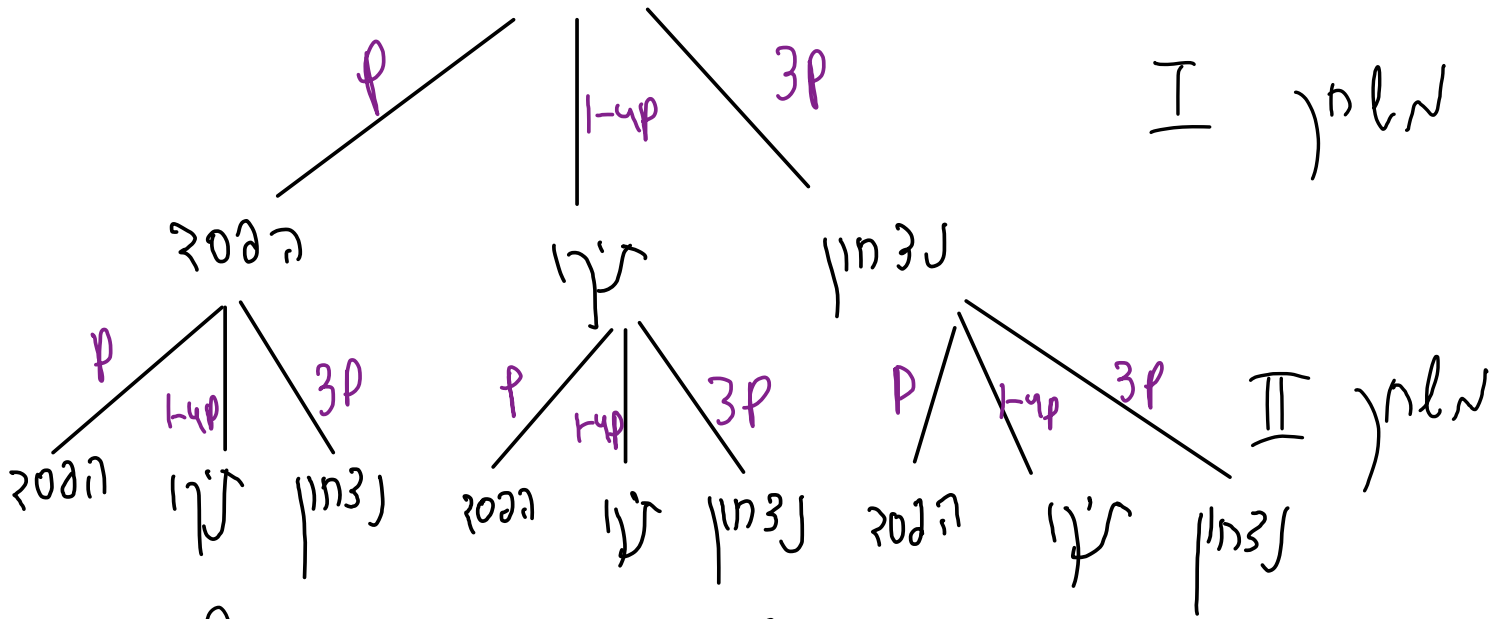
בהשחקן בוחר:

- p - ההסתברות להפסד
- $3p$ - ההסתברות לניצחון
- $1-4p$ - ההסתברות לתיקו

נתאר את המצבים האפשריים

בשני המשחקים לא חקרים ע"י ע"ה ההסתברות:





נתון כי ההסתברות לנצח משחק אחד אחר אחרון
הינה $4.5p$, ולכן ההסתברות לא לנצח באחד
משחקי הינה $1 - 4.5p$. נכתוב משוואה מתאימה:

$$(1 - 4p)^2 + p(1 - 4p) + p(1 - 4p) + p^2 = 1 - 4.5p$$

$$1 - 8p + 16p^2 + p - 4p^2 + p - 4p^2 + p^2 = 1 - 4.5p$$

$$9p^2 - 1.5p = 0$$

~~$p = 0$~~

$$p = \frac{1}{6}$$

נפסל מכיוון שנתון $p > 0$



ד. נחשב את ההסתברות שלק ש"מאל
בניסוח ברנולי (התפלגות בינארית), כאשר:

$$p_{\text{זנח}} = \frac{1}{2}, \quad 1-p = \frac{1}{2}, \quad n = 5$$

$$P\left(\begin{matrix} \text{זנח} \\ \text{לפני} \\ 3 \\ \text{משחקים} \end{matrix}\right) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.5$$

ההסתברות לזנח לבחור 3 משחקים
היא 0.5.

ה. ההסתברות שניצל זנח בלולו המשחקים
הראשונים לבחור:

$$P = P\left(\begin{matrix} \text{זנח} \\ \text{משחק} \\ \text{I} \end{matrix}\right) \cdot P\left(\begin{matrix} \text{זנח} \\ \text{משחק} \\ \text{II} \end{matrix}\right) \cdot P\left(\begin{matrix} \text{זנח} \\ \text{משחק} \\ \text{III} \end{matrix}\right) \cdot 1 \cdot 1$$

↑
כל תוצאה
במשחק
אם 4

↑
כל תוצאה
המשחק
אם 5



$$P(\text{תוצאה שלולה} \wedge \text{משחקים ראשונים} \wedge \text{לפחות}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

ההסתברות שגאע תוצאה אחר שלולה
היא שלחךים הראשונים לפחות הינה $\frac{1}{8}$.

3. (ו) ההסתברות שגאע לא תבסיד בהלחך

$$P(\text{נצחון}) + P(\text{תיקו}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

בוגר הינה

ההסתברות שגאע לא תבסיד בא 4 אחך
מתוך 5 משחקים הינה $\left(\frac{5}{6}\right)^5$,

$$\frac{3125}{7776}$$

שלולה



(2) ההסתברות שג'עלע הבסידה בהלחן

אחז לבחור:

$$P(\text{הבסידה אחז לבחור}) = 1 - P(\text{הבסידה לא}) = 1 - \frac{3125}{7776}$$

$$P(\text{הבסידה אחז לבחור}) = \frac{4651}{7776}$$

נרצה לחלק את ההסתברות שג'עלע

על פני 3 הלחנים האלוניים והס"ס בתקנו

בהלחן האחרון. מכ"ן לבסידה זה

מתואר מצד בו ג'עלע הבסידה לבחור בהלחן

אחז, ההבסידה צריך להיות בהלחן מס' 4.

$$P = P(\text{תקנו בהלחן 5}) \cdot P(\text{הבסידה 4}) \cdot P(\text{נצחון בהלחנים 1-3})$$

$$P = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{144}$$



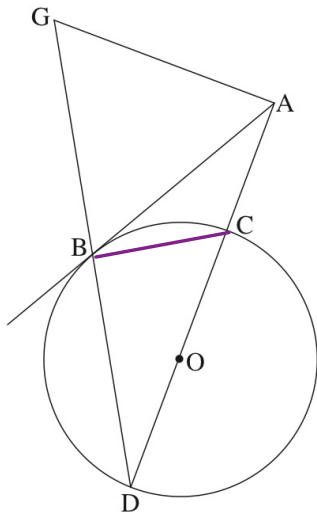
מכיוון שגילוינו של הסתברות מתני
 שלנו לחשב באופן הבא:

$$P = \frac{P(\text{נבחון קטלום} \rightarrow \text{המשתתפים הראשונים,} \\ \text{הבסק במשחק וביצי' וקרנו במשחק חמישי'})}{P(\text{הבסק אחד לבחור})}$$

$$P = \frac{\frac{1}{144}}{\frac{4651}{7776}}$$

$$P = \frac{54}{4651} \approx 0.01$$





4. נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.
 מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:
 הישר AB משיק למעגל בנקודה B,
 הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו-D,
 והישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט).
 הנקודות B, D ו-G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט.
 נסמן: $\angle ADB = \alpha$.
 א. הביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות α .
 ב. הוכיחו: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$.
 נתון: $AG = 8$, $AC = \frac{1}{2}DC$.
 ג. חשבו את R.
 נסמן ב-S את שטח המשולש BDC.
 ד. (1) הוכיחו: $\triangle ADG \sim \triangle BDC$.
 (2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.

נימוך	לענה
נתון	1. AB נשק
נתון $AG \perp AD$	2. $\angle GAD = 90^\circ$
נתון כי AD עובר דרך מרכז המעגל. הנ"ל ע"פ (ראו סרטוט בסרטוט)	3. $DC = 2R$ קוטר
נתון	4. BC נ"ע
זווית היקף = הנשען על קוטר א"כ 3.	5. $\angle ADB = \alpha$
זווית הנשען = הנשען א"כ 6.	6. $\angle DBC = 90^\circ - \alpha$
	7. $\angle GBC = 90^\circ - \alpha$



נימוך

חישוב לפי 3,15

יחס בועז נגד איתמר
קוונים לפי 13

מחזוריות של הבעיה
בועז נגד איתמר 9, 10, 16

חיבור קטעים לפי 3,17
הצבה לפי 17-20

חישוב לפי 2

מ.ל.ר (2)

נימוך

כל זווית שווה לאצטמו

לענה

17. $AC = R$

18. $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$

19. $AB = AG = 8$

20. $AD = 3R$

21. $\frac{8}{R} = \frac{3R}{8}$

22. $R = \frac{8}{\sqrt{3}}$

23. $\angle BDC = 5$

24. $\angle ADG = \angle BDC$



ני"ן
א"י 2,6
משפט קטן 25,24
מ.ג.ל. (1) (2)

חילוקי א"י 22,20

משפט פיתגורס ΔADG א"י 2

חילוקי א"י 28,27,16

יחס השטחים של המשולשים דומים
לוח אריבוע יחס הבצ"ע והתכ"א
א"י 26

חילוקי א"י 30,29

מ.ג.ל. (1) (2)

א"י

$$\angle GAD = \angle DBC = 90^\circ \quad 25$$

$$\Delta ADG \sim \Delta BDC \quad 26$$

$$AD = 3R = 8\sqrt{3} \quad 27$$

$$GD^2 = AD^2 + AG^2 \quad 28$$

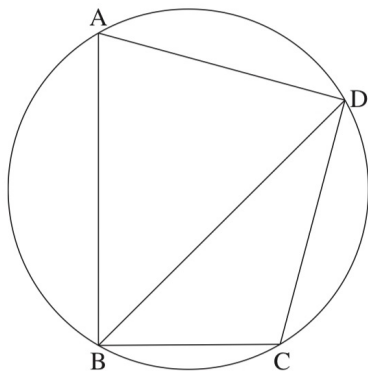
$$GD = 16 \quad 29$$

$$\frac{S_{ADG}}{S_{BDC}} = \left(\frac{GD}{DC}\right)^2 \quad 30$$

$$S_{ADG} = \left(\frac{16}{2 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}}}\right)^2 \cdot S \quad 31$$

$$S_{ADG} = 3S$$





5. מרובע ABCD חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט).

נסמן: $\angle DAB = \alpha$, היא זווית חדה.

א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו-R.

נתון: $BC = R$, $CD = R\sqrt{2}$.

ב. חשבו את α .

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

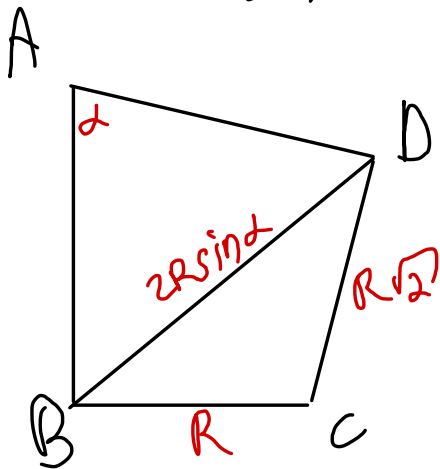
נסמן ב- h_1 את הגובה שירוד מקודקוד A במשולש ABD,

וב- h_2 את הגובה שירוד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.

ע. $\triangle ABD$ חוסם בהצל, נעזר בהלכת הסנוסים:

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = 2R \rightarrow BD = 2R \sin \alpha$$



ג. מהוא $\angle ABC$:

מכיוון שהמראה חוסם בהצל
כל זווית נגדית שלמה - 180°
אלכן $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$.

$\triangle BDC$: הלכת הקוסנוסים

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD$$



$$(2R \sin \alpha)^2 = R^2 + (R\sqrt{2})^2 - 2 \cdot R \cdot R\sqrt{2} \cos(180 - \alpha)$$

$$4R^2 \sin^2 \alpha = 3R^2 - 2\sqrt{2}R^2 (-\cos \alpha) \quad | : R^2$$

$$4 \sin^2 \alpha = 3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$4(1 - \cos^2 \alpha) = 3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$4 - 4\cos^2 \alpha = 3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$0 = 4\cos^2 \alpha + 2\sqrt{2} \cos \alpha - 1$$

נפתור משוואה ריבועית

$$\cos \alpha = 0.2588$$

$$\alpha = 75^\circ$$

$$\cos \alpha = 0.9659$$

~~$$\alpha = 165^\circ$$~~

אם כי ניתן

אך חזרה



ל. נסמן $\angle DBC = \angle DBA = \beta$
 ΔBCD : נלכט הסנוסי'ם

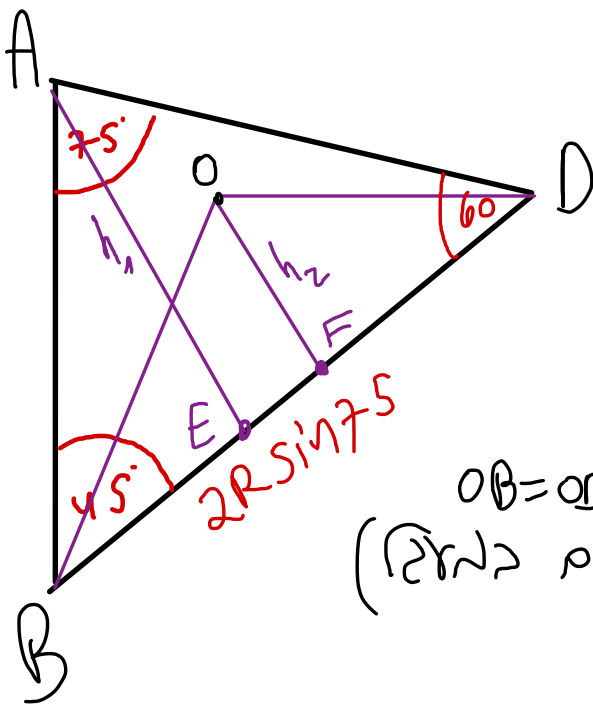
$$\frac{DC}{\sin \beta} = 2R \rightarrow \frac{R\sqrt{2}}{\sin \beta} = 2R \rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta = 45^\circ$$

~~$$\beta = 135^\circ$$~~

$$\angle ABD = 45^\circ$$

(כפס)



? $\angle BOD = 2\angle BAD = 150^\circ$

צו'ם נרנצ' גזורה ב' 2
 נצו'ם היקפ' הינלצ' ער
 אומ' הינל' -

ΔBOD שווה שול' לוק' "ם - $OB = OD = R$
 (רדיוסי'ם במעגל)

אכן צו'ם הבסי'ם

$$\angle OBD = \angle ODB = 15^\circ$$



$$\frac{OF}{OD} = \sin 15 \rightarrow h_2 = R \sin 15 \quad : \triangle OFD$$

$$\frac{AD}{\sin 45} = 2R \rightarrow AD = R\sqrt{2} \quad : \triangle ABD$$

$$\frac{AE}{AD} = \sin 60 \rightarrow \frac{h_1}{R\sqrt{2}} = \sin 60 \quad : \triangle ADE$$

$$h_1 = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{R \sin 15} = 3 + \sqrt{3} = 4.732$$



6. נתונה הפונקצייה $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את התשובה.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

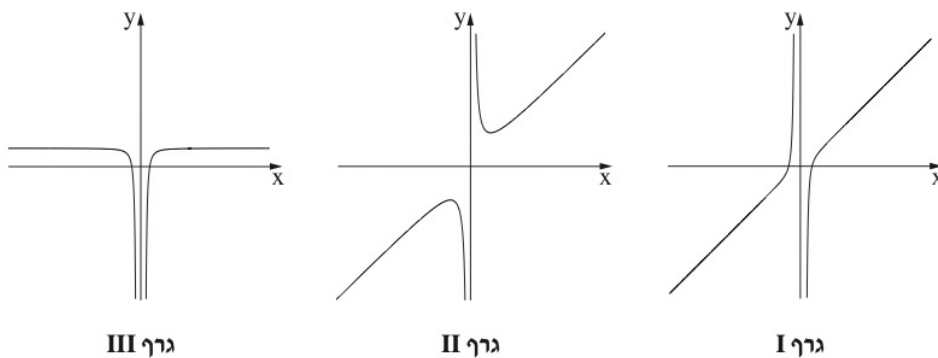
נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו- $g(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו- $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$.

הפונקציות $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ב. כל אחד מן הגרפים III-I שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$.

לכל אחת מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.



ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{4}$ ו- $x = 4$.

ה. נתון: $1 < a$ הוא פרמטר. חשבו את $\int_{\frac{1}{a}}^a g(x) dx$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = \int_1^x f'(t) dt$. נתון כי הפונקצייה $h(x)$ מוגדרת בתחום $1 \leq x$.

ו. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $h(x)$, וקבעו את סוגה.

א. (1) $x \neq 0$

(2) $f(-x) = -2x - \frac{2}{x} = -\left(2x + \frac{2}{x}\right)$

$f(-x) = -f(x)$ ולכן הפונקציה אי-זוגית



(3) נטל, תבינה

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 : 0 = 2x^2 - 2$$

$$x^2 = 1 \quad \sqrt{\quad}$$

$$x = 1 \qquad x = -1$$

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$	
$f'(x)$	+	-	-	+	$f'(2) = +$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	$f'(\frac{1}{2}) = -$
					$f'(-\frac{1}{2}) = -$
					$f'(-2) = +$

ט"ה: $x < -1$ או $x > 1$

ר"ה: $-1 < x < 0$ או $0 < x < 1$



ב. הגרף היחיד המתאים לתחומי העלייה והירידה

נסעו קודם של הבונקציה $f(x)$ היו גרף II

ניסו גרף גרף הערכים נסעו קודם, לביה

ניסו לראות כי הגרף המתאים לתחומי

החובו והשלילי של הבונקציה $f'(x)$ היו גרף III

ניסו לראות גרף I של גרף $g(x)$

ג. $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$, $g(x) = 0$

$$0 = f(x) \cdot f'(x)$$

$(-1, 0)$

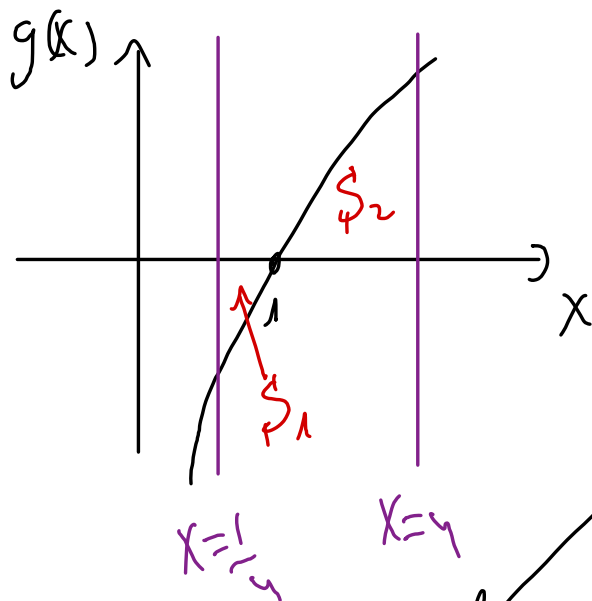
$(1, 0)$

$f(x) = 0$
לפי גרף II
אין פתרונות

$f'(x) = 0$
לפי גרף III
 $x = -1$ $x = 1$



2. ניסו ריבוע חלקו החזק' & אז I



נתלב אר שני
הלב ח'ם S1, S2

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 -f(x) \cdot f'(x) dx + \int_1^4 f(x) \cdot f'(x) dx$$

$$-\left[\frac{f(x)^2}{2}\right]_{\frac{1}{4}}^1 + \left[\frac{f(x)^2}{2}\right]_1^4$$

$$-\frac{[f(1)]^2}{2} + \frac{[f(\frac{1}{4})]^2}{2} + \frac{[f(4)]^2}{2} - \frac{[f(1)]^2}{2}$$

$$-8 + 36.125 + 36.125 - 8 = 56.25$$

י"ר



$a > 1$ ה.

$$\frac{1}{a} \int_{\frac{1}{a}}^a g(x) dx = \left[\frac{[f(x)]^2}{2} \right]_{\frac{1}{a}}^a$$

$$\frac{[f(a)]^2}{2} - \frac{[f(\frac{1}{a})]^2}{2}$$

$$\frac{(2a + \frac{2}{a})^2}{2} - \frac{(2 \cdot \frac{1}{a} + \frac{2}{\frac{1}{a}})^2}{2}$$

$$\frac{(2a + \frac{2}{a})^2}{2} - \frac{(\frac{2}{a} + 2a)^2}{2} = 0$$



$$h(x) = \int_1^x f'(t) dt \rightarrow h(x) = f(t) \Big|_1^x$$

$$h(x) = f(x) - f(1)$$

$$h'(x) = f'(x) - 0$$

$$0 = f'(x)$$

אם סעיף א' : $x=1$ ~~$x=-1$~~ (בסל כי)

כאן $x \geq 1$

מבטאנו כי זהו III הינו הנחה של $f'(x)$ זכוי הנק' בה $x=1$ $f'(x)$ אזור התחום שלילי רחובי. מכיון ש- $f'(x) = f'(x)$ אזור

$x=1$ גם $f'(x)$ אזור התחום

שלילי, רחובי, כלומר נקודת מינימום.



$$h(1) = f(1) - f(1) = 0$$

נקודת קיצון (1, 0) היא נקודת מינימום.



7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2(\cos x)^2 + \sin 2x}{2 \cos x}$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) הסבירו מדוע לפונקצייה $f(x)$ אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x .
 (3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
- ב. (1) הראו כי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ מתקיים: $f'(x) = \cos x - \sin x$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 ג. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 (2) k הוא מספר. מצאו את כל ערכי k שבעבורם יש למשוואה $f(x) = k$ פתרון יחיד (בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$).
 ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי שני הישרים $x = \frac{3}{4}\pi$ ו- $x = \frac{5}{4}\pi$.

א. (1) נחום הלגרה: $2 \cos x \neq 0$

$\cos x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

ובנחום הלגרה: $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

אכן נחום ההלגרה הלגרה

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$



(2) ציבור צרני x הנאבסם אר הוכנה, נבחר
האם הם אסימטרוה אנכיים. נבטל אר
הפונקציה:

$$f(x) = \frac{2(\cos x)^2 + 2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos x}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{2 \cos x} (\cos x + \sin x)}{\cancel{2 \cos x}} = \cos x + \sin x$$

ביטוי של הקבוצה נ"ס להצבה אר צרני x
הנאבסם אר הוכנה, כלומר נקובר הנקודות
א' רצ'בא - עוקו ("חוריים") ולא באסימטרוה.
צרני ה"חור'':

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \quad \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$$



(3) נאכל להשתמש בביטוי האבויטט עבור $f(x)$

בתחום ההלזרה: $f(x) = \sin x + \cos x$

נק' חיתוך עם ציר x : $f(x) = 0$

$$0 = \sin x + \cos x \rightarrow \sin x = -\cos x \rightarrow \tan x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

הפתרונות בתחום ההלזרה: $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$$\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) \quad \left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$$

נק' חיתוך עם ציר y : $x = 0$

$$f(0) = 1 \quad (0, 1)$$



ב. (1) נמצא את הפונקציה המבוקשת:

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

(2) נציב $f'(x) = 0$:

$$0 = \cos x - \sin x \rightarrow \sin x = \cos x \rightarrow \tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

גב-רואן בתחום ההלכה:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

נימצא נגזרת ע"י ו'לכה:

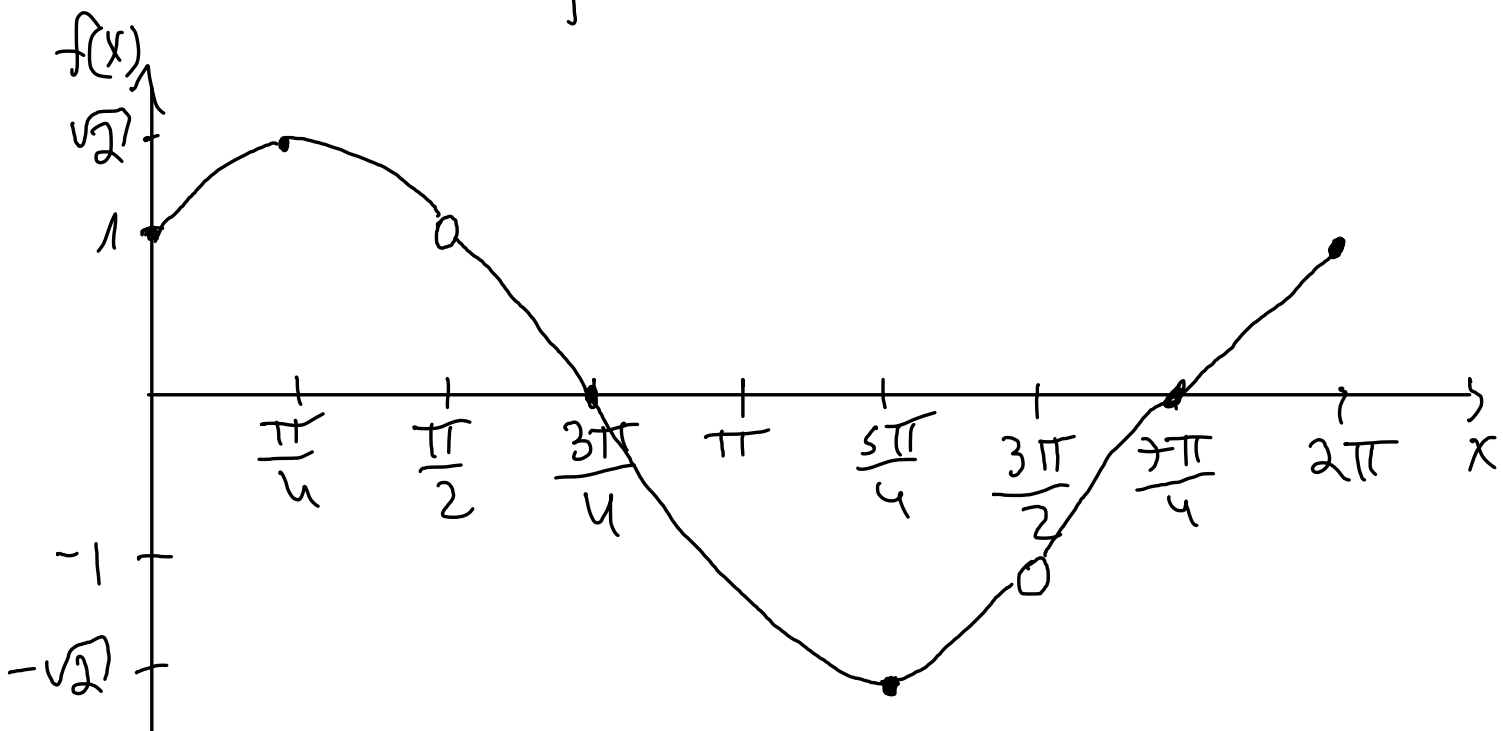
x	$0 < x < \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
$f'(x)$	+	-	-	+	-
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	↘
	$f'(\frac{\pi}{5}) = +$	$f'(\frac{\pi}{3}) = -$	$f'(\pi) = -$	$f'(\frac{5\pi}{3}) = +$	$f'(\frac{7\pi}{4}) = -$



נמצא א שרני y הנקודות קצה
תחום ההלכה: $f(0) = 1$, $f(2\pi) = 1$

נקודות הק' ו"ל:
 $(0, 1)$ min , $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ max , $(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2})$ min , $(2\pi, 1)$ max

ג. (ו) נשאלת ל"פ של סעיף התקירה אר כה:



נחידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
 אל תתפשר עליה.



(2) $f(x) = k$ נ"צ ישר המקביל לציר x.

ניצור בקו מסווג קוים אנכיים נ"צ ישר המקביל לציר x יחדיו את הבוטקנה הנקודה אחת בלבד עבור $k = -1$, $k = -\sqrt{2}$, $k = \sqrt{2}$

2. עלינו לחשב את השטח המוגבל על ידי

ואי, ציר x, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

בעזרת טבלה השל"ה והירידה מסעיף (2) נ"ן לראות כי בתחום הנ"ל $f(x)$ שלילי כלומר מתחת לציר x.

אכן השטח המוגבל לחישוב השטח יהיה:

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} -f(x) dx = -f(x) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$



$$-f\left(\frac{5\pi}{a}\right) + f\left(\frac{3\pi}{a}\right) = 0 + \sqrt{2}$$

הגלגל ה'יין' $\sqrt{2}$ יח'ר.



8. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה־x.

נתון כי שיעור ה־x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה־x של נקודות החיתוך של הפונקצייה $f(x)$ עם הפונקצייה $g(x)$. נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה A. t הוא פרמטר.

ב. הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB.

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB.

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נמקו את התשובה.

$$f(x) = x^3 \quad g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^3}$$

ע. (1) תחום הגדרה:

$$f(x): x \geq 0$$

$g(x)$: ניצח שהקב"ל תחת העלוכל יהיה
א' - שלילי ולכן $x \geq 0$

$$(2) f(x) = g(x)$$

$$x^3 = \sqrt{x^3} \quad | \cdot (\)^2 \rightarrow x^6 = x^3 \rightarrow x^6 - x^3 = 0$$



$$x^3(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

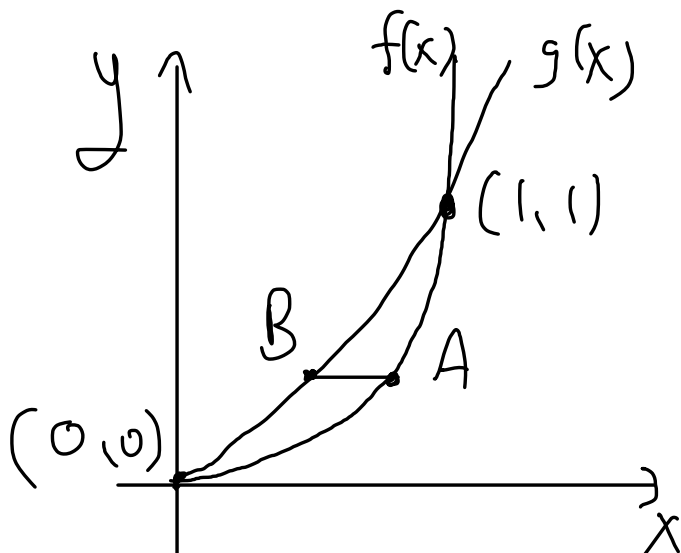
$$(0, 0)$$

$$(1, 1)$$

ג. נניח $0 < x < 1$ ונבדוק את התחום $0 < x < 1$.

כאן $g(0.5) > f(0.5)$, כלומר בתחום זה $g(x) > f(x)$.

נחלק את התחום $0 < x < 1$ ל-2 חלקים.



$$x_A = t$$

$$A(t, t^3)$$



$y = y_A = t^3 \in X$ מקבלים צ'ר AB

נביע געאטער t \rightarrow X_B \rightarrow צ'ר χ_B

ש'יאו y_B \rightarrow $g(x)$ \rightarrow $t^3 = \sqrt{x^3} \rightarrow t^6 = x^3 \rightarrow x = t^2$

$B(t^2, t^3)$

$X_A - X_B = t - t^2 = AB$ אורק

$S_{A \circ B} = \frac{1}{2} AB \cdot y_A \cdot t$

$S(t) = \frac{1}{2} (t - t^2) \cdot t^3 = \frac{1}{2} t^4 - \frac{1}{2} t^5$

$S'(t) = 2t^3 - \frac{5}{2}t^4$ פ'ס'ר:



$$0 = t^3 \left(2 - \frac{5}{2}t \right)$$

~~$t = 0$~~

$t = 0.8$

לא קרום

נוכח מקסימום בעצמו נלמד אלן"ה:

$$S''(t) = 6t^2 - 10t^3$$

$$S''(0.8) = -1.28$$

ואכן עבור $t = 0.8$ מתקבל שזה מקסימום.

נמצא א — השלח ע"י הצבה בגורם $S(t)$:

$$S'(0.8) = 0.04096$$

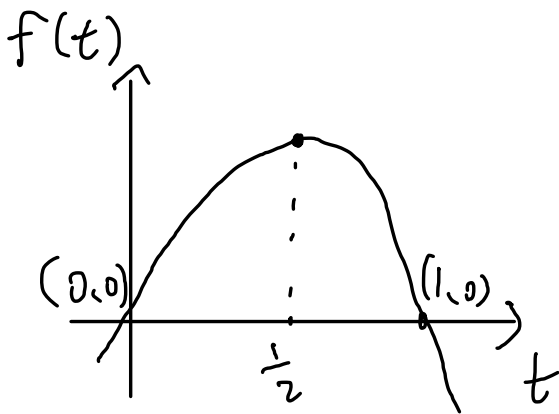
'א"כ



3. נמצא את אורכי הקטעים של AB.

$$f(t) = t - t^2$$

ה"צוג הזר" של $f(t)$ הינו ברבוע הבונה ששטחו הוא $\frac{1}{2}$



כאשר אורכי הקטעים של AB מתקבל

$$t = \frac{1}{2}$$

ולטחון הקטעים של ΔAOB מתקבל

$$t = 0.8$$

