# שאלון 35572 מועד
# קיץ תשפ״ב

**מורים יקרים,**
**החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.**
**להלן השינויים:**
**שאלון 182 (801) שונה ל- 172**
**שאלון 381 (802) שונה ל- 371**
**שאלון 382 (803) שונה ל- 372**
**שאלון 481 (804) שונה ל- 471**
**שאלון 482 (805) שונה ל- 472**
**שאלון 581 (806) שונה ל- 571**
**שאלון 582 (807) שונה ל- 572**

**בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35572 מועד קיץ תשפ״ב.**

**תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.**

**א. נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ, כלומר קטע המרכזים שווה לסכום הרדיוסים.**

**משוואת מעגל** $\mathrm{M}$ **היא** $(x-a)^2+y^2=r^2$ **, ומכאן שמרכז מעגל הוא** $\mathrm{M}(a,0)$ **, ורדיוסו הוא** $r$.

**משוואת מעגל** $\mathrm{N}$ **היא** $(x-13)^2+y^2=R^2$ **, ומכאן שמרכז מעגל הוא** $\mathrm{N}(13,0)$ **, ורדיוסו הוא** $R$.

**אורך קטע המרכזים הוא** $9$ **, והיחס בין אורכי הרדיוסים הוא** $r:R=1:2$ .

**מכאן, ש-** $r=3$ **ו-** $R=6$ **, משוואת מעגל** $\mathrm{N}$ **היא** $(x-13)^2+y^2=36$.

**אם** $a>13$ **אז** $a=13+9=22$ **ומשוואת מעגל** $\mathrm{M}$ **היא** $(x-22)^2+y^2=9$.

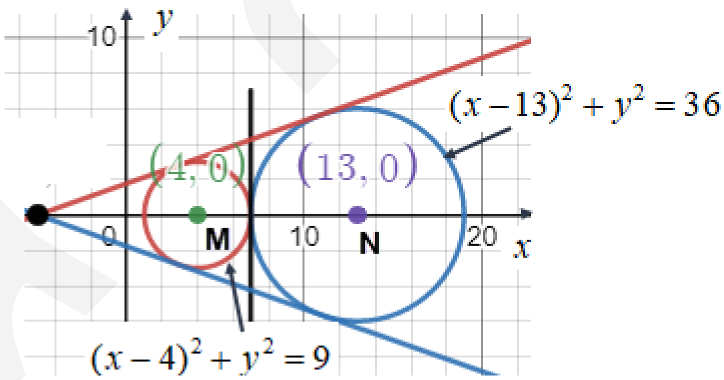
**אם** $a<13$ **אז** $a=13-9=4$ **ומשוואת מעגל** $\mathrm{M}$ **היא** $(x-4)^2+y^2=9$

**תשובה: משוואת מעגל** $\mathrm{N}$ **היא** $(x-13)^2+y^2=36$.

**משוואת מעגל** $\mathrm{M}$ **היא** $(x-22)^2+y^2=9$ **, או** $(x-4)^2+y^2=9$.

**ב. משיק אחד עובר בנקודת ההשקה, ומאונך לקטע המרכזים, שהוא ציר ה-** $x$ .

**שני משיקים נוספים עוברים, מעל לשני המעגלים, או מתחת לשניהם.**




**תשובה: הסרטוט מעל.**

**ג. המשיק, המאונך לציר ה-** $x$ **עוברת בנקודת ההשקה** $(7,0)$ **, המחלקת את קטע המרכזים ביחס** $1:2$ .

**או, לפי שנקודת ההשקה** $x_{\mathrm{M}}+r=4+3=7$ .

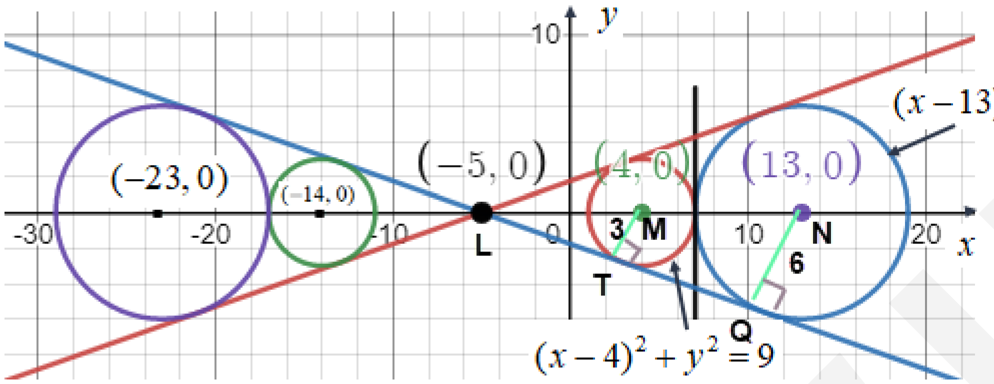
**תשובה: משוואת המשיק, העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים, היא** $x=7$ .

ד. עקב הסימטריה לציר ה- $x$ שני המשיקים האחרים נחתכים בנקודה שעל ציר ה- $x$ .

כמו כן, כיוון ש $m=\tan\alpha$ , וציר ה- $x$ חוצה את הזווית שבין שני הישרים,

הרי ששיפועי המשיקים יהיו נגדיים, כלומר $m_1=-m_2$ , ועקב הסימטריה $n_1=-n_2$ .

נעלה סרטוט, שמסביר גם את סעיף ה.




המשיקים מאונכים לרדיוס בנקודת ההשקה, ולכן $MT \parallel NQ$ .

כיוון ש- $MT:NQ=1:2$ , הרי ש- $MT$ הוא קטע אמצעים ב- $\Delta LNQ$ , ולכן $LM=LN$ .

מכאן ש- $L(-5,0)$ על פי נוסחת אמצע קטע.

נציב במשוואת המשיק: $m\cdot(-5)-0+n=0 \quad \rightarrow n=5m$

כאמור: $m=\tan\alpha$ , ולכן $\Delta MLT:\sin\sphericalangle MLT=\frac{MT}{ML}=\frac{3}{9} \quad \rightarrow \sphericalangle MLT=19.47^\circ \quad \rightarrow m=-0.3536$

(בחרנו שיפוע שלילי, כי המשיק יורד ) ובהתאם: $n=5m=5\cdot(-0.3536) \quad \rightarrow n=1.7678$ .

והפתרון השני, למשיק העובר מעל הוא עם סימנים נגדיים.

פתרון חלופי: משפט פיתגורס ( $\Delta MLT$ ) $LT=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$

ואז: $m=\tan\alpha=\frac{3}{6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}$ , וכמובן ניקח שיפוע שלילי, כי המשיק יורד.

המשך זהה.

פתרון חלופי, על פי מרחק נקודה מישר, כלומר אורך הרדיוס.

$n=5m \quad \rightarrow mx-y+5m=0 \quad \rightarrow -mx+y-5m=0$

$3=+\frac{-m\cdot4+0-5m}{\sqrt{m^2+1}}$ , כי מרכז המעגל מעל למשיק, והמקדם של ה- $y$ חיובי.

$3\sqrt{m^2+1}=-9m \quad \rightarrow \sqrt{m^2+1}=-3m \quad \rightarrow m^2+1=9m^2 \quad \rightarrow m=\pm\frac{1}{\sqrt{8}} \quad \rightarrow m=-\frac{1}{\sqrt{8}}$

הפתרון השני נפסל, כי אינו מקיים את המשוואה שלפני ההעלאה בריבוע.

המשך זהה.

**<u>פתרון חלופי אחרון</u>: מלכתחילה, שתי משוואות על פי מרחק נקודה מישר.**

$$\begin{cases} \mathrm{I}: \quad 3 = +\dfrac{-m\cdot 4+0-n}{\sqrt{m^2+1}} \\ \mathrm{II}: \quad 6 = +\dfrac{-m\cdot 13+0-n}{\sqrt{m^2+1}} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}: \quad 2 = \frac{-13m-n}{-4m-n}$$

$$-8m-2n = -13m-n$$

$$\boxed{5m=n}$$

$$3 = \frac{-4m-5m}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$3\sqrt{m^2+1} = -9m \quad \rightarrow \sqrt{m^2+1} = -3m \quad \rightarrow m^2+1 = 9m^2 \quad \rightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{8}} \quad \rightarrow m = -\frac{1}{\sqrt{8}}$$

**הפתרון השני נפסל, כי אינו מקיים את המשוואה שלפני ההעלאה בריבוע.**

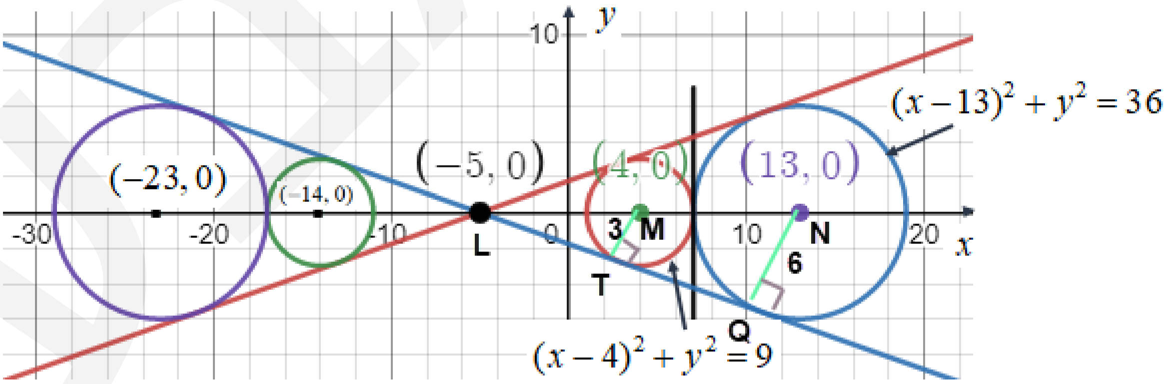
**המשך זהה.**

**תשובה:** $m=-0.3536=-\frac{1}{\sqrt{8}}$ **ו-** $n=-1.7678=-\frac{5}{\sqrt{8}}$ **, או** $m=0.3536=\frac{1}{\sqrt{8}}$ **ו-** $n=1.7678=\frac{5}{\sqrt{8}}$

**ה. עקב הסימטריה לציר ה-** $x$ **, ולנקודה** $(-5,0)$ **, נקבל שני מעגלים גם משמאל ל-** $(-5,0)$,

**כאשר מרכזיהם גם במרחק** $9$ **ו-** $18$ **מהנקודה** $(-5,0)$**, כלומר ב-** $(-14,0)$ **וב-** $(-23,0)$ **.**

**תשובה: כן, עבור** $t=-14$ **ו-** $k=-23$**.**



**א. נתונות ארבע נקודות, הנמצאות באותו מישור:** $\mathrm{A}(4,p,-1)$ , $\mathrm{B}(7,5,5)$ , $\mathrm{C}(1,-1,2)$ , $\mathrm{D}(-2,5,-4)$ .

**נמצא את משוואת המישור, ולאחר מכן נציב את שיעורי** $\mathrm{A}$ **למציאת ערך הפרמטר** $p$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\underline{\mathrm{C}}-\underline{\mathrm{B}}=\underline{x}=(-6,-6,-3)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\underline{\mathrm{D}}-\underline{\mathrm{B}}=\underline{x}=(-9,0,-9)$$

**ההצגה הפרמטרית של המישור היא:** $\underline{x}=(7,5,5)+t(2,2,1)+s(1,0,1)$ .

$$\left.\begin{array}{l}(a,b,c)\cdot(2,2,1)=0 \quad \rightarrow 2a+2b+c=0 \quad \rightarrow 2\cdot1+2b-1=0 \quad \rightarrow b=-\frac{1}{2}\\ (a,b,c)\cdot(1,0,1)=0 \quad \rightarrow a+c=0 \quad \rightarrow a=1,c=-1 \quad \uparrow\end{array}\right\} a=2,b=-1,c=-2 .$$

**משוואת המישור היא:** $2x-y-2z+d=0$ .

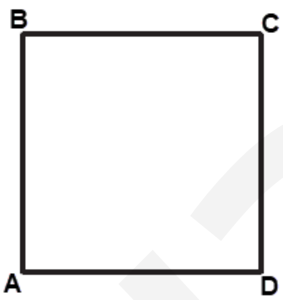
**נציב את שיעורי הנקודה** $\mathrm{B}(7,5,5)$ **:** $2\cdot7-5-2\cdot5+d=0 \quad \rightarrow d=1$ .

**תשובה: משוואת המישור** $\mathrm{ABCD}$ **היא** $2x-y-2z+1=0$ .

**ב. נציב את שיעורי** $\mathrm{A}$ **למציאת ערך הפרמטר** $p$

**נציב את שיעורי הנקודה** $\mathrm{A}(4,p,-1)$ **:** $2\cdot4-p-2\cdot(-1)+1=0 \quad \rightarrow \boxed{p=11}$ .

**תשובה:** $p=11$ .




**ג.. נוכיח כי המרובע** $\mathrm{ABCD}$ **הוא ריבוע.**

$\mathrm{A}(4,11,-1)$ , $\mathrm{B}(7,5,5)$ , $\mathrm{C}(1,-1,2)$ , $\mathrm{D}(-2,5,-4)$ .

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\underline{\mathrm{C}}-\underline{\mathrm{B}}=\underline{x}=(-6,-6,-3)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\underline{\mathrm{B}}-\underline{\mathrm{A}}=\underline{x}=(3,-6,6)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\underline{\mathrm{C}}-\underline{\mathrm{D}}=\underline{x}=(3,-6,6)$$

**מכאן ש-** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ **, ולכן צלעות נגדיות שוות (באורך) ומקבילות (כי אותו כיוון) והמרובע הוא מקבילית** .

**הסבר משלים: על פי סעיף א, הנקודות** $\mathrm{B}$ , $\mathrm{C}$ **ו-** $\mathrm{D}$ **לא נמצאות על אותו ישר.**

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{3^2+(-6)^2+6^2}=9$$

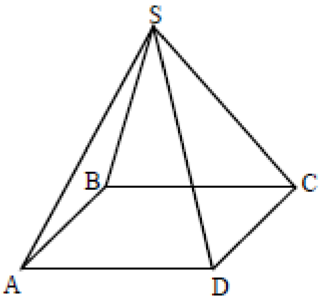
$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+(-3)^2}=9$ **, ולכן** $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}$ **והמקבילית היא מעוין.**

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-6,-6,-3)\cdot(3,-6,6)=-18+36-18=0$ **, ולכן** $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ **, והמעוין הפך לריבוע.**

**תשובה: הוכחנו כי המרובע** $\mathrm{ABCD}$ **הוא ריבוע.**

ד. הנקודה $S$ היא קודקוד של הפירמידה $ABCDS$, שנפחה הוא $81$ .

שטח ריבוע הבסיס, שטח $ABCD$, הוא $|\overrightarrow{AB}|^2 = 9^2 = 81$




$$V_{ABCDS} = \frac{S_{ABCD} \cdot h}{3}$$

$$81 = \frac{81 \cdot h}{3}.$$

$$\boxed{h = 3}$$

הקודקוד $S$ מונח על המקצוע $SC$ ,

שההצגה הפרמטרית שלו היא $\underline{x} = (0,-4,1) + t(1,3,1)$

נקודה טיפוסית על $SC$: $(t, -4+3t, 1+t)$ .

על פי נוסחת מרחק נקודה ממישור ($2x - y - 2z + 1 = 0$), כאשר נתון המרחק $h = 3$

$$3 = \frac{|2 \cdot t - (-4+3t) - 2 \cdot (1+t) + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}$$

$$3 = \frac{|2t + 4 - 3t - 2 - 2t + 1|}{3}$$

$$9 = |-3t + 3|$$

$$3 = |-t + 1|$$

$$3 = -t + 1 \quad \rightarrow t = -2 \quad \rightarrow \boxed{S(-2,-10,-1)}$$

$$-3 = -t + 1 \quad \rightarrow t = 4 \quad \rightarrow \boxed{S(4,8,5)}$$

תשובה: $S(-2,-10,-1)$, או $S(4,8,5)$.

ה. נתון מישור נוסף $\pi$ המאונך למקצוע $SC$, מכאן שווקטור המקדמים של המישור הוא $\overline{n} = (1,3,1)$ .

נמצא את הזווית בין המישור $2x - y - 2z + 1 = 0$, למישור $\pi$ .

$$\cos\alpha = \frac{|(2,-1,-2) \cdot (1,3,1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1|}{3 \cdot \sqrt{11}} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{11}} \quad \rightarrow \boxed{\alpha = 72.45^\circ}.$$

תשובה: הזווית שבין המישור $ABCD$ ובין המישור $\pi$ היא בת $72.45^\circ$ .

**א. נפתור את המשוואה** $z^2+z\overline{z}=z+2\overline{z}+9+7i$ .

**נסמן** $z=x+yi$ .

$$z^2+z\overline{z}=z+2\overline{z}+9+7i$$
$$(x+yi)^2+(x+yi)(x-yi)=x+yi+2(x-yi)+9+7i$$
$$x^2+2xyi-y^2+x^2+y^2=x+yi+2x-2yi+9+7i$$
$$R: x^2-y^2+x^2+y^2=x+2x+9 \quad \rightarrow 2x^2-3x-9=0 \quad \rightarrow x=3,-1.5$$
$$I: 2xy=y-2y+7 \quad \rightarrow \quad 2xy=-y+7$$
$$x=3: \quad \rightarrow 6y=-y+7 \quad \rightarrow y=1 \quad \rightarrow \boxed{z_1=3+i} \leftarrow 1st\ quadrant$$
$$\cancel{x=-1.5} \quad \leftarrow not\ in\ 1st\ quadrant$$

**קיבלנו ש-** $z_1=3+i$ **, ולכן** $R=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ **, ולכן משוואת המעגל הקנוני היא** $x^2+y^2=10$ .

**תשובה: משוואת המעגל הקנוני, ש-** $z_1$ **נמצא עליו, היא** $x^2+y^2=10$.

**ב. המעגל** $x^2+y^2=10$ **חוסם ריבוע שאחד מקודקודיו הוא** $z_1=3+i$ **, כלומר הנקודה** $(3,1)$ **במישור גאוס.**

**רדיוס המעגל הוא** $\sqrt{10}$ **, ולכן אורך האלכסון (אורך קוטר) הוא** $2\sqrt{10}$ .

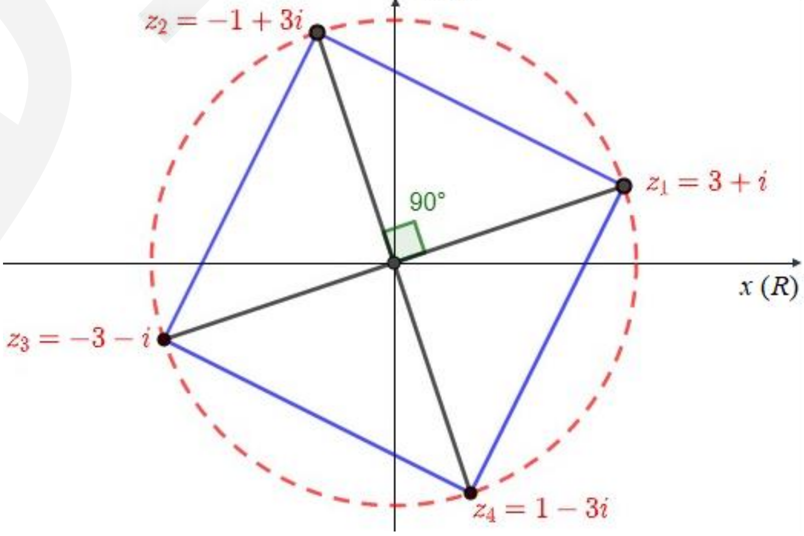
**שטח הריבוע הוא:** $\frac{2\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10}}{2}=20$ .

**תשובה: שטח הריבוע הוא** $20$ .

**ג. כיוון שאלכסוני הריבוע מאונכים זה מזה, אז הארגומנט של כל קודקוד גדול ב-** $90°$ **מזה שקודם לו.**

$$(3+i)\cdot i=-1+3i \quad \rightarrow (-1,3)$$
$$(-1+3i)\cdot i=-3-i \quad \rightarrow (-3,-1)$$
$$(-3-i)\cdot i=1-3i \quad \rightarrow (1,-3)$$

**תשובה: שיעורי שאר קודקודי הריבוע הם** $(-1,3)$ , $(-3,-1)$ , $(1,-3)$ .



**ד. מכפילים ב- $r_1\,cis\alpha$ את המספרים, המייצגים את הקודקודים שברביע הראשון והשלישי,**

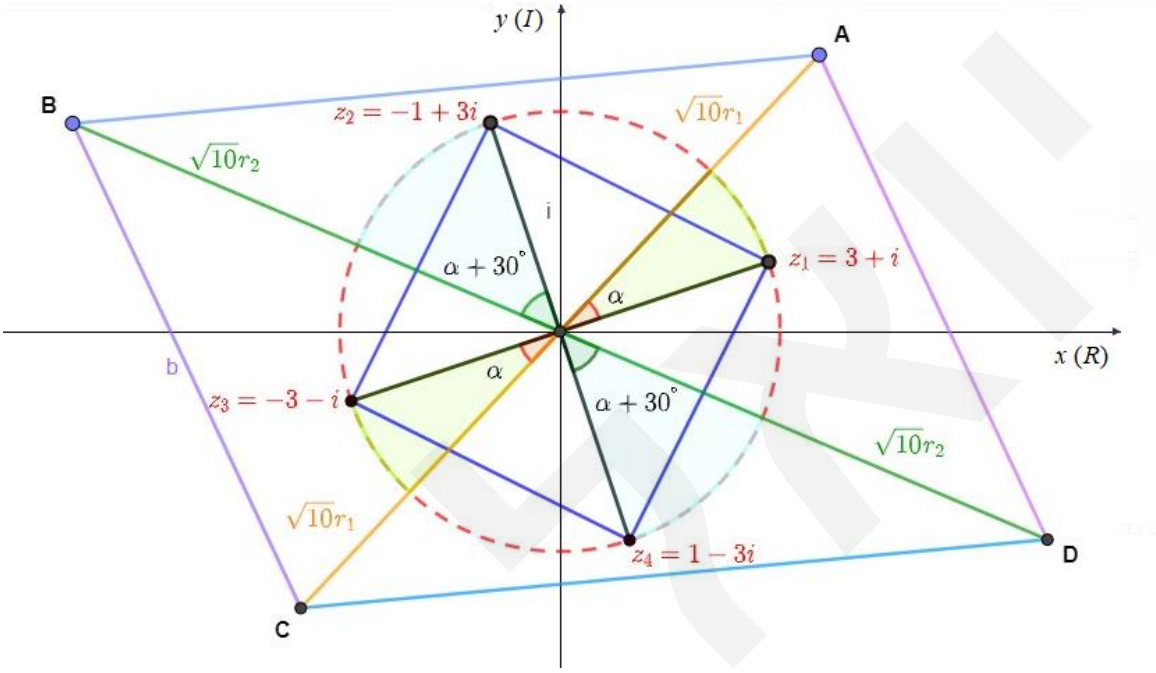
**ומכפילים ב- $r_2\,cis(\alpha+30°)$ את המספרים, המייצגים את הקודקודים ברביע השני והרביעי.**

**ידוע כי $r_1, r_2$ חיוביים, ו- $r_1 \neq r_2$ .**

**נצייר את המרובע הקמור שהתקבל .**

**(בסרטוט הנחנו ש- $r_1, r_2 > 1$ , וגם ש- $0° < \alpha < 90°$ ,**

**בהתאם לסעיף ה, אך אין השפעה על ההסבר לסעיף ד.)**




**הכפלת הרדיוס הקיים במספר קבוע, שומרת על התכונה שהאלכסונים חוצים זה את זה,**

**ולכן המרובע הוא מקבילית.**

**המרובע אינו מלבן, כי $r_1 \neq r_2$ , ואינו מעוין, כי הזוויות בין האלכסונים הן $120°$ ו- $60°$.**

**תשובה: המרובע שהתקבל הוא מקבילית.**

**ה. שטח המקבילית שהתקבלה הוא $20\sqrt{3}$ , כי שטחה גדול פי $\sqrt{3}$ משטח הריבוע.**

$$20\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{10}\cdot r_1 \cdot 2\sqrt{10}\cdot r_2 \cdot \sin 120°}{2}$$

$$20\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\cdot r_1 \cdot r_2$$

$$\boxed{r_1 \cdot r_2 = 2}$$

**תשובה: $r_1 \cdot r_2 = 2$.**

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=xe^x-2e^x+1$ **, המוגדרת לכל** $x$ **.**

**(1) שתי הצבות במחשבון:** $f(-10)=0.999\to1$ , $f(10)=176,212\to+\infty$ **,**

**ומכאן ש** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל,**

**(וגרף הפונקציה, הרציף, יתחיל בירידה ויסתיים בעלייה. כבר ברור שתהייה לפחת נקודת קיצון אחת).**

**תשובה:** $y=1$ $(x\to-\infty)$ **.**

**(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה-** $y$ **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $(0,-1)$ **.**

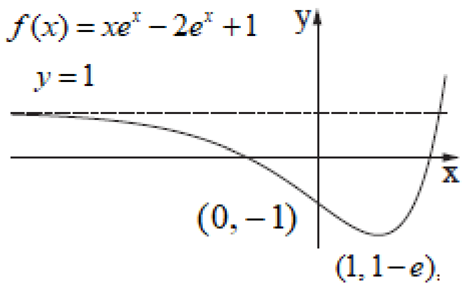
**תשובה:** $(0,-1)$ **.**

**(3) נמצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה** $f(x)$ **.**

$$f'(x)=e^x+xe^x-2e^x$$
$$f'(x)=xe^x-e^x$$
$$f'(x)=e^x(x-1)$$
$$0=e^x(x-1) \quad /:e^x>0$$
$$x-1=0 \quad x=1$$
$$\left.\begin{matrix} f'(0)<0 & \searrow \\ f'(2)>0 & \nearrow \end{matrix}\right\}(1,1-e),\min$$

**תשובה: עלייה** $x>1$ **, ירידה** $x<1$**.**

**(4) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה** $f(x)$ **.**




**תשובה: הסרטוט מעל.**

**ב. נתונה הפונקציה** $g(x)=\dfrac{1-e^{x}}{e^{x}-x}$ **, המוגדרת לכל** $x$ .

**(1) שתי הצבות במחשבון:** $g(-1{,}000)=0.001\rightarrow 0$ , $g(10)=-1.0004\rightarrow(-1)$ ,

**ומכאן ש** $y=-1$ **אסימפטוטה אופקית לימין, ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

**(וגרף הפונקציה, הרציף, יתחיל עלייה ויסתיים גם בעלייה. כבר ברור שתהיינה לפחות שתי נקודות קיצון).**

**תשובה:** $y=-1$ $(x\rightarrow+\infty)$ , $y=0$ $(x\rightarrow-\infty)$ .

**(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה-** $x$ **מתקיים** $y=0$ .

$$0=\frac{1-e^{x}}{e^{x}-x}\ \rightarrow 1-e^{x}=0\ \rightarrow e^{x}=1\ \rightarrow x=0\ \rightarrow \boxed{(0,0)}$$

**תשובה:** $(0,0)$.

**(3) נוכיח כי** $g'(x)=\dfrac{f(x)}{(e^{x}-x)^{2}}$ .

$$\boxed{g(x)=\frac{1-e^{x}}{e^{x}-x}}$$

$$g'(x)=\frac{-e^{x}(e^{x}-x)-(e^{x}-1)(1-e^{x})}{(e^{x}-x)^{2}}$$

$$g'(x)=\frac{-e^{2x}+xe^{x}-(e^{x}-e^{2x}-1+e^{x})}{(e^{x}-x)^{2}}$$

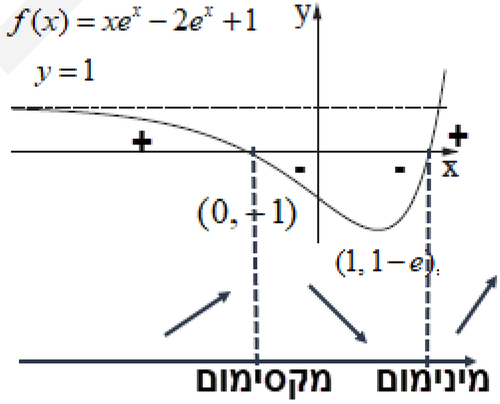
$$g'(x)=\frac{-e^{2x}+xe^{x}-e^{x}+e^{2x}+1-e^{x}}{(e^{x}-x)^{2}}$$

$$g'(x)=\frac{xe^{x}-2e^{x}+1}{(e^{x}-x)^{2}}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{f(x)}{(e^{x}-x)^{2}}}$$

**תשובה: הוכחנו את המבוקש.**

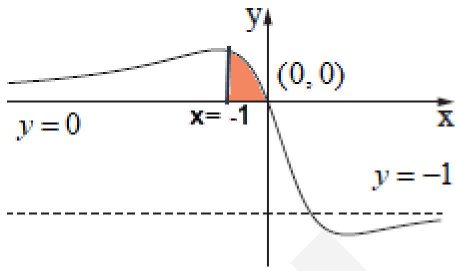
**ג. כיוון שהמכנה של** $g'(x)$ **חיובי, הרי שסימני** $f(x)$ **קובעים את סימני** $g'(x)$ .




**טבלת עלייה וירידה g(x)**

**תשובה: נקודת מינימום אחת (שבה** $x>1$ **), ונקודת מקסימום אחת (שבה** $x<0$ **).**

**ד. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ (כולל סימון השטח עבור סעיף ה).**




**תשובה: הסרטוט מעל.**

**ה. נחשב את השטח המוגבל (הצבוע בסרטוט) , בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית (הביטוי שבמכנה חיובי, ולכן לא נדרש ערך מוחלט).**

$$S = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1-e^x}{e^x - x} - 0\right) dx$$

$$S = \int_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{e^x - x} \cdot (e^x - 1)\right) dx$$

$$S = -\ell n\,(e^x - x) \Big]_{-1}^{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0: \quad -\ell n\,(e^0 - 0) = 0 \\ x = -1: \quad -\ell n\,(e^{-1} + 1) = -\ell n\,(\frac{1+e}{e}) \end{array}\right\} S = 0 - (-\ell n\,(\frac{1+e}{e}))$$

$$S = \ell n\,(\frac{1+e}{e}) \approx 0.3132 \quad \rightarrow \boxed{S = \ell n\,(\frac{1+e}{e}) \approx 0.3132}$$

**תשובה: השטח המוגבל הוא** $\ell n\,(\frac{1+e}{e}) \approx 0.3132$ .

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=x+\ell n\,(x^2-8)$ .

**(1) פונקציית ה-** $\ell n$ **מקבלת רק ביטויים חיוביים.**

$x^2-8>0$ **עבור** $x>\sqrt{8}$ **או** $x<-\sqrt{8}$ **, כי גרף** $x^2-8$ **הוא של פרבולה מחייכת, שחיובית בתחום זה.**

**תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה** $f(x)$ **הוא** $x>\sqrt{8}$ **או** $x<-\sqrt{8}$ .

**(2) כאשר** $x^2-8\to 0$ **אז** $(\ell n\,(x^2-8))\to-\infty$ **ונקבל שתי אסימפטוטות אנכיות.**

**תשובה:** $x=\sqrt{8}$ **ו-** $x=-\sqrt{8}$ **הן שתי האסימפטוטות המאונכות לציר ה-** $x$ .

**(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה** $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$\boxed{f(x)=x+\ell n\,(x^2-8)}$

$f'(x)=1+\dfrac{2x}{x^2-8}$

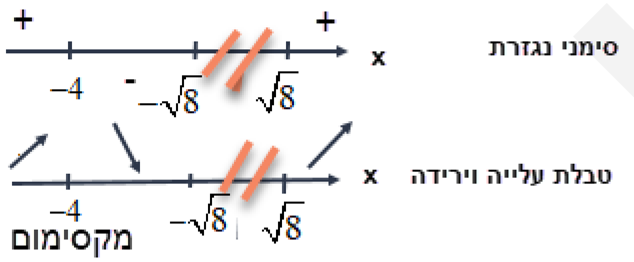
$\boxed{f'(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-8}}$

$0=x^2+2x-8$

$(x+4)(x-2)=0$

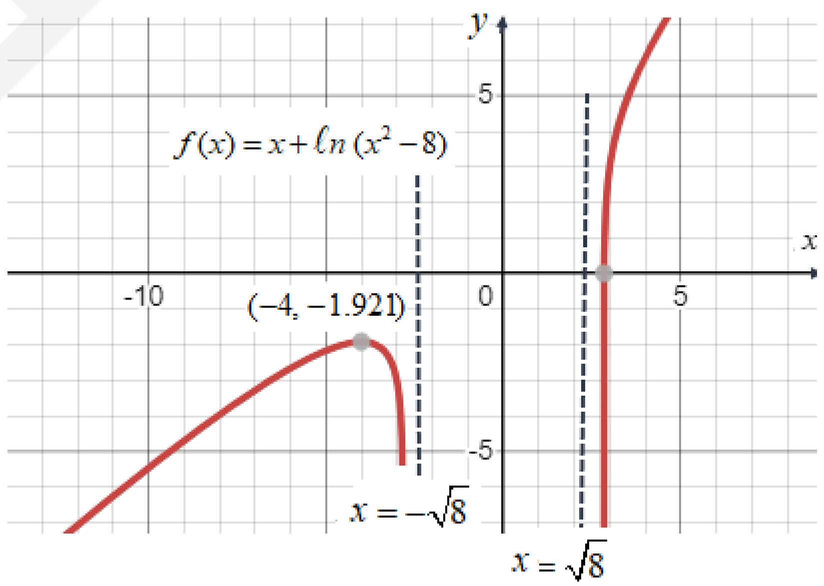
$x=-4 \quad \to(-4,-1.921)$

$\cancel{x=2} \quad \leftarrow x<-\sqrt{8}\,,\,x>\sqrt{8}$




**תשובה:** $(-4,-1.921)$ **, מקסימום.**

**(4) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה** $f(x)$ .




**תשובה: הסרטוט מעל.**

**ב. נתונה הפונקציה** $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-8}$ **, שהיא הנגזרת של** $f(x)$ **.**

**(1) תחום ההגדרה של הפונקציה** $f(x)$ **הוא** $x>\sqrt{8}$ **או** $x<-\sqrt{8}$**.**

**כיוון שהמכנה של פונקציית הנגזרת חיובי, בתחום זה, אז תחום ההגדרה של** $f'(x)$ **זהה לשל** $f(x)$ **.**

**תשובה: הפונקציה** $f'(x)$ **מוגדרת עבור** $x>\sqrt{8}$ **או** $x<-\sqrt{8}$**.**

**(2) האסימפטוטות המאונכות ללא שינוי, ונוספת אסימפטוטה אופקית.**

**תשובה:** $x=\sqrt{8}$ **ו-** $x=-\sqrt{8}$ **,** $y=1$ $(x\to\pm\infty)$ **.**

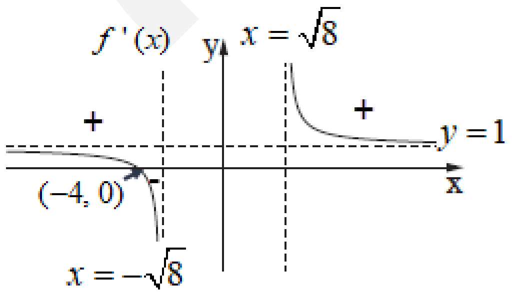
**(3) על-פי תת סעיף א(3)** $f'(-4)=0$ **.**

**תשובה:** $(-4, 0)$**.**

**(4) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה** $f(x)$ **.**

**תחומי החיוביות והשליליות של** $f'(x)$ **תואמים לתחומי העלייה והירידה לשל** $f(x)$

**נתון גם שאין לפונקציה** $f'(x)$ **נקודות קיצון, וזה תואם את היעדרות נקודות פיתול בסקיצה של** $f(x)$ **.**




**תשובה: הסרטוט מעל.**

**ג. נתונה הפונקציה** $g(x)=e^{f(x)}$ **, המוגדרת גם עבור** $x>\sqrt{8}$ **או** $x<-\sqrt{8}$**.**

**(1)** $g'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)$

**כיוון שהביטוי** $e^{f(x)}$ **חיובי, בתחום ההגדרה, אז תחומי עלייה וירידה,**

**ושיעור ה-** $x$ **של נקודת המקסימום נותרים ללא שינוי.**

**תשובה:** $(-4, e^{-1.921}\approx 0.146)$ **, מקסימום.**

**(2) תשובה: עבור** $g(x)$ **עלייה** $x>\sqrt{8}$ **או** $x<-4$ **, ירידה** $-4<x<-\sqrt{8}$ **.**

**ד. נתון כי** $y=f'(x)\cdot g(x)$ **.**

$g(x)=e^{f(x)}$ **חיובית לכל** $x$ **בתחום ההגדרה, ובפרט בתחום** $-5\le x\le -4$

**בתחום** $-5\le x<-4$ **מתקיים** $f'(x)>0$ **, ולכן** $y>0$ **.**

**בהתאם, נחשב את השטח שנמצא מעל לציר ה-** $x$ **.**

**נעשה זאת, בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית**

$$\int_{-5}^{-4} e^{f(x)}\cdot f'(x))\,dx=(e^{f(x)})\Big]_{-5}^{-4}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-4: \quad e^{f(-4)}=0.1465 \\ x=-5: \quad e^{f(-5)}=0.1145 \end{array}\right\} S=0.1465-0.1145 \quad \to \boxed{S=0.032}$$

**תשובה: השטח המוגבל הוא** $0.032$ **.**