שאלון 35571 מועד
קיץ תשפ״ב

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35571 מועד קיץ תשפ״ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. נוכיח כי הביטוי 4^n-1 מתחלק ב- 3 ללא שארית לכל n טבעי.

<u>נוכיח "בדרך אחרת"</u>

$4^n-1=(2^n+1)(2^n-1)$

אחד מבין שלושת המספרים העוקבים: $2^n-1 , 2^n , 2^n+1$, מתחלק ב- 3 ללא שארית ,

ויהיה זה המספר האי-זוגי הראשון 2^n-1, או השני 2^n+1, כי 2^n אינו מתחלק ב- 3.

ברור שהמספר האי-זוגי השני שלם אף הוא,

ולכן שהמכפלה $4^n-1=(2^n+1)(2^n-1)$ תתחלק ב- 3 ללא שארית.

כלומר: 4^n-1 הוא מכפלה של שני מספרים אי-זוגיים עוקבים,

מהם גורם אחד הוא תמיד כפולה של 3,

לכן, המכפלה תתחלק תמיד ב- 3 ללא שארית.

תשובה: הוכחנו, בדרך אחרת, כי הביטוי 4^n-1 מתחלק ב- 3 ללא שארית.

<u>לחילופין, נוכיח באינדוקציה</u>

א.1. נבדוק את נכונות הטענה, הביטוי 4^n-1 מתחלק ב- 3 ללא שארית לכל n טבעי.

במילים אחרות, נוכיח כי הביטוי $\frac{4^n-1}{3}$ שלם, לכל n טבעי.

עבור $n=1$

$$\frac{4^1-1}{3}=\frac{3}{1}=1$$

לכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה), כלומר: $\frac{4^k-1}{3}$ שלם,

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, לכן צ"ל $\frac{4^{k+1}-1}{3}$ שלם.

$$\frac{4^{k+1}-1}{3}=$$
$$=\frac{4\cdot 4^k-1}{3}=$$
$$=\frac{3\cdot 4^k+4^k-1}{3}=$$
$$=\frac{3\cdot 4^k}{3}+\frac{4^k-1}{3}=$$
$$=4^k+\frac{4^k-1}{3}$$

המחובר הימני שלם , על-פי הנחת האינדוקציה,

המחובר השמאלי שלם, כי k מספר טבעי.

מכאן ש- $\frac{4^{k+1}-1}{3}$ שלם.

3. לכן, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

<u>עוד הוכחה "בדרך אחרת"</u>

$$\frac{4^n-1}{3}=\frac{1\cdot(4^n-1)}{4-1}$$

קבלנו ביטוי שזהה לנוסחת סכום של סדרה הנדסית $\left(S_n=\frac{a_1\cdot(q^n-1)}{q-1}\right)$,

שבה $a_1=1$ ו- $q=4$, ולכן כל איבריה שלמים וכך גם סכומה.

מכאן, שהביטוי 4^n-1 מתחלק ב- 3 ללא שארית לכל n טבעי .

ב. נמצא דוגמה ל- p עבורו הביטוי $4^{n+1}+p$ מתחלק ב- 12 ללא שארית, לכל n טבעי.

$$\frac{4^{n+1}+p}{12}=$$
$$=\frac{4\cdot 4^{n}+p}{12}=$$
$$=\frac{4\cdot 4^{n}-4+4+p}{12}=$$
$$=\frac{4\cdot(4^{n}-1)+4+p}{12}$$
$$=\frac{4\cdot(4^{n}-1)}{12}+\frac{4+p}{12}=$$
$$=\frac{4^{n}-1}{3}+\frac{4+p}{12}$$

המחובר השמאלי שלם על פי ההוכחה בסעיף א.

עבור, לדוגמה $p=8$ גם המחובר הימני יהייה שלם (למעשה עבור כל $p=8+12t$ לכל t שלם).

תשובה: לדוגמה, עבור $p=8$, הביטוי $4^{n+1}+p$ מתחלק ב- 12 ללא שארית, לכל n טבעי.

נתונה הפונקציה $f(x)=(2-\frac{1}{x})^3$

(1) תחום ההגדרה הוא $x\neq 0$ **.**

כאשר $x\to\pm\infty$ **מתקיים** $\frac{1}{x}\to\pm 0$ **ו-** $f(x)\to 2^3=8$ **(כאשר** $y=8$ **אסימפטוטה אופקית).**

מכאן, ש- $f'(x)\to 0$ **ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין ולשמאל.**

לכן, גרף ג הוא הגרף המתאים, שבו ניתן לראות ש- $y=0$ **הוא אסימפטוטה אופקית לימין ולשמאל.**

תשובה: גרף ג מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$ **.**

(2) נביט על תחומי העלייה והירידה של $f'(x)$ **.**

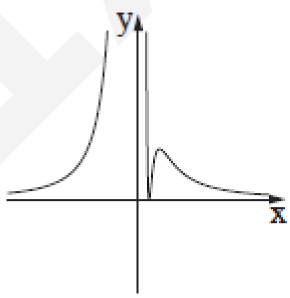
עבור $x<0$ $f'(x)$ **עולה ו-** $f(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $(\cup)$ **.**

עבור $x>0$ $f'(x)$ **יורדת, עולה ויורדת שוב,**

ו- $f(x)$ **קעורה כלפי מטה** $(\cap)$ **, כלפי מעלה** $(\cup)$ **ושוב כלפי מטה** $(\cap)$**,**

ונקבל שתי נקודות פיתול מימין לציר ה- y **.**

תשובה: לפונקציה $f(x)$ **יש שתי נקודות פיתול.**



ג

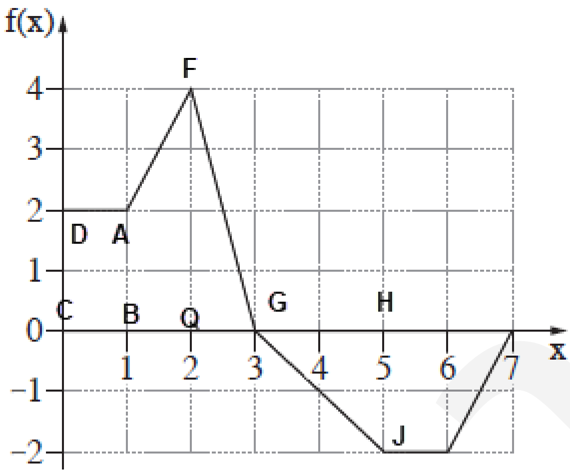
נתונה הפונקציה $h(t)=\int_0^t f(x)\,dx$ **, המוגדרת כמו** $f(x)$ **בתחום** $0\le x\le 7$ **.**

$h(t)$ **היא פונקציה שצוברת שטחים.**

$h(t)$ **צוברת תחילה שטחים חיוביים בתחום** $0<x<3$ **, ולאחר מכן שטחים שליליים בתחום** $3<x<7$**.**

את השטחים המצטברים, נחשב בעזרת נוסחאות לחישוב מצולעים, בהתאם למערכת הצירים.

(1) נחשב את $h(0)$ **-** $h(t)=\int_0^0 f(x)\,dx=0$ **, כמובן.**



נחשב את $h(3)$ **- סכום של שטחים חיוביים.**

$$h(3)=S_{\text{ABCD}}+S_{\text{BAFQ}}+S_{\Delta\text{FQG}}$$

$$.\,h(3)=1\cdot 2+\frac{(2+4)\cdot 1}{2}+\frac{1\cdot 4}{2}$$

$$\boxed{h(3)=7}$$

נחשב את $h(5)$ **- סכום של שטח חיובי ושטח שלילי.**

$$h(5)=S_{\text{CDFG}}-S_{\Delta\text{GHJ}}$$

$$.\,h(5)=7-\frac{2\cdot 2}{2}$$

$$\boxed{h(5)=5}$$

תשובה: $h(0)=0$, $h(3)=7$, $h(5)=5$.

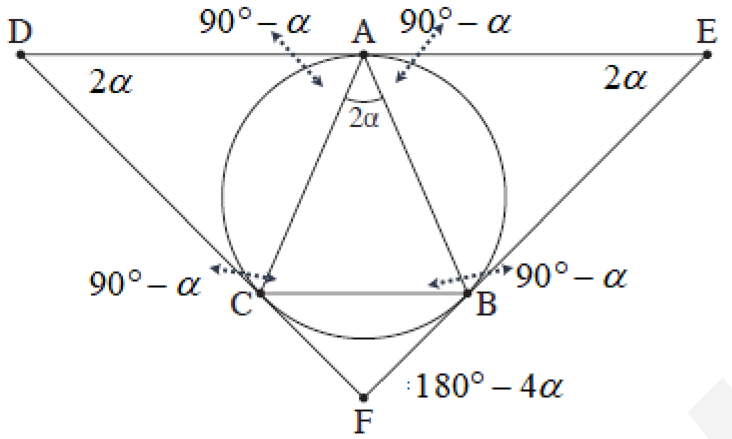
(2) כל עוד נחבר שטחים חיוביים, כלומר בתחום $0<x<3$ **,** $h(t)$ **תעלה.**

כאשר נחבר שטחים שליליים, כלומר בתחום $3<x<7$ **,** $h(t)$ **תרד.**

מכאן, ש- $t=3$ **יהייה שיעור ה-** t **של המקסימום עם ערך מקסימלי של** 7 **,**

כאשר נקודת המקסימום של $h(t)$ **תהייה** $(3,7)$ **. (הרי מצאנו ש-** $h(3)=7$ **.)**

תשובה: $h(t)$ **יורדת בתחום** $3<x<7$**.**



ΔABC שווה שוקיים, כאשר זווית הראש היא 2α.

זוויות הבסיס שוות זו לזו, ב- ΔABC, לכן $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 90^\circ - \alpha$.

$\sphericalangle EAB = \sphericalangle DAC = 90^\circ - \alpha$, כי שתיהן זוויות בין משיק למיתר.

$\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA = 90^\circ - \alpha$, = $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EBA = 90^\circ - \alpha$,

כי אם יוצאים מנקודה שני משיקים למעגל, אז הם שווים זה לזה.

מכאן ש- $\sphericalangle E = \sphericalangle D = 2\alpha$ (סכום זוויות 180° במשולשים EAB ו- DAC).

ולבסוף $\sphericalangle F = 180^\circ - 4\alpha$ (סכום זוויות 180° במשולש DEF).

תשובה: $\sphericalangle E = \sphericalangle D = 2\alpha$, $\sphericalangle F = 180^\circ - 4\alpha$.

א. נתונה סדרה הנדסית I **אין-סופית** $a_1 , a_2 , a_3 , ...$**, שמנתה** $q_{\mathrm{I}} = 9 \cdot r^2$ **.**

(1) נתון $0 < r < \frac{1}{3}$ **, ולכן** $0 < q_{\mathrm{I}} = 9 \cdot r^2 < 9 \cdot (\frac{1}{3})^2 = 1$**.**

ומכאן $0 < q_{\mathrm{I}} < 1$ **וסדרה** I **היא סידרה הנדסית <u>מתכנסת</u>.**

בין כל שני איברים סמוכים בסדרה I **הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית <u>יורדת</u>** II **.**

איברי הסדרה II **הם**$b_1 , b_2 , b_3 , ...$**, , ומנתה** q **.**

מכאן ש- $b_1 = a_1 , b_3 = a_2$**, ולכן :**

$$b_1 q^2 = a_1 q_{\mathrm{I}} \quad / : b_1 = a_1$$
$$q^2 = 9r^2$$
$$\boxed{q = 3r} \qquad \cancel{q = -3r}$$

פתרון אחד נפסל כי $0 < r < \frac{1}{3}$ **כלומר חיובי,**

ו- II **סדרה יורדת ולכן** q **חייב להיות חיובי, אחרת האיברים יחליפו סימן והסדרה לא תעלה ולא תרד.**

מכאן, גם ניתן ללמוד שאיברי שתי הסדרות חיוביים.

תשובה: $q = 3r$ **.**

(2) הראינו כי $0 < q_{\mathrm{I}} < 1$ **וסדרה** I **היא סידרה הנדסית <u>מתכנסת</u>.**

כיוון ש- $q = 3r$ **, ו-** $0 < r < \frac{1}{3}$ **מתקבל ש** $0 < q < 1$**, וגם** II **היא סידרה הנדסית <u>מתכנסת</u>.**

תשובה: הסברנו מדוע שתי הסדרות, I **ו-** II**, מתכנסות.**

ב. נתון כי: $S_{\mathrm{II}} = \frac{4}{3} S_{\mathrm{I}}$ **.**

$$\frac{b_1}{1-q} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a_1}{1-q_{\mathrm{I}}} \quad / : b_1 = a_1$$
$$3(1-9r^2) = 4(1-3r) \quad / : (1-3r > 0)$$
$$3(1+3r) = 4$$
$$3 + 9r = 4$$
$$9r = 1$$
$$\boxed{r = \frac{1}{9}} \quad \to q = 3r = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \quad \to \boxed{q = \frac{1}{3}}$$

תשובה: $q = \frac{1}{3}$ **.**

ג. נתון כי $S_{\text{II}\,even}=12$, סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II.

נראה שסדרת האיברים במקומות הזוגיים היא הנדסית, ונמצא את מנתה.

$\frac{b_{n+2}}{b_n}=\frac{b_nq^2}{b_n}=q^2=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$ **, ומכאן שהמנה קבועה והסדרה הנדסית,**

ובגלל ש- $0<\frac{1}{9}<1$ **, הרי שגם סדרה זו היא הנדסית מתכנסת, שכל איבריה חיוביים.**

$$S_{\text{II}\,even}=12$$

$$\frac{b_2}{1-\frac{1}{9}}=12$$

$$b_1q=\frac{32}{3}$$

$$b_1\cdot\frac{1}{3}=\frac{32}{3}$$

$$\boxed{b_1=32}\quad\rightarrow\boxed{a_1=32}$$

נראה שסדרת האיברים במקומות שמתחלקים ב- 5 **היא הנדסית, ונמצא את מנתה.**

$\frac{b_{n+5}}{b_n}=\frac{b_nq^5}{b_n}=q^5=(\frac{1}{3})^5=\frac{1}{243}$ **, ומכאן שהמנה קבועה והסדרה הנדסית.**

$0<\frac{1}{243}<1$ **, ולכן גם סדרה זו היא הנדסית מתכנסת, שכל איבריה חיוביים.**

$$S=\frac{b_5}{1-\frac{1}{243}}=\frac{b_1q^4}{242/243}=\frac{243}{242}\cdot 32\cdot(\frac{1}{3})^4=\frac{48}{121}$$

תשובה: סכום כל האיברים של סדרה II**, במקומות שמתחלקים ב-** 5**, הוא** $\frac{48}{121}$ **.**

ד. סכום כל איברי הסדרה II , שלאחר האיבר החמישי, הוא: $S=\frac{b_6}{1-q}=\frac{b_6}{1-\frac{1}{3}}=1.5b_6$

נמצא את היחס בין האיבר החמישי, לסכום כל האיברים שאחריו.

$$\frac{b_5}{1.5b_6}=\frac{b_5}{1.5b_5\cdot q}=\frac{1}{1.5\cdot\frac{1}{3}}=2$$

תשובה: היחס בין האיבר החמישי, לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה, הוא 2.

ה. בדרך דומה, נמצא את היחס בין איבר c_n בסדרה הנדסית מתכנסת כלשהי, לבין סכום האיברים שלאחריו.

סכום כל איברי הסדרה, שלאחר האיבר c_n, הוא: $S=\frac{c_{n+1}}{1-q_C}$

נמצא את היחס בין האיבר c_n לסכום כל האיברים שאחריו.

$$\frac{c_n}{c_{n+1}/(1-q_C)}=\frac{c_n(1-q_C)}{c_{n+1}}=\frac{1-q_C}{q_C}$$

תשובה: הוכחנו כי בסדרה הנדסית מתכנסת, היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שלאחריו,

אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה (והוא $\frac{1-q_C}{q_C}$).

א. $p>0$ **היא ההסתברות שנטע תפסיד במשחק, ובהתאם** $3p$ **היא ההסתברות לניצחון.**

נתון שאם נטע משחקת 2 **משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא** $4.5p$ **.**

מכאן, שההסתברות שהיא לא תנצח בשני המשחקים היא $1-4.5p$ **.**

ההסתברות שנטע לא תנצח במשחק אחד היא $1-3p$ **.**

$$1-4.5p=(1-3p)^2$$

$$1-4.5p=1-6p+9p^2$$

$$1.5p=9p^2 \quad /:9p>0$$

$$\boxed{p=\frac{1}{6}}$$

תשובה: $p=\frac{1}{6}$.

ב. **עבור** $p=\frac{1}{6}$ **, ההסתברות להפסד היא** $\frac{1}{6}$ **, ההסתברות לניצחון היא** $\frac{1}{2}$ **, וההסתברות לתיקו היא** $\frac{1}{3}$**.**

נטע שיחקה 5 **משחקים, בזה אחר זה.**

ההסתברות לנצח ב- 3 **משחקים לפחות היא:** $P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$ **,**

כאשר $n=5$ **ו-** $p=0.5$ **(הסתברות לנצח במשחק אחד).**

זו התפלגות בינומית, ונחשב באמצעות נוסחת ברנולי.

$$\mathrm{P}(\textit{at least } 3 \textit{ wins})=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=\binom{5}{3}\cdot 0.5^3\cdot 0.5^2+\binom{5}{4}\cdot 0.5^4\cdot 0.5^1+0.5^5$$

$$\mathrm{P}(\textit{at least } 3 \textit{ wins})=10\cdot 0.5^5+5\cdot 0.5^5+0.5^5=16\cdot 0.5^5=0.5$$

תשובה: ההסתברות, שנטע תנצח ב- 3 **משחקים לפחות, היא** 0.5 **.**

ג. **אם נטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים, אז היא בהכרח תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.**

ההסתברות המתאימה היא $0.5^3=0.125$ **.**

תשובה: ההסתברות, שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות, היא 0.125 **.**

ד. (1) ההסתברות לא להפסיד במשחק אחד היא $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

ההסתברות לא להפסיד בשום משחק היא $(\frac{5}{6})^5=\frac{3,125}{7,776}$.

תשובה: ההסתברות, שנטע לא תפסיד בשום משחק, היא $\frac{3,125}{7,776}$.

(2) נחשב את ההסתברות (המותנית) שנטע ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים,
וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון, אם ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות.

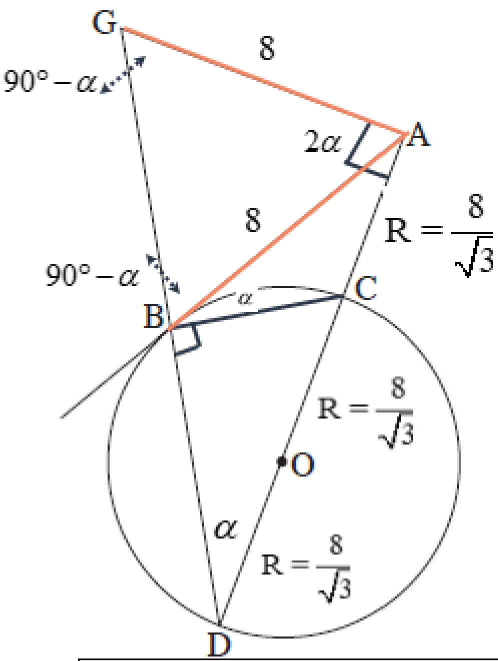
האפשרות היחידה שמתאימה לחיתוך בין שני המאורעות,
היא ניצחון בשלושת המשחקים הראשונים, הפסד במשחק הרביעי, ותיקו במשחק האחרון.

$$P(\text{הפסידה במשחק אחד לפחות / ניצחה בשלושת הראשונים ותיקו באחרון})=$$

$$=\frac{P(\text{הפסידה במשחק אחד לפחות} \cap \text{ניצחה בשלושת הראשונים ותיקו באחרון})}{P(\text{הפסידה במשחק אחד לפחות})}=$$

$$=\frac{0.5\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot \frac{1}{6}\cdot \frac{1}{3}}{1-\frac{3,125}{7,776}}=\frac{1/144}{4,651/7,776}=\frac{54}{4,651}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{54}{4,651}$.



נתונים

1. R רדיוס המעגל. **2.** O מרכז המעגל. **3.** ADC עובר ב- O.

4. AB משיק למעגל בנקודה B.

5. $\sphericalangle GAD = 90°$ **6.** $\sphericalangle ADB = \alpha$

7. עבור ב. $AC = \frac{1}{2}DC$. **8.** $AG = 8$.

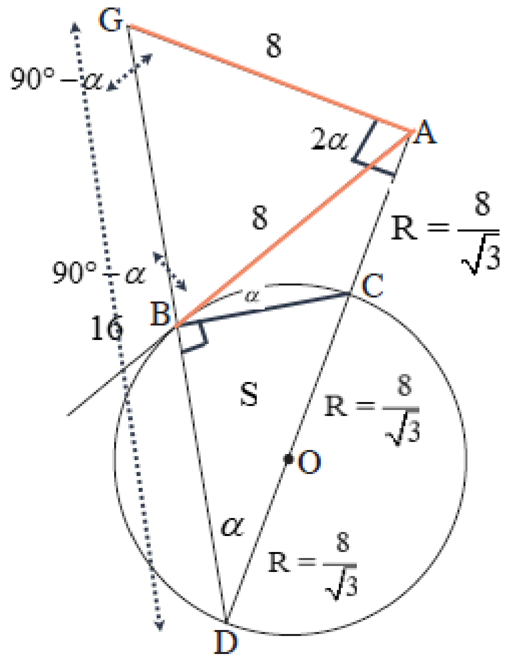
9. עבור ד. $S_{\Delta BDC} = S$.

צ"ל: **א.** הבעת זוויות ΔABG באמצעות α

ב. $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$ **ג.** R

ד. **(1)** $\Delta ADG \sim \Delta BDC$ **(2)** $S_{\Delta ADG}$ באמצעות S.

הסבר	מס'	טענה	נימוק
3 ,2	10	DC קוטר במעגל	מיתר שעובר במרכז המעגל הוא קוטר
10	11	$\sphericalangle DBC = 90°$	זווית היקפית, הנשענת על הקוטר, היא ישרה
6	12	$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADB = \alpha$	זווית בין משיק למיתר
12 ,6	13	$\boxed{\sphericalangle GBA = 90° - \alpha}$	זווית שטוחה שווה $180°$
5 ,6	14	$\boxed{\sphericalangle G = 90° - \alpha}$	סכום זוויות $180°$ ב- ΔADG
14 ,13	15	$\boxed{\sphericalangle GAB = 2\alpha}$	סכום זוויות $180°$ ב- ΔGAB
			מ.ש.ל. א
	16	$\sphericalangle ADG = \sphericalangle BDC$	זווית משותפת
16 ,12	17	$\Delta ADB \sim \Delta ABC$	משפט דמיון זווית זווית
17	18	$\frac{AD}{AB} = \boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
			מ.ש.ל. ב
10 ,7 ,1	19	$AD = 3R$	
14 ,13	20	$AB = AG = 8$	אם זוויות שוות אז צלעות מולן שוות ב- ΔGAB
19 ,18 ,8	21	$\frac{3R}{8} = \frac{8}{R} \rightarrow R^2 = \frac{64}{3}$	
21	22	$R = \frac{8}{\sqrt{3}}$	
			מ.ש.ל. ג



הסבר	מס'	טענה	נימוק
	23	$\measuredangle D = \measuredangle D$	
11 ,5	24	$\measuredangle GAD = \measuredangle DBC$	כלל המעבר
24 ,23	25	$\Delta ADG \sim \Delta BDC$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. ד(1)	
25	26	$\frac{AD}{BD} = \frac{AG}{BC} = \frac{DG}{DC}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
22 ,19	27	$AD = 8\sqrt{3}$	
27 ,20 ,5	28	$DG = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$	משפט פיתגורס ב- ΔGAD
22 ,10	29	$DC = \frac{16}{\sqrt{3}}$	
29 ,28	30	$\frac{DG}{DC} = \sqrt{3}$	
30 ,26 ,25	31	$\frac{S_{\Delta ADG}}{S_{\Delta BDC}} = 3$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
31 ,9	32	$S_{\Delta ADG} = 3S$	
		מ.ש.ל. ד(2)	

א. $\underline{\Delta ABD}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{BD}{\sin\alpha}=2R$$

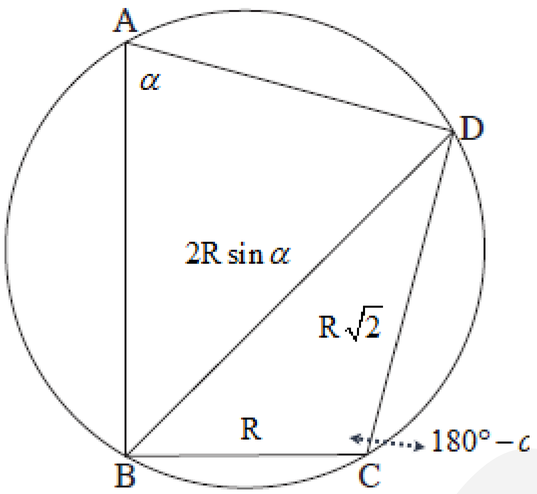
$$\boxed{BD=2R\sin\alpha}$$

תשובה: $BD=2R\sin\alpha$.

ב. נתון: $BC=R$, $CD=R\sqrt{2}$

$\sphericalangle BCD=180°-\alpha$ **(סכום זוויות נגדיות** $180°$ **במרובע חסום במעגל)**

$\underline{\Delta BDC}$ **לפי משפט הקוסינוסים**



$$(BD)^2=(BC)^2+(CD)^2-2BC\cdot CD\cos(180°-\alpha)$$

$$(2R\sin\alpha)^2=R^2+(R\sqrt{2})^2+2R\cdot R\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$4R^2\sin^2\alpha=R^2+2R^2+2\sqrt{2}R^2\cos\alpha \quad /:R^2>0$$

$$4(1-\cos^2\alpha)=3+2\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$4-4\cos^2\alpha=3+2\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$0=4\cos^2\alpha+2\sqrt{2}\cos\alpha-1$$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ \rightarrow\ \boxed{\alpha=75°}\ \leftarrow 0°<\alpha<90°$$

$$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ \rightarrow\ \cancel{\alpha=165°}$$

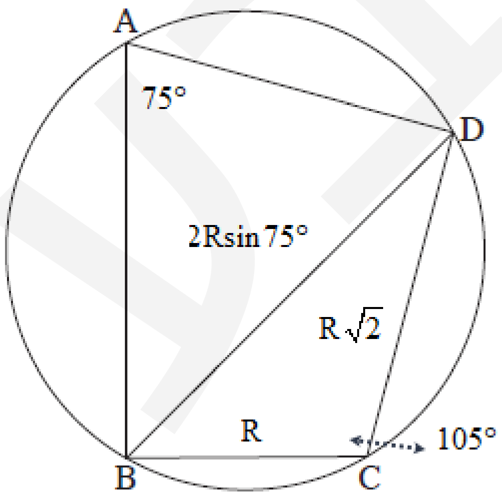
(הערה: השתמשנו בזהות $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ **, במעבר מהשורה הראשונה לשנייה.)**

תשובה: $\alpha=75°$.

ג. נתון $\sphericalangle CBD=\sphericalangle ABD$.

$$\sphericalangle BCD=105°$$

$\underline{\Delta BDC}$ **לפי משפט הסינוסים**



$$\frac{BD}{\sin 105°}=\frac{CD}{\sin\sphericalangle CBD}$$

$$\sin\sphericalangle CBD=\frac{\cancel{R}\sqrt{2}\,\cancel{\sin 105°}}{2\cancel{R}\,\cancel{\sin 75°}}$$

$$\sphericalangle CBD=45°\ \rightarrow\ \boxed{\sphericalangle ABD=45°}$$

$$\cancel{\sphericalangle CBD=135°}$$

האפשרות השנייה נפסלה, כי יש כבר זווית קהה אחת במשולש.

תשובה: $\sphericalangle ABD=45°$.

ד. כיוון ש- BD **צלע משותפת למשולשים** ΔABD **ו-** ΔBOD,

אז יחס האנכים ($\frac{h_1}{h_2}$ **, הגבהים לצלע המשותפת) ל-** BD,

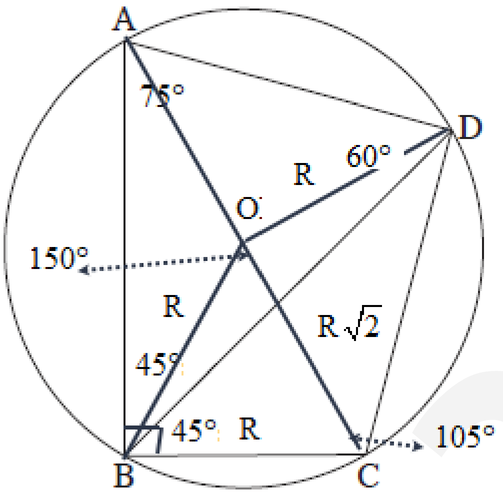
יהייה שווה ליחס השטחים.

AC **קוטר במעגל (נשען על זווית היקפית ישרה,** $\sphericalangle ABC$ **),**

ולכן הנקודה O **, מרכז המעגל, נמצאת עליו.**

$\sphericalangle ADB = 60^\circ$ **(סכום זוויות** 180° **ב-** ΔABD**)**

$\sphericalangle BOD = 150^\circ$ **(זווית מרכזית שווה לפעמיים הזווית ההיקפית הנשענת על אותה הקשת,** BCD **)**



$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ABO}} = \frac{2R^2 \sin 45^\circ \sin 75^\circ \sin 60^\circ}{R \cdot R \cdot \sin 150^\circ \cdot 0.5}$$

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ABO}} = 3 + \sqrt{3}$$

$$\boxed{\frac{h_1}{h_2} = 3 + \sqrt{3}}$$

תשובה: $\frac{h_1}{h_2} = 3 + \sqrt{3}$.

א. נתונה פונקציה: $f(x)=2x+\frac{2}{x}$.

(1) תשובה: תחום ההגדרה של $f(x)$ **הוא** $x\neq 0$.

(2) נראה שהפונקציה $f(x)$ **היא אי-זוגית.**

$$f(-x)=2(-x)+\frac{2}{-x}$$

$$f(-x)=-2(x+\frac{2}{x})$$

$$f(-x)=-f(x)$$

ולכן, הפונקציה $f(x)$ **היא פונקציה אי-זוגית, והגרף שלה סימטרי לראשית הצירים.**

תשובה: הפונקציה $f(x)$ **היא פונקציה אי-זוגית.**

(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

$$f'(x)=2-\frac{2}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^2}}$$

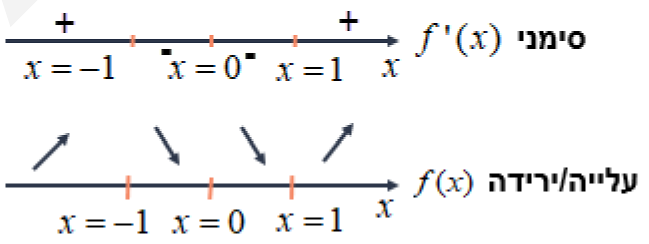
$$x^2-1=0$$

$$x=1 \quad \to (1,4)$$

$$x=-1 \quad \to (-1,-4)$$

הפונקציה $f'(x)$ **היא פונקציה זוגית, והגרף שלה סימטרי לציר ה-** y ,

נמצא את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ **, בהתאם לסימני** $f'(x)$.



העשרה, תודה לנביל קווליד: סכום שני מספרים הופכיים $(x+\frac{1}{x})$ **מקבל ערך מינימלי,**

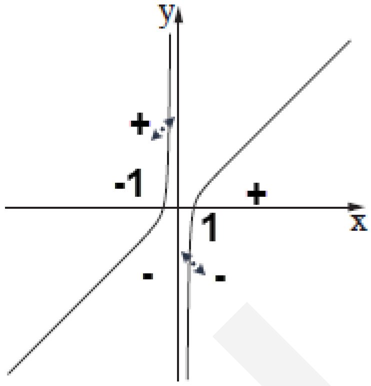
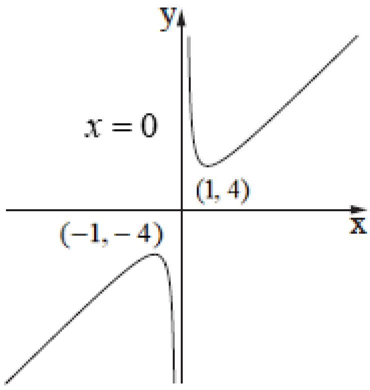
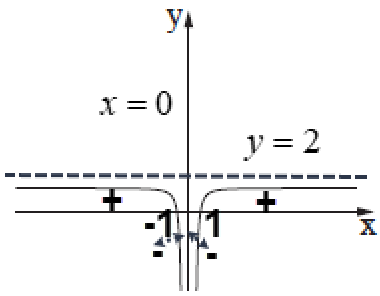
כאשר הם שווים ל-1 **, או מקסימלי כאשר הם שווים ל-** (-1) ,

והסכום המינימלי הוא 2 **והמקסימלי הוא** (-2).

לכן $f(x)=2(x+\frac{1}{x})$ **מקבלת מינימום ב-** $(1,4)$ **, ומקסימום ב-** $(-1,-4)$

תשובה: עבור $f(x)$ **- עלייה** $x>1$ **או** $x<-1$ **, ירידה -** $0<x<1$ **או** $-1<x<0$.

ב. נזהה את שלושת הגרפים, בהתאם לחקירה שעשינו עד כה.

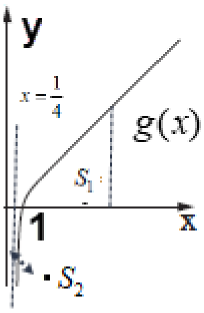
 גרף I $g(x)$ $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ ניתן לזהות על פי סימני המכפלה, של הפונקציה ושל הנגזרת. $g(x)$ חיובית כאשר $f(x)$ חיובית ועולה, או שלילית ויורדת	 גרף II $f(x)$ ל- $f(x)=2x+\frac{2}{x}$ יש אסימפטוטה אנכית $x=0$ וכפי שהסברנו זו פונקציה אי-זוגית, הסימטרית לראשית.	 גרף III $f'(x)$ פונקציה $f'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^2}$ זוגית, סימטרית לציר ה- y , עם אסימפטוטות $x=0$ ו- $y=2$, כאשר תחומי החיוביות והשליליות שלה, תואמים את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$, ותחומי העלייה והירידה שלה, תואמים את תחומי הקעירות של $f(x)$

תשובה: גרף I מתאר את $g(x)$, גרף II מתאר את $f(x)$, גרף III מתאר את $f'(x)$.

ג. כפי שהסברנו כבר בסעיף הקודם: $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$, ולכן ניתן לזהות על פי סימני המכפלה, של הפונקציה ושל הנגזרת. במקרה זה $f(x)\neq 0$ ו- $f'(x)=0$ עבור $x=\pm 1$.

תשובה: שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x הם: $(1,0)$ ו- $(-1,0)$

ד. נחשב את השטח המבוקש, שחלקו מעל ציר ה- x , וחלקו מתחת לציר ה- x.



$$S_1=\int_1^4\left[(f(x)\cdot f'(x)-0)\right]dx$$

$$S_1=\left(\frac{(f(x))^2}{2}\right)\Big]_1^4$$

$$\left.\begin{aligned} x=4: &\quad \frac{(f(4))^2}{2}=\frac{8.5^2}{2}=36.125\\ x=1: &\quad \frac{(f(1))^2}{2}=\frac{4^2}{2}=8\end{aligned}\right\}$$

$$S_1=36.125-8$$

$$\boxed{S_1=28.125}$$

$$S_2=\int_{\frac{1}{4}}^1\left[(0-f(x)\cdot f'(x))\right]dx$$

$$S_2=\left(-\frac{(f(x))^2}{2}\right)\Big]_{\frac{1}{4}}^1$$

$$\left.\begin{aligned} x=1: &\quad -\frac{(f(1))^2}{2}=-\frac{4^2}{2}=-8\\ x=\frac{1}{4}: &\quad -\frac{(f(\frac{1}{4}))^2}{2}=-\frac{8.5^2}{2}=-36.125\end{aligned}\right\}$$

$$S_2=-8-(-36.125)$$

$$\boxed{S_2=28.125}$$

והשטח כולו שווה ל- $28.125+28.125=56.25$

תשובה: השטח המוגבל הוא 56.25.

ה. נחשב את ערך האינטגרל המסוים $\int_{\frac{1}{a}}^a\left[g(x)dx\right]dx$ **, כאשר** $a>1$ **פרמטר.**

$$\int_{\frac{1}{a}}^a\left[g(x)dx\right]dx=\int_{\frac{1}{a}}^a f(x)\cdot f'(x)\,dx=\left(\frac{(f(x))^2}{2}\right)\Big]_{\frac{1}{a}}^a=\left[2x+\frac{2}{x}\right]^2\Big]_{\frac{1}{a}}^a$$

$$\left.\begin{aligned} x=a: &\quad \left[2a+\frac{2}{a}\right]^2\\ x=\frac{1}{a}: &\quad \left[\frac{2}{a}+2a\right]^2\end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\int_{\frac{1}{a}}^a\left[g(x)dx\right]dx=0}$$

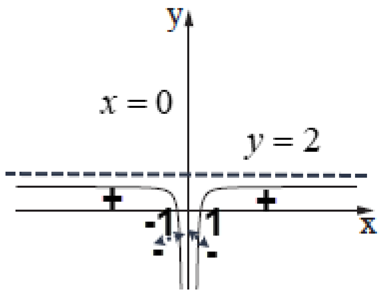
קיבלנו שני ביטויים זהים, ולכן ערך האינטגרל המסוים הוא אפס.

הערה – פתרון זה תואם את החישוב שעשינו בסעיף ד, עבור $a=4$,

כי שני השטחים שווים בערכם המוחלט.

תשובה: $\int_{\frac{1}{a}}^a\left[g(x)dx\right]dx=0$

ו. נתונה הפונקציה $h(x)=\int_1^x f\,'(t)\,dt$ **, המוגדרת בתחום** $x\geq 1$.



גרף III $f\,'(x)$

כפי שראינו, בסעיף ב, $f\,'(x)$ **עולה בתחום** $x\geq 1$,

לכן יש לה מינימום בקצה, בנקודה $(1,0)$.

תשובה: $(1,0)$ **, מינימום.**

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{2(\cos x)^2x+\sin 2x}{2\cos x}$ **בתחום** $0\le x\le 2\pi$.

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס, לכן $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ **,** $0\le x\le 2\pi$.

(2) נשים לב שגם המונה של $f(x)$ **מתאפס עבור** $x=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$.

$$f(x)=\frac{2(\cos x)^2x+\sin 2x}{2\cos x}$$
$$f(x)=\frac{2(\cos x)^2x+2\sin x\cos x}{2\cos x}$$
$$\boxed{f(x)=\cos x+\sin x \quad , \quad 0\le x\le 2\pi \quad ,x\neq\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}}$$

ומכאן שיש לנו שתי נקודות אי רציפות סליקה ("חור"), $(\frac{3\pi}{2},-1)$ **ו-** $(\frac{\pi}{2},1)$.

לכן, הפונקציה שואפת לנקודות האלו, ולא ל- $\pm\infty$ **ואין אסימפטוטות מאונכות.**

תשובה: הסברנו מדוע לפונקציה $f(x)$ **אין אסימפטוטות מאונכות לציר ה-** x .

(3) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

$$\sin x+\cos x=0$$
$$\sin x=-\cos x \quad /:\cos x\neq 0$$
$$\tan x=-1$$
$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, ונקבל** $(0,1)$.

תשובה: $(\frac{7\pi}{4},0)$ **,** $(\frac{3\pi}{4},0)$ $(0,1)$.

ב. (1) $f'(x) = -\sin x + \cos x \quad , \; 0 \le x \le 2\pi \quad , x \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

תשובה: הראינו לכל x **בתחום ההגדרה של הפונקציה מתקיים** $f'(x) = \cos x - \sin x$.

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה , ונקבע את סוגן.

נקודות הקצה: $f(0) = 1 \quad \rightarrow (0,1), \quad f(2\pi) = 1 \quad \rightarrow (2\pi, 1)$.

$$f'(x) = -\sin x + \cos x \quad , \; 0 \le x \le 2\pi \quad , x \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$0 = -\sin x + \cos x$$

$$\sin x = \cos x \quad / : \cos x \ne 0$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$f''(x) = -\cos x - \sin x \quad , \; 0 \le x \le 2\pi \quad , x \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

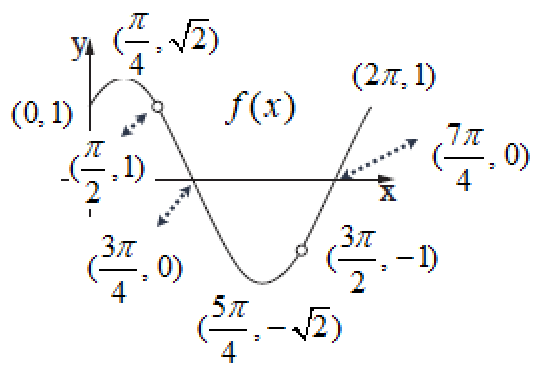
$$f''(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} < 0 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}), , \max}$$

$$f''(\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2} > 0 < 0 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}), , \min}$$

ובהתאם לערכי הפונקציה, נקבע את סוג הקיצון בקצה: $(2\pi, 1)$ **מקסימום,** $(0,1)$ **מינימום.**

תשובה: $(2\pi, 1)$ **מקסימום ,** $(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2})$ **מינימום ,** $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ **מקסימום ,** $(0,1)$ **מינימום.**

ג. (1) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



(2) למשוואה $f(x) = k$ **יש פתרון אחד בלבד, כאשר הישר** $y = k$ **עובר בנקודות הקיצון הפנימיות,**

או דרך נקודת החור הימנית $(\frac{3\pi}{2}, -1)$.

תשובה: למשוואה $f(x) = k$ **יש פתרון יחיד, בתחום** $0 \le x \le 2\pi$ **, כאשר** $k = \sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}$.

ד. נחשב את השטח שבין גרף הנגזרת וציר ה- x , ועל ידי הישרים $x=\frac{5\pi}{4}$ ו- $x=\frac{3\pi}{4}$.

כיוון שבתחום - $\frac{3\pi}{4} \le x < \frac{5\pi}{4}$ הפונקציה $f(x)$ רציפה ויורדת,

הרי שגרף הנגזרת רציף ושלילי ונמצא מתחת לציר ה- x .

$$S=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (0-f'(x))\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{4}: \quad -f(\frac{5\pi}{4})=-(-\sqrt{2})=\sqrt{2} \\ x=\frac{3\pi}{4}: \quad -f(\frac{3\pi}{4})=-0=0 \end{array}\right\} S=\sqrt{2}-0=\sqrt{2}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $\sqrt{2}$.

א. נתונות שתי פונקציות: $f(x)=x^3$, **ו-** $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

(1) הפונקציה $f(x)=x^3$ **מוגדרת לכל** x **עוברת בראשית ועולה לכל** x.

לכן, תחום אי השליליות שלה הוא $x\geq 0$ **, וזה תחום ההגדרה של** $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

תשובה: תחום ההגדרה של $f(x)$ **הוא כל** x**, ושל** $g(x)$ **הוא** $x\geq 0$.

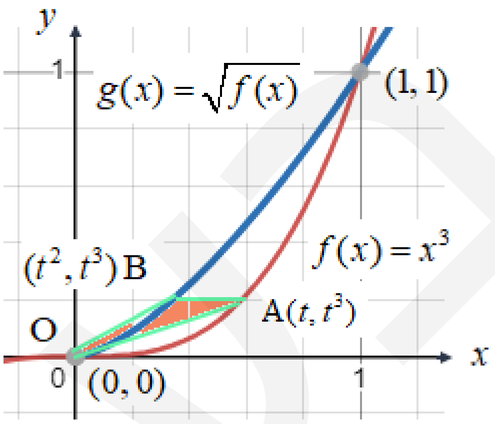
(2) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות, כאשר אחת מהן היא $(0,0)$.

$$\sqrt{x^3}=x^3 \quad (\,)^2 \quad test$$
$$x^3=x^6$$
$$x^3-x^6=0$$
$$x^3(1-x^3)=0$$
$$x=0 \quad \sqrt{0^3}\overset{?}{=}0^3 \quad 0=0 \quad o.k.$$
$$x^3=1 \quad \rightarrow x=1 \quad \sqrt{1^3}\overset{?}{=}1^3 \quad 1=1 \quad o.k.$$

תשובה: $(1,1)$, $(0,0)$.

ב. נשים לב, בעת סרטוט הסקיצות, שבתחום שבו $0<y<1$ **מתקיים** $g(x)>f(x)$.

$x_{\mathrm{A}}=t$ **ולכן שיעורי הנקודה:** $\mathrm{A}(t,t^3)$.



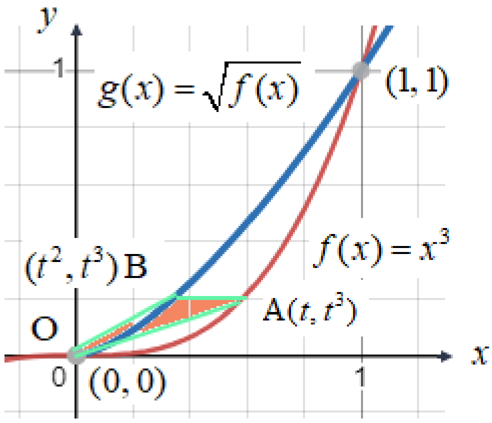
AB **מקביל לציר ה-** x**, ולכן** $y_{\mathrm{B}}=y_{\mathrm{A}}=t^3$.

$$t^3=\sqrt{x^3}$$
$$t^6=x^3$$
$$x=t^2\rightarrow \mathrm{B}(t^2,t^3)$$
$$t^3\overset{?}{=}\sqrt{(t^2)^3}^{\,3} \quad \rightarrow t^3\overset{?}{=}\sqrt{(t^2)^3} \quad t^3=t^3 \quad o.k.$$

AB **מקביל לציר ה-** x**, ולכן** $\mathrm{AB}=x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}=t-t^2$.

תשובה: $\mathrm{AB}=t-t^2$.

ג. הפונקציה שיש להביא למקסימום היא השטח $S_{\Delta OAB}$ (השטח האדום בציור).



השטח המבוקש:

$$s(t)=\frac{1}{2}(t-t^2)\cdot t^3$$

$$\boxed{s(t)=\frac{1}{2}(t^4-t^5)}$$

נמצא נקודת קיצון:

$$\boxed{S'(t)=\frac{1}{2}\cdot(4t^3-5t^4)}$$

$$4t^3-5t^4=0 \quad /:t^3>0 \quad \leftarrow 0<t<1$$

$$4=5t$$

$$t=0.8$$

$$\boxed{S''(t)=\frac{1}{2}\cdot(12t^2-20t^3)}$$

$$S''(0.8)=-1.28<0 \quad \rightarrow \max$$

$$S(0.8)=\frac{1}{2}(0.8^4-0.8^5)=\frac{128}{3{,}125}$$

תשובה: השטח המקסימלי של המשולש OAB **הוא** $\frac{128}{3{,}125}$.

ה. הפונקציה שיש להביא למקסימום היא אורך הקטע AB .

$AB=t-t^2$ **, והגרף שלו היא של פרבולה בעלת מקסימום,**

כאשר שיעור ה- t **של הקודקוד הוא:** $t=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{-2}=0.5$,

ולכן , לא עבור אותו שיעור t **שמביא למקסימום את השטח.**

תשובה: השטח המקסימלי של המשולש OAB **אינו מתקבל כאשר אורך הקטע** AB **הוא מקסימלי.**