

שאלון 35572 מועד ב' קיץ תשפ"ב

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי
התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:

שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35572 מועד ב'
קיץ תשפ"ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. נתונות הנקודות $A(-5, 3)$ ו- $B(0, -2)$.

יש למצוא את המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים, שהקטע AB הוא מיתר שלהם. נסמן $P(s, t)$ - מרכז המעגל, ולכן $PA = PB = R$ (רדיוסים שווים זה לזה).

דרך פתרון אחת

כל הנקודות שנמצאות במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאות על האנך האמצעי לקטע. אחת מהנקודות על המקום הגאומטרי, היא אמצע המיתר AB . (מובן שבאחד מהמעגלים AB הוא הקוטר, ואז נקודת האמצע תהיה מרכז המעגל.)

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{-5+0}{2} = -2.5 \\ y &= \frac{3-2}{2} = 0.5 \end{aligned} \right\} (-2.5, 0.5)$$

ולכן שיפוע האנך האמצעי הוא $m_{AB} = \frac{3+2}{-5-0} = -1$, ולכן $m_1 \cdot m_2 = -1$ (תנאי ניצבות).

ולכן, משוואת המקום הגאומטרי היא: $y = x + 3$ → $y - 0.5 = 1(x + 2.5)$.

דרך פתרון שניה

על פי מרחק בין שתי נקודות: $PA = PB = R$.

$$\sqrt{(s+5)^2 + (t-3)^2} = \sqrt{(s-0)^2 + (t+2)^2}$$

$$s^2 + 10s + 25 + t^2 - 6t + 9 = s^2 + t^2 + 4t + 4$$

$$10s + 30 = 10t$$

$$s + 3 = t$$

$$\boxed{y = x + 3}$$

תשובה: משוואת המקום הגאומטרי, של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם, היא $y = x + 3$.

ב. נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה- x הן מוקדים של אליפסה שמשוואת קנונית. מכאן שמוקדי האליפסה, $F_1(c, 0)$ ו- $F_2(-c, 0)$, נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.

לכן, מרכז מעגל M נמצא על ציר ה- y , וכאמור גם על המקום הגאומטרי $y = x + 3$.

נקבל שמרכז המעגל הוא $M(0, 3)$, ורדיוסו הוא $R = MA = \sqrt{(0+5)^2 + (3-3)^2} = 5$.

משוואת המעגל היא $x^2 + (y-3)^2 = 25$.

תשובה: שיעורי מרכז המעגל M הם $(0, 3)$, והרדיוס שלו הוא 5.

ג. נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל, כלומר $2R = 2 \cdot 5 = 10$.

לכן, $a = 5$ ו- $2a = 10$.

המוקד $F_1(c, 0)$ נמצא על המעגל, לכן: $\boxed{c=4}$ $\rightarrow c^2 + (0-3)^2 = 25$ ($c > 0$).

באליפסה קנונית, שהציר הארוך שלה מונח על ציר ה- x , מתקיים: $a^2 - b^2 = c^2$.

ומכאן ש- $\boxed{b=3}$ $\rightarrow 5^2 - b^2 = 4^2$ ($b > 0$).

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

ד. $F(3, 0)$ הוא המוקד הימני של האליפסה.

ישר, המאונך לציר ה- x , עובר במוקד השמאלי של האליפסה, ומכאן שמשוואתו היא $x = -3$.

הישר חותך את האליפסה בנקודות T ו- Q, ואת המעגל M בנקודות K ו- L.

נציב $x = -3$ במשוואת האליפסה, ונמצא את שיעורי הנקודות T ו- Q.

$$\frac{(-3)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y^2 = \frac{144}{25} \rightarrow y = \pm 2.4$$

ואורך הקטע TQ הוא 4.8.

נציב $x = -3$ במשוואת המעגל, ונמצא את שיעורי הנקודות K ו- L.

$$(-3)^2 + (y-3)^2 = 25 \rightarrow (y-3)^2 = 16$$

$$y-3=4 \rightarrow y=7$$

$$y-3=-4 \rightarrow y=-1$$

ואורך הקטע KL הוא 8.

נסמן את הנקודות בציר (ללא הגבלת הכלליות).

נשים לב שלצלע KL משולש KLF,

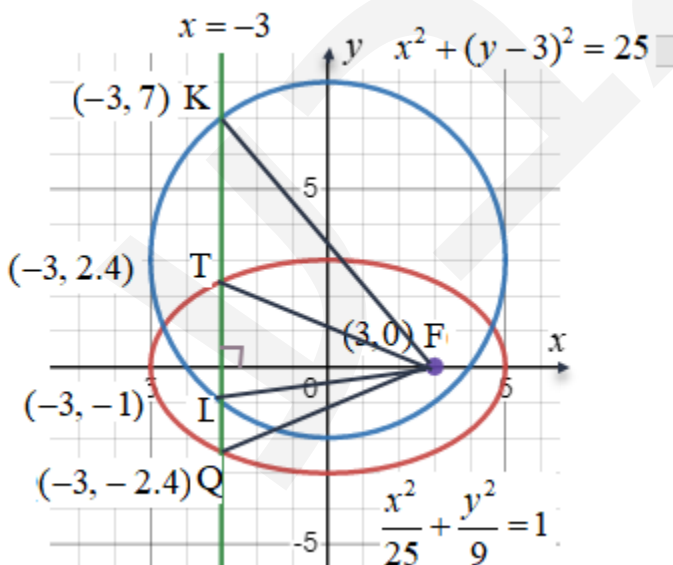
ולצלע TQ משולש TQF,

יש גובה משותף מהקודקוד F, המונח על ציר ה- x ,

ולכן יחס השטחים שווה ליחס הצלעות.

$$\frac{S_{\Delta KLF}}{S_{\Delta TQF}} = \frac{KL}{TQ} = \frac{8}{2.4} = \frac{5}{3}$$

תשובה: היחס בין שטח המשולש KLF לשטח המשולש TQF הוא 5:3.

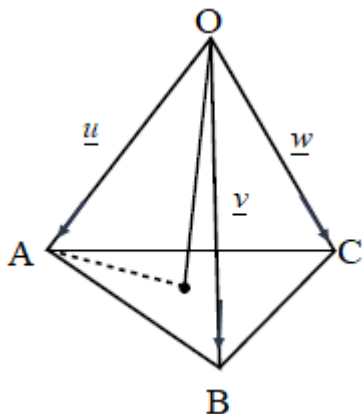


א. נתונה פירמידה OABC, שבסיסה משולש ABC.

נראה שהפירמידה ישרה, ושבסיסה הוא משולש שווה צלעות. נתון $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}|$, כלומר כל המקצועות הצדדיים שווים זה לזה,

ולכן הפירמידה ישרה, והגובה יורד למרכז המעגל החוסם.

נסמן ב- a את אורכי המקצועות הצדדיים (גם כהכנה לסעיף ד).



$$\overline{OA} = \underline{u} \quad |\underline{u}| = a \quad \underline{u}^2 = a^2$$

$$\overline{OB} = \underline{v} \quad |\underline{v}| = a \quad \underline{v}^2 = a^2$$

$$\overline{OC} = \underline{w} \quad |\underline{w}| = a \quad \underline{w}^2 = a^2$$

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = 90^\circ$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

ולכן גם: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

בנוסף, כל הפאות הן משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים,

החופפים זה לזה (משפט חפיפה צ. ז. צ.),

ולכן מקצועות הבסיס שווים, והבסיס הוא משולש שווה צלעות.

הנקודה H מקיימת $\overline{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$, כאשר \overline{OH} מאונך לבסיס ABC.

לכן, \overline{OH} מאונך לכל וקטור בבסיס.

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$$

$$\overline{AB} = -\underline{u} + \underline{v}$$

$$\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC}$$

$$\overline{AC} = -\underline{u} + \underline{w}$$

$$\overline{OH} \cdot \overline{AC} = 0$$

$$(t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}) \cdot (-\underline{u} + \underline{w}) = 0$$

$$-t\underline{u}^2 + k\underline{w}^2 = 0$$

$$ka^2 = ta^2 \quad /: a^2 > 0$$

$$\boxed{k = t}$$

$$\overline{OH} \cdot \overline{AB} = 0$$

$$(t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}) \cdot (-\underline{u} + \underline{v}) = 0$$

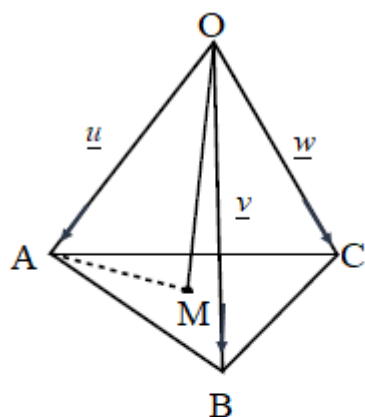
$$-t\underline{u}^2 + s\underline{v}^2 = 0$$

$$sa^2 = ta^2 \quad /: a^2 > 0$$

$$\boxed{s = t}$$

ולכן, $t = s = k$.

תשובה: הוכחנו כי $t = s = k$.



$$\begin{aligned} \overline{OA} = \underline{u} & \quad |\underline{u}| = a \quad \underline{u}^2 = a^2 \\ \overline{OB} = \underline{v} & \quad |\underline{v}| = a \quad \underline{v}^2 = a^2 \\ \overline{OC} = \underline{w} & \quad |\underline{w}| = a \quad \underline{w}^2 = a^2 \end{aligned}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

ב. הנקודה M היא נקודת המפגש של התיכונים בבסיס ABC. OM יוצא מקודקוד הפירמידה ומגיע למפגש התיכונים, ומכיון והבסיס הוא משולש שווה צלעות, זה גם מרכז המעגל החוסם, ומכאן ש- OM הוא גם הגובה של פירמידה ישרה זו, ולכן הכיוון שלו שווה לכיוון של $\overline{OH} = t\underline{u} + t\underline{v} + t\underline{w}$.

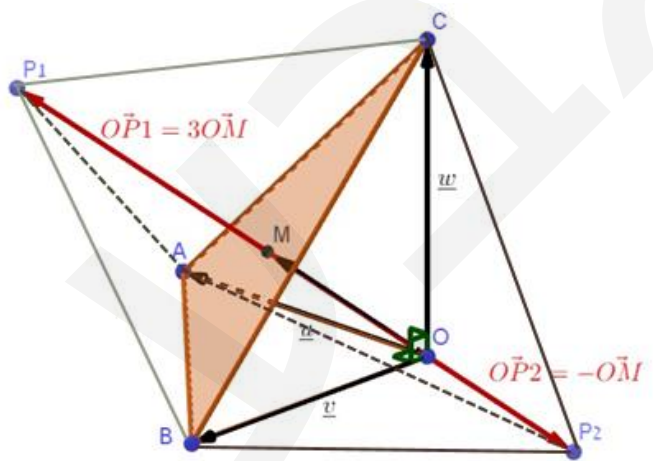
התיכונים חותכים זה את זה ביחס 2:1 מהקודקוד.

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \overline{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{AC}) \\ \overline{OM} &= \underline{u} + \frac{1}{3} (-\underline{u} + \underline{v} - \underline{u} + \underline{w}) \\ \overline{OM} &= \underline{u} - \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{w} \\ \overline{OM} &= \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w} \end{aligned}$$

מכאן, גם שעבור $t = \frac{1}{3}$, הנקודה M מתלכדת עם הנקודה H.

תשובה: הוכחנו כי $\overline{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, והסברנו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.

ג. הנקודה P נמצאת על הישר ℓ , שעליו מונח הגובה לבסיס ABC.



$$\overline{OP} = \alpha \overline{OM}$$

כמו שרואים באיור, ישנם שני מצבים. עבור הפירמידה P_2ABC , כאשר O אמצע PM, נפחה כפול מה של הפירמידה OABC, כי הגבהים מקיימים $PM = 2OM$, והבסיסים של שתי הפירמידות זהים. במקרה זה, $\overline{OP} = -\overline{OM}$, כי הכיוונים שונים,

$$\text{ולכן } \overline{OP} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$$

עבור הפירמידה P_1ABC , כאשר O אמצע $P_1M:MO = 2:1$, תודה לדוד צחור על האיור המקסימ. נפחה כפול מה של הפירמידה OABC, כי הגבהים מקיימים, גם הפעם, $PM = 2OM$, והבסיסים של שתי הפירמידות זהים.

במקרה זה, $\overline{OP} = 3\overline{OM}$, כי הכיוונים זהים, ולכן $\overline{OP} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$.

$$\text{תשובה: } \overline{OP} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w} \text{ או } \overline{OP} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w} \text{ עבורם } V_{PABC} = 2V_{OABC}$$

ד. ממקמים את הפירמידה PABC על הצירים, כמתואר באיור, כאשר הנקודה O היא בראשית הצירים.

(ניתן לעשות זאת, כי $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ מאונכים זה לזה).

ובתנאים $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = a$, על סמך סעיף א.

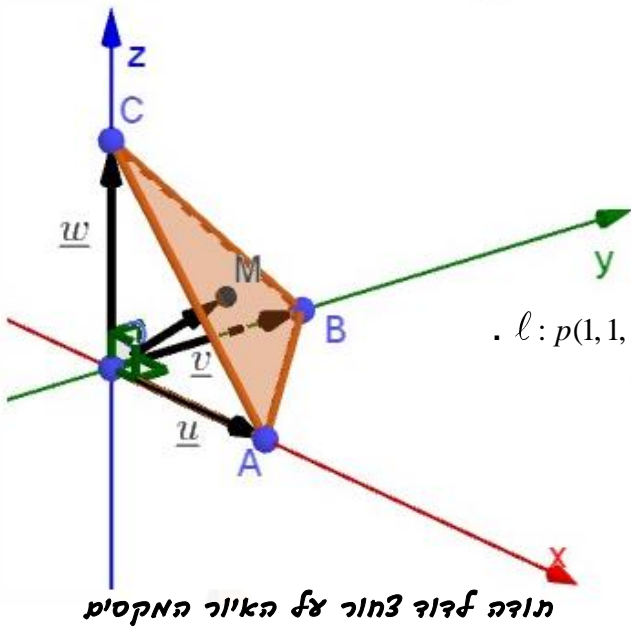
מכאן ש- $\underline{u} = (a, 0, 0)$, $\underline{v} = (0, a, 0)$, ו- $\underline{w} = (0, 0, a)$.

ולכן $\overline{OP} = \underline{x} = (a, a, a)$ ו- $\overline{OP} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$.

הקטע OP מונח על הישר ℓ , ולכן משוואת הישר היא $\ell: p(1, 1, 1)$.

תשובה: ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ ,

שעליו נמצא הקטע OP, היא $\ell: p(1, 1, 1)$.



ה. OP מאונך למישור ABC.

בהתאם, הנורמל למישור הוא $\underline{n} = (1, 1, 1)$, ומשוואת המישור ABC היא $x + y + z + d = 0$.

ולכן שיעורי הנקודה A הם: $(a, 0, 0)$.

נציב את שיעורי הנקודה A במשוואת המישור: $a + 0 + 0 + d = 0 \rightarrow d = -a$.

תשובה: משוואת המישור ABC היא $x + y + z - a = 0$.

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $20\frac{5}{6}$.

משולש ABO הוא משולש ישר זווית, שבו $OA \perp OB$.

משולש ABO הוא גם בסיס לפירמידה OABC,

כאשר OC, שמאונך למשולש ABO, הוא הגובה לבסיס זה.

ולכן $OA = OB = OC = a$ ו- $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = a$.

$$V = \frac{S_{\Delta ABO} \cdot CO}{3}$$

$$20\frac{5}{6} = \frac{\frac{a \cdot a}{2} \cdot a}{3}$$

$$20\frac{5}{6} = \frac{a^3}{6}$$

$$125 = a^3$$

$$\boxed{a = 5}$$

תשובה: $a = 5$.

א. המספר $z = Rcis \alpha$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי, ולכן $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

$$\text{נתון: } \frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{נעבור להצגה קוטבית של } -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$R = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$$

$$\boxed{\theta = 120^\circ} \leftarrow 2nd \text{ quadrant}$$

הזוויות שנבחרה מתאימה לרביע השני, בו מצוי $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, ולכן $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = cis 120^\circ$.

$$\frac{Rcis \alpha}{Rcis (-\alpha)} = cis 120^\circ$$

$$cis 2\alpha = cis 120^\circ$$

$$2\alpha = 120^\circ + 360^\circ k$$

$$\alpha = 60^\circ + 180^\circ k$$

$$\boxed{\alpha = 240^\circ} \leftarrow 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

תשובה: $\alpha = 240^\circ$.

$$\text{ב. נתון } |2iz| + \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$$

$Rcis\alpha \cdot cis\beta = Rcis(\alpha + \beta)$, כלומר האורך לא משתנה.

$$\text{לכן: } |2iz| = 2R, \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| = R, \text{ ובנוסף } \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = \left| \frac{Rcis \alpha}{Rcis (-\alpha)} \right| = |cis(2\alpha)| = 1$$

$$|2iz| + \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$$

$$2R + R - 1 = 8$$

$$3R = 9$$

$$\boxed{R = 3}$$

ונקבל גם ש- $z = 3cis 240^\circ$

תשובה: $R = 3$.

ג. נתונה המשוואה $w^9 = \frac{z^3}{27}$.

$$w^9 = \frac{(3 \operatorname{cis} 240^\circ)^3}{27}$$

$$w^9 = \frac{3^3 \operatorname{cis} (240^\circ \cdot 3)}{27}$$

$$w^9 = \frac{27 \operatorname{cis} (720^\circ)}{27}$$

$$w^9 = \operatorname{cis} 0^\circ$$

$$w^9 = 1$$

דרך פתרון ראשונה ואומללת

כדי להראות כי המספר $\frac{z}{\bar{z}} = \operatorname{cis} 120^\circ$ הוא אחד מהפתרונות של המשוואה $w^9 = \frac{z^3}{27}$,

נציב את המספר במשוואה $w^9 = 1$.

$$(\operatorname{cis} 120^\circ)^9 = 1$$

$$\operatorname{cis} (120^\circ \cdot 9) = 1$$

$$\operatorname{cis} (1080^\circ) = 1$$

$$\operatorname{cis} (0^\circ) = 1$$

$$1 = 1 \quad o.k$$

ולכן, המספר $\frac{z}{\bar{z}} = \operatorname{cis} 120^\circ$ הוא אחד מהפתרונות של המשוואה $w^9 = \frac{z^3}{27}$.

דרך פתרון שנייה

נמצא את פתרונות המשוואה, בהתאם לנוסחת השורשים:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{360^\circ k}{n} \right) \rightarrow w_k = \sqrt[n]{1} \operatorname{cis} \left(\frac{0^\circ}{9} + \frac{360^\circ k}{9} \right)$$

$$w_k = \operatorname{cis} 40^\circ k$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{3 \operatorname{cis} 240^\circ}{3 \operatorname{cis} (-240^\circ)} = \operatorname{cis} 480^\circ = \operatorname{cis} 120^\circ$$

ועבור $w_k = \operatorname{cis} 120^\circ$, $k = 3$

תשובה: הראינו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}} = \operatorname{cis} 120^\circ$ הוא אחד מהפתרונות של המשוואה $w^9 = \frac{z^3}{27}$.

ד. (1) ΔABC הוא משולש שווה שוקיים.

קודקוד הבסיס B מתאים למספר $\frac{z}{\bar{z}} = \text{cis } 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, ובהתאם $B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

קודקוד הבסיס C מתאים למספר $\frac{\bar{z}}{z} = \text{cis } (-120^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, ובהתאם $C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

קודקודים אלו סימטריים לציר ה- x , ולכן ציר ה- x הוא אנך אמצעי לצלע BC.

מכאן שהקודקוד השלישי, A, נמצא על ציר ה- x .

נתון שקודקוד הראש A מתאים למספר $z+k$ (הוא מספר מדומה טהור).

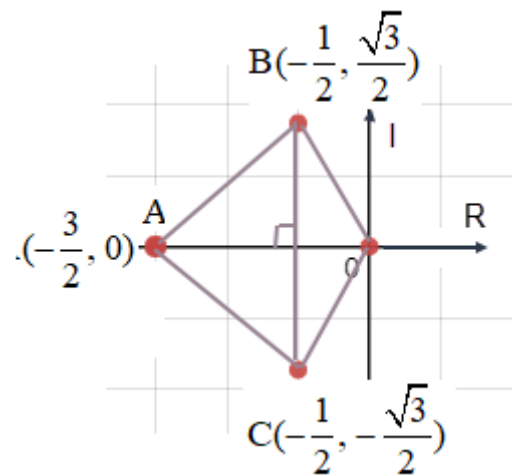
ומכיוון ו- A נמצא על ציר ה- x , אז החלק המדומה שלו שווה ל-0.

ולכן $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, ובהתאם $A(-\frac{3}{2}, 0)$.

תשובה: $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

(2) אלכסוני המרובע ABOC מאונכים זה לזה, ולכן שטחו שווה למחצית מכפלת האלכסונים.

(הערה משלימה - המרובע הוא דלתון)



$$S_{ABOC} = \frac{AO \cdot BC}{2} = \frac{1.5 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

תשובה: שטח המרובע ABOC הוא $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 e^{a-x^3}$, המוגדרת לכל x (a הוא פרמטר).

(1) נמצא את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

$$x^2 > 0 \text{ לכל } x \neq 0, \text{ ו- } e^{a-x^3} > 0 \text{ לכל } x.$$

ומכאן שהפונקציה חיובית לכל $x \neq 0$.

(2) נמצא את שיעור ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגן.

$$f'(x) = 2xe^{a-x^3} + x^2 e^{a-x^3} \cdot (-3x^2)$$

$$\boxed{f'(x) = xe^{a-x^3} (2 - 3x^3)}$$

$$0 = xe^{a-x^3} (2 - 3x^3) \quad / : e^{a-x^3} > 0$$

$$x(2 - 3x^3) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0.874$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1) < 0 \quad \searrow \\ f'(0.5) > 0 \quad \nearrow \\ f'(1) < 0 \quad \searrow \end{array} \right\} x = 0, \min \quad x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0.874, \max$$

תשובה: $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0.874$ מקסימום, $x = 0$ מינימום.

ב. נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה- x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

עבור $x = 0$ הגרף של פונקציית הנגזרת עובר משליליות לחיוביות,

ועבור $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0.874$ עובר מחיוביות לשליליות.

לכן בתחום $0 < x < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ הנגזרת חיובית, והשטח הכלוא בינה לבין ציר ה- x חיובי.

$$\sqrt[3]{\frac{4e}{9}} = \int_0^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} (f'(x) - 0) dx$$

$$\sqrt[3]{\frac{4e}{9}} = f(x) \Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{4e}{9}} = f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) - f(0)$$

$$\sqrt[3]{\frac{4e}{9}} = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 e^{a - \frac{2}{3}}$$

$$\frac{4e}{9} = \frac{4}{9} e^{3a-2}$$

$$e = e^{3a-2}$$

$$1 = 3a - 2$$

$$3 = 3a$$

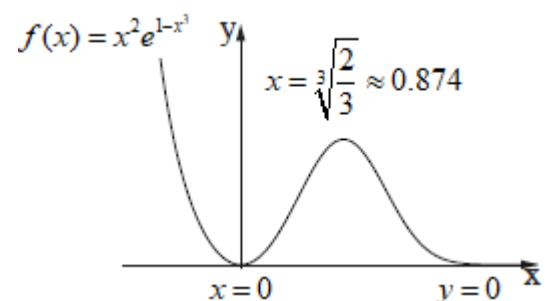
$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$.

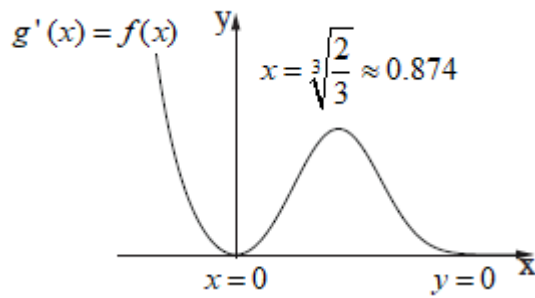
ג. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x) = x^2 e^{1-x^3}$.

שתי הצבות במחשבון: $f(-5) = +1.3 \cdot 10^{56} \rightarrow +\infty$, $f(5) = +3.5 \cdot 10^{-53} \rightarrow (x \rightarrow +\infty) y = 0$,

ומכאן ש $(x \rightarrow +\infty) y = 0$ אסימפטוטה אופקית לימין.



תשובה: הסרטוט מעל.



ד. הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ ($g'(x) = f(x)$).

(1) תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x) = f(x)$ קובעים את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

$f(x) \geq 0$ לכל x , ולכן גם $g'(x) \geq 0$ ו- $g(x)$ עולה לכל x .

תשובה: $g(x)$ עולה לכל x , ויורדת לאף x .

(2) תחומי העלייה והירידה של $g'(x) = f(x)$ קובעים את תחומי הקעירות של $g(x)$.

בתחום $0 < x < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ - $g'(x) > 0$ עולה, ולכן $g''(x) > 0$ ו- $g(x)$ קעורה כלפי מעלה (\cup).

בתחום $x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ או $x < 0$ - $g'(x) < 0$ יורדת, ולכן $g''(x) < 0$ ו- $g(x)$ קעורה כלפי מטה (\cap).

לכן, ל- $g(x)$ יש שתי נקודות פיתול, שבהן $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0.874$, $x = 0$.

תשובה: לפונקציה $g(x)$ יש שתי נקודות פיתול.

ה. $g(x)$ עולה לכל x , לכן עבור $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ שיעור ה- y יהיה גבוה מאשר עבור $x = 0$.

לכן, בנקודה B מתקיים $g(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}) = \frac{e - \sqrt[3]{e}}{3}$.

נמצא את הפונקציה $g(x)$ בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$g(x) = \int x^2 e^{1-x^3} dx$$

$$g(x) = \int -\frac{1}{3} e^{1-x^3} \cdot (-3x^2) dx$$

$$g(x) = -\frac{1}{3} e^{1-x^3} + c$$

$$\frac{e - \sqrt[3]{e}}{3} = -\frac{1}{3} e^{1-\frac{2}{3}} + c \leftarrow g(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}) = \frac{e - \sqrt[3]{e}}{3}$$

$$e - \sqrt[3]{e} = -\sqrt[3]{e} + 3c$$

$$\frac{e}{3} = c$$

$$g(x) = -\frac{1}{3} e^{1-x^3} + \frac{e}{3} = \frac{e - e^{1-x^3}}{3}$$

תשובה: $g(x) = -\frac{1}{3} e^{1-x^3} + \frac{e}{3} = \frac{e - e^{1-x^3}}{3}$

בגרות פב יולי 22 מועד קיץ ב שאלון 35572

א. נסרטט את הפונקציה $f(x)$, בהתאם לכל המאפיינים המובאים והבנת המשמעויות שלהם.

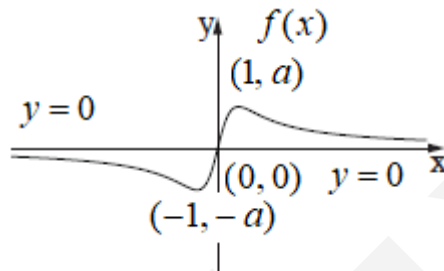
$f(x)$ מוגדרת לכל x ורציפה – משמעות: לא קיימות אסימפטוטות אנכיות, או נקודות אי רציפות.

$f(x)$ היא אי-זוגית: משמעות: הגרף סימטרי לראשית הצירים, והנקודה $(0, 0)$ היא נקודת פיתול.

$y = 0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה – משמעות: $y = 0$ אסימפטוטה אופקית עבור $x \rightarrow \pm\infty$.

לפונקציה יש נקודת מינימום יחידה, ששיעורי הם $(-1, -a)$ - משמעות: נקודת מקסימום יחידה.

a הוא פרמטר חיובי – משמעות: $(-1, -a)$ מתחת לציר ה- x , $(1, a)$ מעל לציר ה- x .



תשובה: הסרטוט מעל.

ב. נתונה הפונקציה $h(x) = \ln(f(x))$

(1) פונקציית ה- \ln מקבלת רק ביטויים חיוביים.

$f(x)$ חיובית, בתחום $x > 0$, על פי הסרטוט בסעיף א.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ הוא $x > 0$.

(2) כאשר $f(x) \rightarrow 0$ אז $\ln(f(x)) \rightarrow -\infty$ ונקבל אסימפטוטה אנכית.

כאשר $x \rightarrow +\infty$, אז $f(x) \rightarrow 0$ ו- $\ln(f(x)) \rightarrow -\infty$ ואין אסימפטוטה אופקית.

תשובה: $x = 0$ אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x , של הפונקציה $h(x)$.

(3) על פי תת סעיף (2), אם ל- $h(x)$ תהייה נקודה אחת לפחות מעל לציר ה- x ,

אז הגרף של $h(x)$ יחתוך את ציר ה- x בשתי נקודות.

$$h'(x) = [\ln(f(x))]'$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

מכאן, שבתחום $x > 0$, תחומי העלייה והירידה של שתי הפונקציות זהים,

ולכן נקודת מקסימום יחידה של הפונקציה $h(x)$.

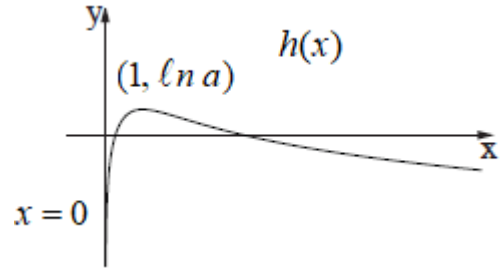
נבדוק מתי שיעור ה- y בנקודת המקסימום חיובי.

$$\ln a > 0$$

$$\boxed{a > 1}$$

תשובה: עבור $a > 1$, הגרף של $h(x)$ יחתוך את ציר ה- x בשתי נקודות.

(4) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, בהינתן שהגרף שלו חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. נתון: $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, המוגדרת לכל x ורציפה.

(1) הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ ($g'(x) = f(x)$), וגם נתון כי $g(0) = 0$.

נמצא את הפונקציה $g(x)$ בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$g(x) = \int \frac{4x}{1+x^2} dx$$

$$g(x) = \int 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x dx$$

$$g(x) = 2 \ln(1+x^2) + c \quad \leftarrow 1+x^2 > 0$$

$$0 = 2 \ln(1+0^2) + c \quad \leftarrow g(0) = 0$$

$$0 = c$$

$$\boxed{g(x) = 2 \ln(1+x^2)}$$

הערה: כיוון ש- $1+x^2 > 0$, לא נדרש לשים ערך מוחלט על הארגומנט של הפונקציה הלוגריתמית.

תשובה: $g(x) = 2 \ln(1+x^2)$.

(2) נבדוק את הזוגיות של הפונקציה $g(x)$.

$$g(-x) = 2 \ln(1+(-x)^2)$$

$$g(-x) = 2 \ln(1+x^2)$$

$$\boxed{g(-x) = g(x)}$$

ולכן, הפונקציה $g(x)$ זוגית, כאשר הגרף שלה סימטרי לציר ה- y , עם נקודת קיצון על ציר זה.

תשובה: הפונקציה $g(x)$ זוגית.

ד. מכיוון ש- $g(x)$ זוגית, והגרף שלה סימטרי לציר ה- y , אז $\int_{-5}^0 g(x) dx = \int_0^5 g(x) dx$.

מכאן, ש- $\int_{-5}^0 g(x) dx = 2 \cdot \int_{-5}^0 g(x) dx$ ולכן $t = 0$.

תשובה: עבור $t = 0$ מתקיים $\int_{-5}^5 g(x) dx = 2 \cdot \int_{-5}^t g(x) dx$.