שאלון 35571 מועד ב׳
קיץ תשפ״ב

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35571 מועד ב׳ קיץ תשפ״ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

נוכיח שהטענה $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=1^2+2^2+3^2...+n^2$**, נכונה לכל** n **טבעי.**

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$**.**

אגף ימין: $\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$ **אגף שמאל:** $1^2=1$

קבלנו שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1^2+2^2+3^2...+k^2=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$ **,**

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$ **:** $1^2+2^2+3^2...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}$**.**

$$\Leftrightarrow \underline{1^2+2^2+3^2+...+k^2}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\downarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

3. לכן, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו שהטענה $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=1^2+2^2+3^2...+n^2$**, נכונה לכל** n **טבעי.**

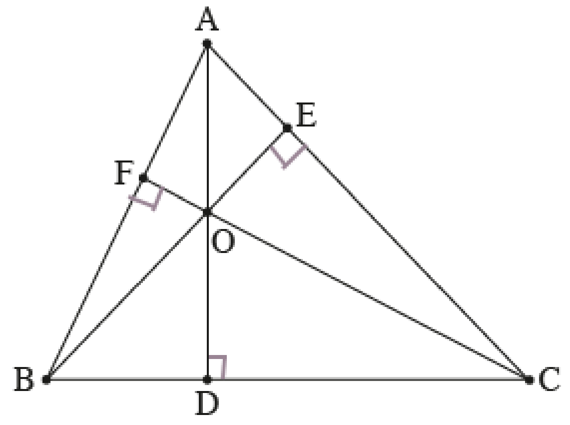
הערה: את הפירוק לגורמים של הביטוי $2k^2+7k+6$ **, עשינו לפי משוואה ריבועית.**

$$2k^2+7k+6=0 \quad \to k=-\frac{3}{2},-2$$

$$2k^2+7k+6=2(k+\frac{3}{2})(k+2)$$

$$2k^2+7k+6=(2k+3)(k+2)$$

נכתב ע"י עפר ילין



(1) AD , BE ו- CF הם גבהים, היוצרים זוויות בנות $90°$ עם צלעות המשולש ABC .

לכן בכל אחד מהמרובעים $AEOF$, $BDOF$ ו- $CDOE$ סכום זוויות נגדיות הוא $180°$.

אם במרובע סכום זוויות נגדיות $180°$, אז המרובע בר חסימה.

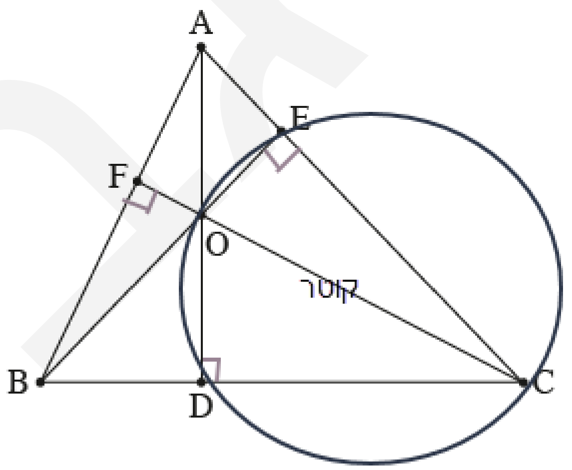
תשובה: הוכחנו שאפשר לחסום במעגל כל אחד מן המרובעים $AEOF$, $BDOF$ ו- $CDOE$.

(2) נתון כי סכום המרחקים של הנקודה O , מקודקודי המשולש, הוא 20 .

בכל אחד מהמרובעים $AEOF$, $BDOF$ ו- $CDOE$,

קוטר המעגל החוסם, הוא המרחק של הנקודה O , מאחד מקודקודי המשולש,

כי מיתר שנשען על זווית היקפית ישרה הוא קוטר.



לדוגמה, במעגל החוסם את המרובע $CDOE$, OC הוא הקוטר.

מכאן שסכום היקפי המעגלים הוא:

$$2\pi \cdot \frac{OC}{2} + 2\pi \cdot \frac{OB}{2} + 2\pi \cdot \frac{OA}{2} =$$
$$= \pi \cdot (OC + OB + OA) =$$
$$= 20\pi$$

תשובה: סכום היקפי המעגלים, החוסמים את המרובעים $AEOF$, $BDOF$ ו- $CDOE$, הוא 20π .

נתונה הפונקציה $f(x)=3+\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}$

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ- 0.

$x^2-25>0$ **, נקבל פרבולה בעלת מינימום שמתאפסת עבור** $x=\pm5$,

וחיובית בתחום $x>5$ **או** $x<-5$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x>5$ **או** $x<-5$.

(2) נמצא אסימפטוטות המקבילות לצירים, ואז נחשב את השטח הכלוא ביניהן.

(ניתן למצוא אסימפטוטות על-ידי הבנה, וגם על ידי הצבות.

אין חובה, וגם לא מומלץ, לרשום בעזרת גבולות !)

המספרים $x=\pm5$ **מאפסים את המכנה של המחובר הימני, ולא את המונה,**

ולכן הישרים $x=5$ **, ו-** $x=-5$ **הם אסימפטוטות מקבילות לציר ה-** y.

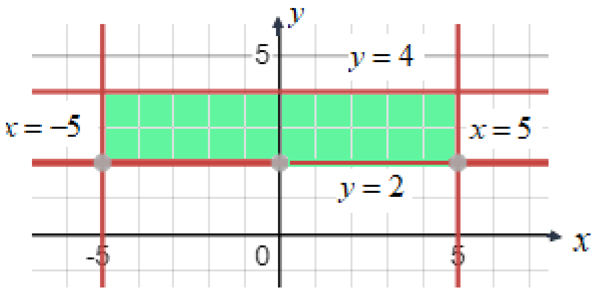
כאשר $x\to+\infty$ **, המחובר הימני חיובי ושואף ל-** 1 ,

ולכן $f(x)\to3+1=4$ **ו-** $y=4\ (x\to+\infty)$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

כאשר $x\to-\infty$ **, המחובר הימני שלילי ושואף ל-** (-1) ,

ולכן $f(x)\to3-1=2$ **ו-** $y=2\ (x\to-\infty)$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

נעלה את ארבע האסימפטוטות על מערכת צירים.



השטח, הכלוא בין ארבע האסימפטוטות וצבוע בירוק, הוא $(5-(-5))\cdot(4-2)=10\cdot2=20$.

תשובה: השטח הכלוא בין אסימפטוטות הוא 20 .

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a\cdot x}{x^2-4}$ **, המוגדרת עבור** $x\neq 2$ **ו-** $x\neq -2$. $a\neq 0$ **הוא פרמטר.**

הפונקציה היא אי-זוגית, ולכן הגרף שלה סימטרי לראשית הצירים,

כאשר הנקודה $(0,0)$ **היא נקודת פיתול.**

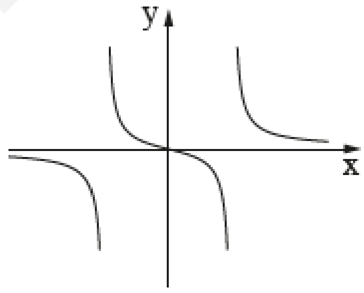
נרשום את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה

	$x>2$	$0<x<2$	$-2<x<0$	$x<-2$
x	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$
x^2-4	$(+)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
	סימני הפונקציה $f(x)$			
עבור $a>0$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$
עבור $a<0$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

(1) נזהה את הגרף המתאים, עבור $a>0$.

גרף ב מתאים, הן עקב הסימטריה לראשית הצירים ונקודת הפיתול בראשית,

והן בשל תחומי החיוביות והשליליות המתאימים.



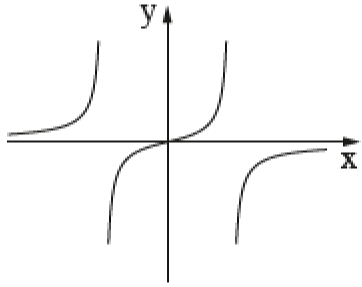
ב

תשובה: עבור $a>0$ **הגרף המתאים לפונקציה** $f(x)$ **הוא גרף ב.**

(2) נזהה את הגרף המתאים, עבור $a<0$.

גרף ה מתאים, הן עקב הסימטריה לראשית הצירים ונקודת הפיתול בראשית,

והן בשל תחומי החיוביות והשליליות המתאימים.



ה

תשובה: עבור $a<0$ **הגרף המתאים לפונקציה** $f(x)$ **הוא גרף ה.**

א. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A : $a_1 , a_2 , a_3 , ...$, שמנתה q .

נוכיח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

$$a_n \cdot a_{n+1} = a_1 q^{n-1} \cdot a_1 q^n$$
$$a_n \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot a_1 q^{2n-1} \quad \leftarrow a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$\boxed{a_n \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot a_{2n}}$$

תשובה: הוכחנו כי לכל n טבעי מתקיים $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

ב. בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A , מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים היא $10,935 \cdot a_1$.

על פי סעיף א: $a_1 \cdot a_{2k} = 10,935 \cdot a_1$, כי a_k ו- a_{k+1} הם שני האיברים האמצעיים בסדרה בת $2k$ איברים.

$$a_1 \cdot a_{2k} = 10,935 \cdot a_1 \quad / : a_1 \neq 0$$
$$a_1 q^{2k-1} = 10,935$$

כמו כן, נתון כי $a_{2k-2} = 1,215$

$$a_1 q^{2k-3} = 1,215$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$:\begin{cases} a_1 q^{2k-1} = 10,935 \\ a_1 q^{2k-3} = 1,215 \end{cases}$$
$$q^2 = 9$$
$$\boxed{q = 3 \, , \, q = -3}$$

תשובה: $q = 3$, או $q = -3$.

ג. נתון: $a_1 = 5$.

(1) כאמור, ידוע כי $a_{2k-2} = 1,215$, וזה איבר במקום זוגי בסדרה A .

אם $q = -3$, אז כל האיברים, שבמקומות הזוגיים בסדרה, הם שליליים.

לכן, $q = 3$, ואז כל איברי הסדרה A הם חיוביים (ושלמים).

מכיוון ו- $a_1 = 5$ חיובי, והמנה $q = 3$ גדולה מאחת, הרי שהסדרה עולה.

תשובה: כן, הסדרה A היא סדרה עולה.

(2) $a_1 = 5$, $q = 3$ ו- $a_{2k-2} = 1,215$.

$$a_{2k-2} = 1,215 \quad \to a_1 q^{2k-3} = 1,215 \quad \to 5 \cdot 3^{2k-3} = 1,215 \quad \to 3^{2k-3} = 243$$
$$3^{2k-3} = 3^5 \quad \to 2k-3 = 5 \quad \to 2k = 8 \quad \to \boxed{k = 4}$$

תשובה: $k = 4$.

ד. מן הסדרה A בונים את הסדרה האין-סופית B באופן הזה: $\dots \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}$.

נוכיח כי הסדרה B, שאיברה הכללי הוא $\frac{1}{a_n}$, היא סדרה הנדסית .

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{a_{n+1}} : \frac{1}{a_n}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{1}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{q}$$

$$\boxed{\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{3}}$$

ולכן הסדרה B היא סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, כי מנתה $0 < \frac{1}{3} < 1$ וקבועה.

איברה הראשון הוא $b_1 = \frac{1}{5} \leftarrow b_1 = \frac{1}{a_1}$.

תשובה: הוכחנו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית.

ה. מן הסדרה B בונים את הסדרה האין-סופית C באופן הזה: $\dots -\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}$,

נוכיח כי הסדרה C היא סדרה הנדסית .

$\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{1}{a_{n+1}} : \frac{1}{a_n}$, כי אחד, מכל שני איברים עוקבים בסדרה B, החליף סימן.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{1}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{1}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{1}{q}$$

$$\boxed{\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{1}{3}}$$

ולכן הסדרה C היא סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, כי מנתה $-1 < -\frac{1}{3} < 0$ וקבועה.

איברה הראשון הוא $c_1 = -\frac{1}{5} \leftarrow c_1 = -\frac{1}{a_1}$.

סכום הסדרה C הוא: $S^c = \frac{c_1}{1-q_c} = \frac{-1/5}{1-(-1/3)} = \frac{-1/5}{4/3} = -\frac{3}{20} = -0.15$.

תשובה: סכום הסדרה C הוא $(-\frac{3}{20}) = (-0.15)$.

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- מבוגרים** $\bar{A}$ **- צעירים**

B **- שולטים באנגלית** $\bar{B}$ **- לא שולטים באנגלית**

<u>נתונים ומשמעויות מידיות</u>

נסמן p **- ההסתברות לבחור באקראי, צעיר ששולט באנגלית, מכלל משתתפי הסקר** $(P(\bar{A}\cap B) = p)$.

(1) $N(A\cap B) = 3N(\bar{A}\cap B) \quad \to P(A\cap B) = 3p$

(2) $N(A\cap \bar{B}) = 2\frac{2}{3}N(A\cap B) \quad \to P(A\cap \bar{B}) = 8p$

	A **מבוגרים**	$\bar{A}$ **צעירים**	
B **- שולטים באנגלית**	$3p$	p	
$\bar{B}$ **- לא שולטים באנגלית**	$8p$		
	$11p$		1

$P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{3p}{11p} = \frac{3}{11}$.

תשובה: ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית, מבין המבוגרים, היא $\frac{3}{11}$.

ב. בוחרים באקראי שלושה מבוגרים, מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר.

נחשב את ההסתברות שבדיוק 2**, מתוך** 3 **המבוגרים, שולטים באנגלית.**

מדובר בהתפלגות בינומית, כאשר $n = 3$, $p = P(B/A) = \frac{3}{11}$, $k = 2$.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$P_3(2) = \binom{3}{2}\cdot(\frac{3}{11})^2\cdot(1-\frac{3}{11})^{3-2} = 3\cdot(\frac{3}{11})^2\cdot(\frac{8}{11}) = \frac{216}{1,331} \approx 0.1623$$

תשובה: ההסתברות, שבדיוק 2 **מתוך** 3 **המבוגרים שנבחרו שולטים באנגלית, היא** $\frac{216}{1,331} \approx 0.1623$.

ג. (1) נשלים את הטבלה.

	צעירים $\bar{A}$	**מבוגרים** A	
שולטים באנגלית - B	p	$3p$	$4p$
לא שולטים באנגלית - $\bar{B}$	$1-12p$	$8p$	$1-4p$
	$1-11p$	$11p$	1

תשובה: ההסתברות, לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר, היא $1-12p$.

(2) הסתברות היא תמיד מספר בין 0 **ל-** 1**, כולל.**

על פי נתוני השאלה $0<p<1$ **, ולכן גם** $1-12p$**, שהוא הביטוי הקטן ביותר בטבלה, הוא בתחום הזה.**

$$1-12p>0 \quad \rightarrow -12p>-1 \quad \rightarrow p<\frac{1}{12}.$$

תשובה: הראינו כי תחום הערכים האפשרי, בעבור p **, הוא** $0<p<\frac{1}{12}$.

ד. ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית, שווה להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.

$$P(A/\bar{B})=P(\bar{A}/\bar{B})$$

$$\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} \quad /\cdot P(\bar{B})$$

$$8p=1-12p$$

$$20p=1$$

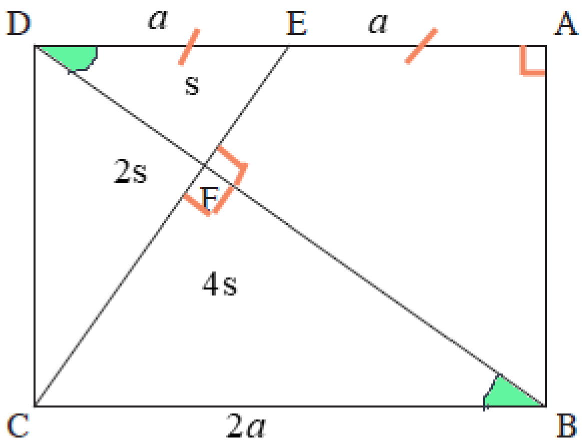
$$\boxed{p=\frac{1}{20}=0.05}$$

תשובה: $p=\frac{1}{20}=0.05$.

ה. נבדוק האם המאורעות "לשלוט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=11p=0.55 \\ P(B)=4p=0.2 \\ P(A\cap B)=3p=0.15 \end{array}\right\} P(A)\cdot P(B)\neq P(A\cap B)$$

תשובה: המאורעות "לשלוט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה.



<u>**נתונים**</u>

1. ABCD **מלבן. 2.** EABF **בר חסימה במעגל.**

עבור ב. 3. $DE = EA$.

עבור ג. 4. $S_{\Delta DEF} = s$. **עבור ה. 5.** $DE = a$.

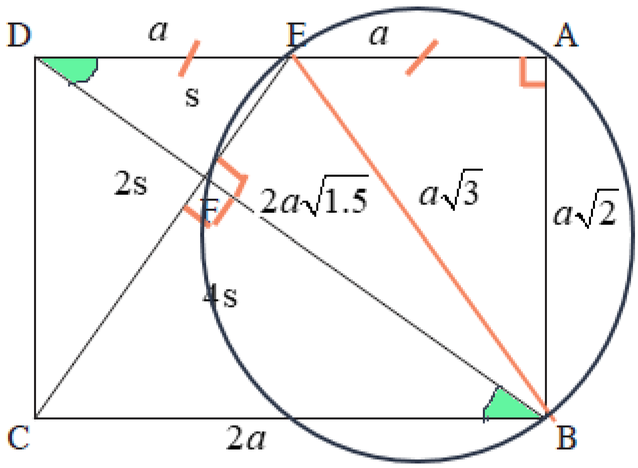
צ"ל: א. $\Delta DAB \sim \Delta BFC$

ב. $\frac{EF}{FC}$ **ג.** $S_{\Delta BFC}$, $S_{\Delta DFC}$

ד. יחס הדמיון בין ΔDAB **ל-** ΔBFC.

ה. (1) BD **(2) קוטר המעגל החוסם את המרובע** EABF.

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	6	$\sphericalangle A = 90°$	זוויות המלבן ישרות
2, 6	7	$\sphericalangle EFB = 90°$	סכום זוויות נגדיות במרובע בר חסימה הוא 180°
7	8	$\sphericalangle BFC = 90°$	זוויות צמודות משלימות ל- 180°
6, 8	9	$\sphericalangle BFC = \sphericalangle A$	כלל המעבר
1	10	$AD \parallel BC$	צלעות נגדיות מקבילות במלבן
10	11	$\sphericalangle FBC = \sphericalangle ADB$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
9, 11	12	$\Delta DAB \sim \Delta BFC$	משפט דמיון זווית זווית
מ.ש.ל. א			
12	13	$\frac{DA}{BF} = \frac{DB}{BC} = \frac{AB}{FC}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
1	14	$BC = AD$	צלעות נגדיות שוות ב מלבן
3	15	$\frac{DE}{AD} = \frac{1}{2}$	
14, 15	16	$\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$	
10, 16	17	$\frac{EF}{FC} = \frac{DE}{BC}$	משפט תאלס הרחבה 2
16, 17	18	$\frac{EF}{FC} = \frac{1}{2}$	
מ.ש.ל. ב			

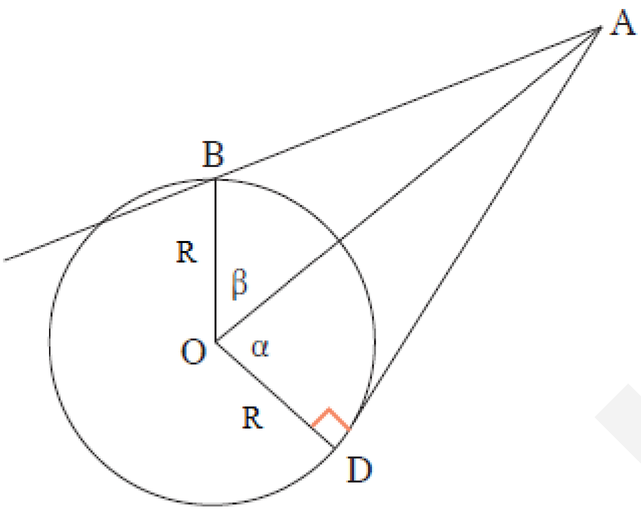


הסבר	מס'	טענה	נימוק
	19	$\sphericalangle DFE = \sphericalangle BFC$	זוויות קודקודיות שוות זו לזו
17, 19	20	$\Delta DEF \sim \Delta BFC$	משפט דמיון צלע זווית צלע
18, 20	21	$\frac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta BFC}} = \frac{1}{4}$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
4, 21	22	$\boxed{S_{\Delta BFC} = 4s}$	
4, 18	23	$\boxed{S_{\Delta DFC} = 2s}$	גובה משותף לצלעות ביחס $EF:FC=1:2$
		מ.ש.ל. ג	
22, 23	24	$S_{\Delta DBC} = 6s$	סכום שטחים
1, 24	25	$S_{\Delta DAB} = 6s$	אלכסון המלבן מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח
12	25	$\Delta DAB \sim \Delta BFC$	(הוכח)
12, 25	26	$\frac{DA}{BF} = \frac{DB}{BC} = \frac{AB}{FC} = \sqrt{1.5}$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
		מ.ש.ל. ד	
5, 16	27	$BC = 2a$	
26, 27	28	$DB = 2a\sqrt{1.5}$	
		מ.ש.ל. ה(1)	
6, 27, 28	29	$(AB)^2 = (2a\sqrt{1.5})^2 - (2a)^2$ $AB = a\sqrt{2}$	משפט פיתגורס ΔABD
6, 29	30	$(BE)^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$ $BE = a\sqrt{3}$	משפט פיתגורס ΔABD
2, 6	32	קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF הוא $a\sqrt{3}$	נשען על זווית היקפית ישרה
		מ.ש.ל. ה(2)	

א. (1) $\underline{\Delta AOD}$ **ישר זווית (** $\measuredangle ODA = 90^\circ$ **), רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה)**

$$\cos\alpha = \frac{OD}{AO}$$

$$\boxed{AO = \frac{R}{\cos\alpha}}$$



תשובה: $AO = \frac{R}{\cos\alpha}$.

(2) $\underline{\Delta ABO}$ **לפי משפט הקוסינוסים.**

$$(AB)^2 = (OB)^2 + (AO)^2 - 2OB \cdot AO \cdot \cos\beta$$

$$(AB)^2 = R^2 + (\frac{R}{\cos\alpha})^2 - 2R \cdot \frac{R}{\cos\alpha} \cdot \cos\beta$$

$$(AB)^2 = R^2 + \frac{R^2}{\cos^2\alpha} - \frac{2R^2\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$(AB)^2 = \frac{R^2\cos^2\alpha + R^2 - 2R^2\cos\alpha\cos\beta}{\cos^2\alpha}$$

$$\boxed{AB = \frac{R}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta}}$$

תשובה: $AB = \frac{R}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta}$.

ב. נתון: $AB = R\sqrt{2}$.

$$R\sqrt{2} = \frac{R}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta} \quad / : (\frac{R}{\cos\alpha}) > 0$$

$$\sqrt{2}\cos\alpha = \sqrt{1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta}$$

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$0 = 1 - \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$0 = \sin^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta \quad \leftarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \sin^2\alpha$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}}$$

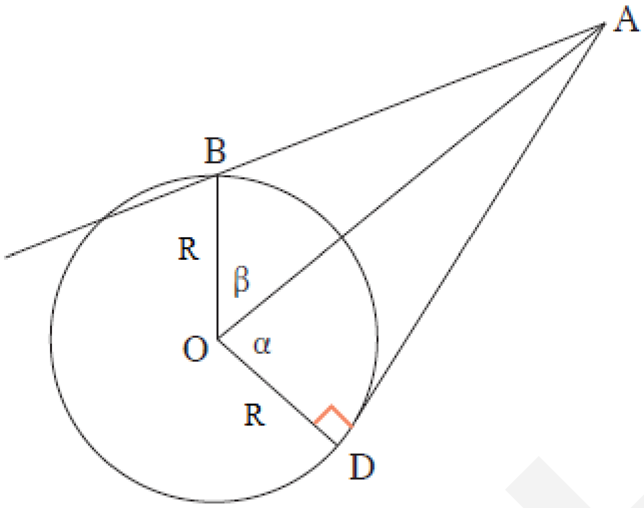
תשובה: הוכחנו כי $\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

ג. נתון: ΔADO **חסום במעגל אחר שרדיוסו** r.

נתון: $\frac{R}{r}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$

ΔADO **ישר זווית (** $\sphericalangle ODA=90°$**), ולכן** $AO=2r$,

כי AO **הוא קוטר המעגל החוסם את** ΔADO **(נמצא מול זווית היקפית ישרה).**



$$AO=\frac{R}{\cos\alpha}$$
$$2r=\frac{R}{\cos\alpha}$$
$$2\cos\alpha=\frac{R}{r}$$
$$2\cos\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{5}$$
$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{5}$$
$$\boxed{\alpha=58.05°}$$

$$\cos\beta=\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$$
$$\cos\beta=\frac{\sin^2 58.05°}{2\cos 58.05°}$$
$$\cos\beta=0.6803$$
$$\boxed{\beta=47.13°}$$

תשובה: $\alpha=58.05°$, $\beta=47.13°$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+a}}$ ($a>0$ **, פרמטר חיובי).**

בתחום ההגדרה, הביטוי בתוך השורש צ"ל אי-שלילי והמכנה צ"ל שונה מ- 0 **, לכן הביטוי צ"ל חיובי.**

$x+a>0 \quad \rightarrow \boxed{x>(-a)}$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x>(-a)$.

ב. נתון כי לפונקציה $f(x)$ **אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.**

(1) לכן, $x=-a$**, שהוא מספר שלילי, מאפס גם את המונה.**

את המונה (x^2-9) **מאפסים המספרים** $x=\pm 3$.

לכן $x=-3$ **מאפס גם את המכנה, ו-** $a=3$ **, ו-** $f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+3}}$.

נחקור מה קורה, כאשר $x\rightarrow(-3)$ **מימין.**

$f(-2.9999)=-0.06\rightarrow 0$ **, ולכן** $(-3,0)$ **נקודת "חור", על גרף הפונקציה.**

תשובה: $a=3$.

(2) בתחום ההגדרה, $x=3$ **בלבד, מאפס את מונה הפונקציה, ולכן** $(3,0)$ **חיתוך עם ציר ה-**x.

עבור $x=0$ **, נקבל את** $(0,-3\sqrt{3})$ **כנקודת חיתוך עם ציר ה-** y .

תשובה: נקודות חיתוך של הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים :** $(3,0)$ **,** $(0,-3\sqrt{3})$.

(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\sqrt{x+3}-\frac{x^2-9}{2\sqrt{x+3}}}{(\sqrt{x+3})^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{4x(x+3)-(x^2-9)}{2\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2+12x-x^2+9}{2(x+3)\cdot(\sqrt{x+3})}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{3x^2+12x+9}{2\sqrt{(x+3)^3}}}$$

$$0=3x^2+12x+9$$

$$x=-1,\ \cancel{x=-3}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2)<0 \\ f'(0)>0 \end{array}\right\} \boxed{(-1,-4\sqrt{2}),\ \min}$$

דרך פתרון חליפית

$$f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+3}}=\frac{(x+3)(x-3)}{\sqrt{x+3}}$$

$$\boxed{f(x)=(x-3)\sqrt{x+3},\ x>-3}$$

תחומי חיוביות ושליליות נשארו כמו בפונקציה המקורית,

ולכן בתחום ההגדרה $(x>-3)$ **הפונקציות שקולות.**

$$f'(x)=\sqrt{x+3}+\frac{x-3}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+3)+x-3}{2\sqrt{x+3}}$$

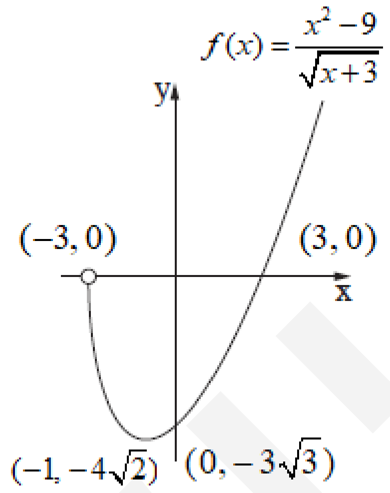
$$\boxed{f'(x)=\frac{3x+3}{2\sqrt{x+3}}}$$

$$0=3x+3 \quad \rightarrow x=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2)<0 \\ f'(0)>0 \end{array}\right\} \boxed{(-1,-4\sqrt{2}),\ \min}$$

תשובה: $(-1,-4\sqrt{2})$ **, מינימום.**

(4) הסקיצה המתאימה.



תשובה: הסקיצה מעל.

ג. נתונות הפונקציות $g(x)=-f(x+2)$ **ו-** $h(x)=|f(x)|$.

(1) $g(x)=-f(x+2)$ **, מורכבת מ-** $f(x)$ **, עם שתי טרנספורמציות:**

- **הזזה** 2 **יחידות שמאלה, כאשר תחום ההגדרה הוא** $x>-5$ **ו-** $(-3,-4\sqrt{2})$ **, מינימום.**
- **היפוך סביב ציר ה-** x **, כאשר תחום ההגדרה הוא** $x>-5$ **ו-** $(-3,4\sqrt{2})$ **, מקסימום.**

$h(x)=|f(x)|$ **מורכבת מ-** $f(x)$ **, כאשר בתחום שבו** $f(x)$ **שלילית,** $h(x)$ **חיובית,**

כלומר, ניתן לרשום אותה בתחום מפוצל: $h(x)=\begin{cases} f(x) & ,x\geq 3 \\ -f(x) & ,-3<x<3 \end{cases}$

- **תחום ההגדרה ללא שינוי,**

כאשר $(-3,4\sqrt{2})$ **, מקסימום, וגם** $(3,0)$ **מינימום (עם "שפיץ") וגם נקודת פיתול !!! .**

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ **הוא** $x>-5$ **, ושל** $h(x)$ **הוא** $x>-3$

(2) תשובה: שיעורי ה- y **של נקודת המקסימום של שתי הפונקציות שווים זה לזה (גם שיעורי ה-** x **) .**

ד. נתון: $\int_{-3}^{k} g(x)\,dx=\int_{-1}^{3} h(x)\,dx$

האינטגרל המסוים $\int_{-1}^{3} h(x)\,dx$ **מייצג את השטח, מעל ציר ה-** x **של** $h(x)=-f(x)$ **, בתחום** $-1<x<3$ **.**

<u>השטח השווה לו</u> הוא $\int_{-3}^{1} g(x)\,dx$ **שמייצג את השטח, מעל ציר ה-** x **, של** $g(x)$ **, בתחום** $-3<x<1$

לאחר ההזזה 2 **יחידות שמאלה.**

תשובה: עבור $k=1$ **,** $\int_{-3}^{k} g(x)\,dx=\int_{-1}^{3} h(x)\,dx$ **.**

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x-1=-\cos 2x-1$ **המוגדרת לכל** x .

ניתן לפשט את הפונקציה, על-פי הזהות $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

מכאן ש- $f(x)=-\cos 2x-1$.

זו טרנספורמציה, בשלושה שלבים, של $\cos x$.

(1) כיווץ פי 2 **(2) סיבוב סביר ציר ה-** x **(3) הורדה אנכית** 1 **יחידות כלפי מטה.**

לכן, נענה על כל הסעיפים, בהתאם להבנה זו שח הטרנספורמציה.

(אולי ייצא קצת ארוך, אבל חשוב להבנה, בראיית הבגרויות האחרונות והבאות)

הפונקציה $\cos x$ **היא פונקציה זוגית, הסימטרית לציר ה-** y **עם נקודת קיצון על ציר זה (** $(0,1)$ **מקסימום).**

הכיווץ פי 2 **והסיבוב סביר ציר ה-** x **שומרים על תכונות אלו, (כאשר** $(0,-1)$ **מינימום).**

ההורדה האנכית, גם שומרת על הזוגיות והסימטריה לציר ה- y **, (והפעם** $(0,-2)$ **מינימום).**

תשובה: הפונקציה $f(x)$ **היא פונקציה זוגית.**

ב. תחום הערכים של הפונקציה $\cos x$ **הוא** $-1\le\cos x\le 1$,

כאשר הכיווץ פי 2 **והסיבוב סביר ציר ה-** x **שומרים על תחום ערכים זה.**

ההורדה אנכית 1 **יחידות כלפי מטה, מורידה ב-** 1 **את תחום הערכים, כך ש-** $-2\le f(x)\le 0$.

תשובה: הוכחנו כי תחום הערכים של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $-2\le f(x)\le 0$.

ג. בתחום $-2\pi\le x\le 2\pi$, $\cos x=-1$ **עבור** π , $x=-\pi$.

לאחר הכיווץ פי 2**, בתחום המבוקש** $-\pi\le x\le\pi$: $\cos 2x=-1$ **עבור** $x=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$.

לאחר הסיבוב סביר ציר ה- x : $\cos 2x=1$ **עבור** $x=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$.

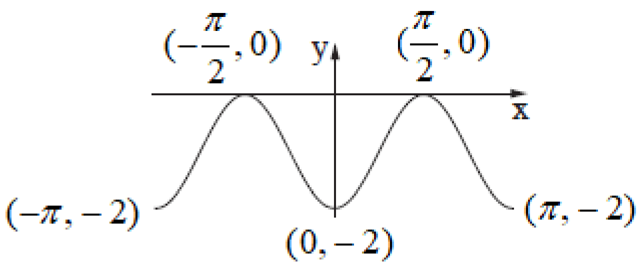
לאחר הורדה אנכית 1 **יחידות כלפי מטה :** $\cos 2x=0$ **עבור** $x=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$.

את $(0,-2)$**, נקודת החיתוך עם ציר ה-** y **מצאנו כבר כנקודת מינימום.**

תשובה: נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים הן:** $(0,-2)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(-\frac{\pi}{2},0)$.

ד. המחזוריות של $\cos 2x$ היא π , ובהתאם נקודות הקצה הן: $(\pi,-2)$ ו- $(-\pi,-2)$.

$f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x-1=-\cos 2x-1$



תשובה: הסרטוט מעל.

ה. נתונה הפונקציה: $g(x)=f(2x)$ המוגדרת לכל x .

זו טרנספורמציה, כיווץ פי 2, של $f(x)$!!!.

לכן, נענה מיידית, תוך מבט על הסקיצה מסעיף ד.

תשובה: $(\frac{\pi}{2},-2)$ מינימום, $(\frac{\pi}{4},0)$ מקסימום, $(0,-2)$ מינימום, $(-\frac{\pi}{4},0)$ מקסימום, $(-\frac{\pi}{2},-2)$ מינימום.

ו. נתון: $\int_0^{\frac{\pi}{8}}[g'(x)-f'(x)]\,dx=S$.

נביע את $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0}[g'(x)-f'(x)]\,dx$ באמצעות S.

$f(x)$ ו- $g(x)$ הן פונקציות זוגיות, לכן $f'(x)$ ו- $g'(x)$ הן פונקציות אי-זוגיות.

ההפרש של פונקציות אי-זוגיות, הוא גם פונקציה אי-זוגית.

לכן השטח, שמיוצג על ידי האינטגרל המסוים הזה $\int_0^{\frac{\pi}{8}}[g'(x)-f'(x)]\,dx$

סימטרי לשטח שמיוצג על ידי האינטגרל המסוים הזה $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0}[g'(x)-f'(x)]\,dx$,

כי מדובר בגבולות עם סימנים נגדיים,

כאשר ראשית הצירים היא נקודת הסימטריה, ולכן השטחים מנוגדים בסימניהם.

תשובה: $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0}[g'(x)-f'(x)]\,dx=-S$.

<u>דרך נוספת לפתרון סעיף ו:</u>

נסתמך על העובדה ששתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ הן פונקציות זוגיות,

ולכן מתקיים: $f(\frac{\pi}{8})=f(-\frac{\pi}{8})$ **,** $g(\frac{\pi}{8})=g(-\frac{\pi}{8})$ **. בנוסף מתקיים:** $f(0)=g(0)$ **.**

נתון: $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left[g'(x)-f'(x)\right]dx=S$ **,**

כלומר: $S=\left[g(x)-f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{8}}=[g(\frac{\pi}{8})-f(\frac{\pi}{8})]-[g(0)-f(0)]=g(\frac{\pi}{8})-f(\frac{\pi}{8})$ **.**

$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0}(g'(x)-f'(x))dx=[g(x)-f(x)]_{-\frac{\pi}{8}}^{0}=[g(0)-f(0)]-[g(-\frac{\pi}{8})-f(-\frac{\pi}{8})]=-[g(\frac{\pi}{8})-f(\frac{\pi}{8})]=-S$ **.**

א. נמצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^3+4x^2$,

בנקודה B **שבה** $x=t$ ($t<0$, **כי** B **ברביע השני).**

$x=t$ **בנקודת ההשקה, ולכן שיעורי נקודת ההשקה הם:** (t,t^3+4t^2) .

שיפוע המשיק שווה לערך הנגזרת בנקודה: $m=3t^2+8t \leftarrow f'(x)=3x^2+8x$

נמצא את משוואת המשיק:

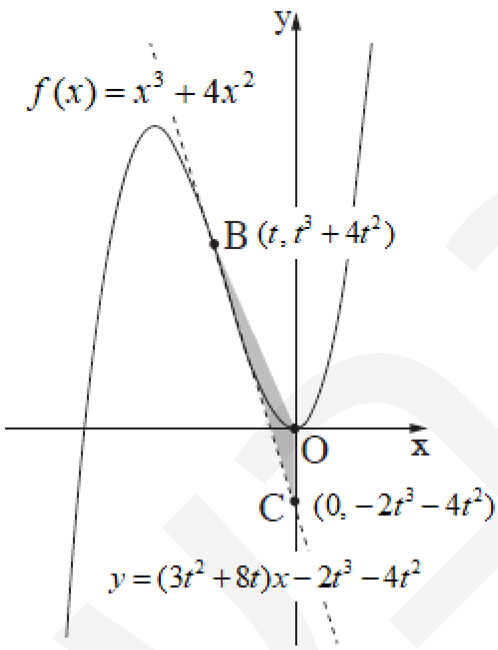
$$y-(t^3+4t^2)=(3t^2+8t)(x-t)$$

$$y=(3t^2+8t)x-3t^3-8t^2-t^2+t^3+4t^2 \ .$$

$$\boxed{y=(3t^2+8t)x-2t^3-4t^2}$$

תשובה: משוואת המשיק, לגרף הפונקציה $f(x)$ **בנקודה** B, **היא** $y=(3t^2+8t)x-2t^3-4t^2$.

ב. ידוע כי הנקודה C **נמצאת מתחת לציר ה-** x **, כלומר** $y_C<0$.



שיעורי הנקודה C **הם** $(0,-2t^3-4t^2)$.

$$-2t^3-4t^2<0 \quad /:t^2>0$$

$$-2t-4<0$$

$$-2t<4 \quad /:(-2)<0$$

$$t>-2$$

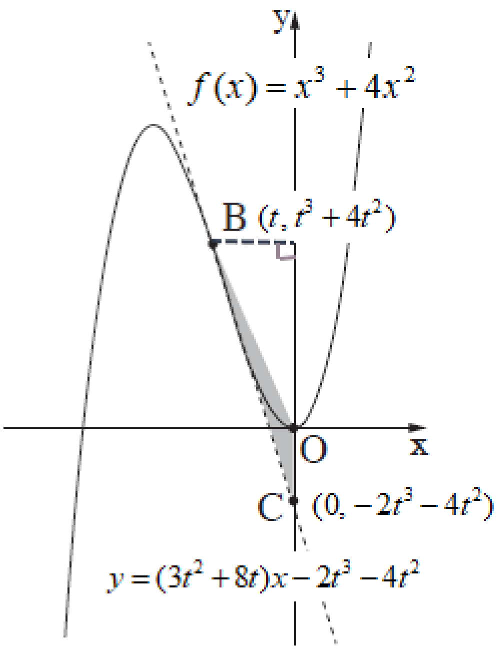
ומכיוון ו- $t<0$, **אז נקבל ש-** $-2<t<0$.

תשובה: תחום הערכים של t **הוא** $-2<t<0$.

ג. הפונקציה שיש להביא למקסימום היא שטח המשולש OBC (השטח האפור בציור).

לצלע OC יש גובה חיצוני לקודקוד B .

$$OC = 0 - y_C = -(-2t^3 - 4t^2) = 2t^3 + 4t^2$$
$$h = 0 - x_B = 0 - t = -t$$



השטח המבוקש:

$$s(t) = \frac{OC \cdot h}{2}$$
$$s(t) = \frac{1}{2}(2t^3 + 4t^2) \cdot (-t)$$
$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}(-2t^4 - 4t^3)}$$

נמצא נקודת קיצון:

$$\boxed{S'(t) = \frac{1}{2} \cdot (-8t^3 - 12t^2)}$$
$$-8t^3 - 12t^2 = 0 \quad / : 8t^2 > 0$$
$$-t - 1.5 = 0$$
$$t = -1.5$$
$$\boxed{S''(t) = \frac{1}{2} \cdot (-24t^2 - 24t)}$$
$$S''(-1.5) = -9 < 0 \quad \rightarrow \max$$
$$S(-1.5) = \frac{1}{2}(-2(-1.5)^4 - 4(-1.5)^3) = 1\frac{11}{16}$$

תשובה: השטח המקסימלי של המשולש OBC הוא $1\frac{11}{16}$.