שאלון 35471 מועד
קיץ תשפ״ב

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35471 מועד קיץ תשפ״ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. נתונה סדרה המקיימת את כלל הנסיגה $\begin{cases} a_1 = 84 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$ **, לכל** n **טבעי.**

(1) מכאן ש: $a_{n+1} - a_n = -2$ **והסדרה היא חשבונית, כאשר** $d = -2$ **,**

כי ההפרש בין כל שני איברים עוקבים קבוע (לא תלוי ב- n **).**

תשובה: הסדרה הנתונה היא חשבונית.

(2) נכתוב את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה, את a_n **.**

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = 84 + (n-1)\cdot(-2)$$
$$a_n = 84 - 2n + 2$$
$$\boxed{a_n = -2n + 86}$$

תשובה: נוסחת האיבר הכללי של הסדרה היא $a_n = -2n + 86$ **.**

ב. (1) נמצא כמה איברים חיוביים יש בסדרה.

$$a_n > 0$$
$$-2n + 86 > 0$$
$$-2n > -86 \quad / : (-2 < 0)$$
$$n < 43$$
$$\boxed{n = 42}$$

למעשה, קבלנו גם ש- $a_{43} = 0$ **.**

תשובה: בסדרה יש 42 **איברים חיוביים.**

(2) נמצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה (האיבר השלילי הגדול ביותר).

$$a_{44} = -2\cdot 44 + 86$$
$$\boxed{a_{44} = -2}$$

אפשר היה גם: $a_{44} = a_{43} - 2 = 0 - 2 = -2$ **.**

תשובה: ערכו של האיבר השלילי הראשון בסדרה הוא (-2) **.**

ג. נתון כי סכום האיברים השליליים בסדרה שווה ל- (-552) **.**

בסדרת האיברים השליליים, האיבר הראשון הוא (-2) **וההפרש הוא** $d=-2$ **.**

$$\frac{n\left[2\cdot(-2)-2(n-1)\right]}{2}=-552 \quad /\cdot 2$$
$$n(-4-2n+2)=-1{,}104$$
$$-4n-2n^2+2n=-1{,}104$$
$$-2n^2-2n+1{,}104=0$$
$$n=23 \quad \cancel{n=-24}$$

הפתרון השני נפסל, כי מספר האיברים בסדרה שלם וחיובי (טבעי).

אם כך, בסדר יש 23 **איברים שלילים,** 42 **איברים חיוביים, ואיבר אחד השווה לאפס (**$a_{43}=0$**).**

סך הכול, מספר האיברים הוא: $23+42+1=66$ **.**

תשובה: סך הכול, יש בסדרה הנתונה 66 **איברים.**

א. זמן ההזנה של אנשים לפודקאסט (הסכתים) מתפלג נורמלית.

על פי בדיקה של $100,000$ **מאזינים, התברר כי**

זמן ההאזנה לאדם הוא בממוצע של 35.65 **דקות** $=\overline{x}$ **, וסטיית התקן של זמן ההאזנה היא** 15 **דקות** $s=$.

נחשב את ציון התקן של 10 **דקות ליום.**

$$z=\frac{x-\overline{x}}{s}$$

$$z=\frac{10-35.65}{15}$$

$$z=\frac{-25.65}{15}$$

$$\boxed{z=-1.71}$$

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית: $p(z<-1.71)=0.0436=0.0436\cdot 100\%=4.36\%$.

תשובה: 4.36% **מהאנשים, מאזינים לפודקאסטים <u>פחות</u> מ-** 10 **דקות ליום.**

ב. נמצא את ציון התקן של שעה אחת ביום, של 60 **דקות ביום.**

$$z=\frac{x-\overline{x}}{s}$$

$$z=\frac{60-35.65}{15}$$

$$z=\frac{24.35}{15}$$

$$\boxed{z\approx 1.62}$$

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית: $p(z<1.62)=0.947$.

ולכן, ההסתברות להאזנה של יותר משעה אחת, היא: $p(z>1.62)=1-0.947=0.053$.

מתוך $100,000$ **אנשים:** $0.053\cdot 100,000=5,300$ **מאזינים יותר משעה אחת ביום.**

תשובה: כ- $5,300$ **אנשים מאזינים לפודקאסטים יותר משעה אחת ליום (**60 **דקות).**

ג. לאחר שינוי בתוכני הפודקאסטים שבאתר של אותם $100,000$ אנשים,

התברר ששממוצע ההאזנה לאדם גדל ל- 42 דקות $=\bar{x}$.

(1) אחוז האנשים שמאזינים לפודקאסטים פחות מ- 10 דקות ליום

נותר ללא שינוי , כלומר 4.36% , ומכאן שציון התקן זהה והוא $z=-1.71$.

נמצא את סטיית התקן.

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$-1.71=\frac{10-42}{s}$$

$$-1.71s=-32$$

$$\boxed{s\approx 18.713}$$

תשובה: סטיית התקן של זמן ההאזנה, לאחר השינוי, היא 18.713 דקות ליום.

(2) נחשב, לאור הנתונים החדשים, את ההסתברות להאזנה של יותר משעה אחת ליום (60 דקות).

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$z=\frac{60-42}{18.713}$$

$$z=\frac{18}{18.713}$$

$$\boxed{z\approx 0.96}$$

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית: $p(z<0.96)=0.832$.

ולכן, ההסתברות להאזנה של יותר משעה אחת, היא: $p(z>0.96)=1-0.832=0.168$.

ההסתברות גדלה פי $0.168:0.053\approx 3.17$, וכך גדל גם מספר האנשים.

ניתן גם , כמובן, לחשב את מספר המאזינים.

מתוך $100,000$ אנשים: $0.168\cdot 100,000=16,800$ מאזינים יותר משעה אחת ביום.

ואז היחס המבוקש הוא: $16,800:5,300\approx 3.17$

תשובה: מספר האנשים, שמזינים לפודקאסטים יותר משעה אחת ביום – לאחר השינוי,

גדל פי 3.17 בערך.

א. המועמדים לעבודה בחברה עוברים שלושה שלבי מיונים,
כאשר יש לעבור את שלושת השלבים בהצלחה, על מנת להתקבל לחברה.
ההסתברות לעבור בהצלחה את מבחן ההתאמה היא: $75\% = 0.75$.

ההסתברות לעבור בהצלחה את הריאיון האישי היא: $50\% = 0.5$.
ההסתברות לעבור בהצלחה את הסדנה הקבוצתית היא: $40\% = 0.4$.

ההסתברות לעבור את שלושת המבחנים בהצלחה היא: $0.75 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.15$.
תשובה: ההסתברות, שמועמד שנבחר באקראי התקבל לעבודה בחברה, היא 0.15 .
.

ב. ההסתברות, שלכל היותר אחת מהשתיים (נטע וגלי) התקבלה לעבודה בחברה,
היא המאורע המשלים להסתברות ששתיהן התקבלו לעבודה.
בהתאם, ההסתברות שלכל היותר אחת מהשתיים התקבלה לעבודה היא: $1 - 0.15^2 = 0.9775$.
תשובה: ההסתברות, שלכל היותר אחת מהן התקבלה לעבודה, היא 0.9775 .

ג. נחשב את ההסתברות שעדי עברה בהצלחה את הריאיון האישי, אם ידוע שלא התקבלה לעבודה בחברה.

$$P(\text{עברה בהצלחה ריאיון אישי / לא התקבלה}) = \frac{P(\text{לא התקבלה} \cap \text{עברה בהצלחה ראיון אישי})}{P(\text{לא התקבלה})}$$

$$P(\text{עברה בהצלחה ריאיון אישי / לא התקבלה}) = \frac{0.75 \cdot 0.5 \cdot (1-0.4)}{1-0.15} = \frac{0.75 \cdot 0.5 \cdot 0.6}{0.85} = \frac{9}{34}$$

תשובה: ההסתברות, שעדי עברה את הריאיון האייש אם ידוע שהיא <u>לא</u> התקבלה לחברה ,היא $\frac{9}{34}$.

ד. ידוע כי 170 **מועמדים, מבין כל המועמדים, <u>לא</u> התקבלו לעבודה בחברה.**
ההסתברות לאי קבלתה לעבודה היא $1 - 0.15 = 0.85$.
אם n **הוא מספר המועמדים, אז** $0.85n = 170 \quad \to n = 200$,
ומכאן ש- $200 - 170 = 30$ **מועמדים התקבלו לעבודה לחברה.**

דרך חלופית: $30 = \frac{170 \cdot 0.15}{0.85}$ **, על פי יחס ההסתברויות בין אי- קבלה לעבודה, לבין קבלה לעבודה.**
תשובה: 30 **מועמדים התקבלו לעבודה בחברה.**

4 גיאומטריה ואנליטית

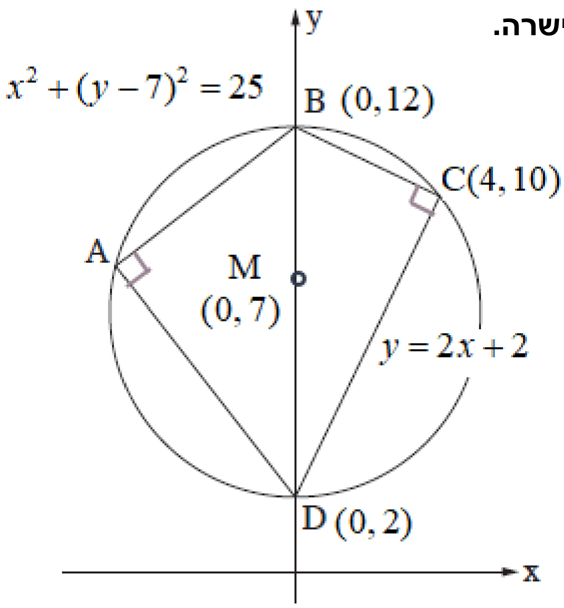
בגרות פב מאי 22 מועד קיץ א שאלון 35471

א. המרובע $ABCD$ **חסום במעגל.**

סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא 180° .

כיוון שנתון כי $\sphericalangle A=\sphericalangle C$ **, אז כל אחת מהן שווה ל-** 90°.

מכאן ש- BD **הוא קוטר במעגל, כי הוא נשען על זווית היקפית ישרה.**



ב. נמצא את משוואת המעגל, כאשר BD **הוא קוטר במעגל.**

נמצא את שיעורי הנקודה M **, מרכז המעגל.**

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_B+x_D}{2}&=\frac{0+0}{2}=0\\ \frac{y_B+y_D}{2}&=\frac{12+2}{2}=7\end{aligned}\right\}M(0,7)$$

$R=y_B-y_M=12-7=5$.

תשובה: משוואת המעגל היא $x^2+(y-7)^2=25$.

ג. נתון כי שיפוע הצלע BC **הוא** $-\frac{1}{2}$.

(1) הצלע BC **מאונכת לצלע** DC **, ולכן מכפלת השיפועים היא** (-1) .

לכן, שיפוע הצלע BC **הוא** $+2$ **(הופכי ונגדי).**

נמצא את משוואת הצלע DC **, בעזרת** $m_{DC}=2$ **, והקודקוד** $D(0,2)$.

$$y-2=2(x-0)$$
$$y-2=2x$$
$$\boxed{y=2x+2}$$

תשובה: משוואת הצלע DC **היא** $y=2x+2$.

(2) הנקודה C **(וגם** D **) נמצאת גם** $y=2x+2$ **וגם על המעגל.**

$$x^2+(2x+2-7)^2=25$$
$$x^2+(2x-5)^2=25$$
$$x^2+4x^2-20x+25=25$$
$$5x^2-20x=0$$
$$5x(x-4)=0$$
$$x=0 \quad \to D(0,2)$$
$$x=4 \quad \to \boxed{C(4,10)}$$

הערה – ניתן היה גם לחשב את משוואת הצלע BC **, ואז למצוא את נקודת בחיתוך בין שתי הצלעות.**

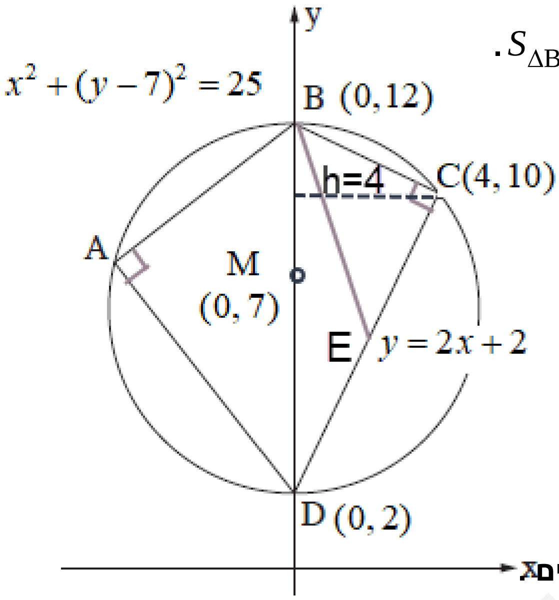
תשובה: $C(4,10)$.

ד. נתון כי הנקודה E היא אמצע הצלע DC .

התיכון BE מחלק את ΔBCD לשני משולשים שווי שטח.

$S_{\Delta BCD}=\frac{BD\cdot h}{2}=\frac{10\cdot 4}{2}=20$, **ולכן** $S_{\Delta BCE}=\frac{20}{2}=10$.

תשובה: שטח המשולש ΔBCE הוא 10.



ה. (1) נחשב אורכי צלעות (אנליטית) ,

ונעבור לטריגונומטריה לחישוב זוויות.

$$BC=\sqrt{(0-4)^2+(12-10)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$DC=\sqrt{(0-4)^2+(2-10)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

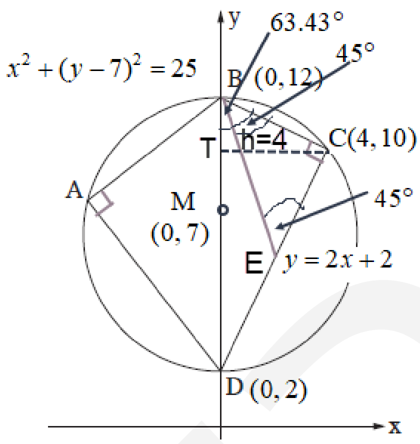
$$CE=DC:2=4\sqrt{5}:2=2\sqrt{5}$$

קבלנו ש- $BC=CE$ **, ולכן** ΔBCE **הוא שווה שוקיים**

כיוון שהמשולש הוא גם ישר זווית ($\sphericalangle C=90^\circ$ **),**

אז זוויות הבסיס החדות, שוות כל אחת ל- 45° **.**

תשובה: גודל הזווית BEC **הוא** 45° **.**



(2) נחשב תחילה את $\sphericalangle CBD$ **.**

<u>ΔBCT</u>

$$\sin\sphericalangle CBD=\frac{CT}{BC}=\frac{4}{2\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\sphericalangle CBD=63.43^\circ}$$

ועכשיו נמצא את גודל $\sphericalangle DBE$ **.**

$$\sphericalangle DBE=63.43^\circ-45^\circ$$

$$\boxed{\sphericalangle DBE=18.43^\circ}$$

תשובה: גודל הזווית DBE **הוא** 18.43°.

פתרון חלופי: משפט סינוסים ב- ΔBDE

$$\frac{BD}{\sin 135^\circ}=\frac{DE}{\sin\sphericalangle DBE}$$

$$\sin\sphericalangle DBE=\frac{2\sqrt{5}\cdot\sin 135^\circ}{10}$$

$$\boxed{\sphericalangle DBE=18.43^\circ}$$

א. (1) $ABCD$ הוא ריבוע, שכל זוויות ישרות, ולכן $\sphericalangle A = 90°$.

$\sphericalangle AEO = \alpha$

$\sphericalangle EOA = 90° - \alpha$ (סכום זוויות $180°$ ב- ΔEOA)

$\sphericalangle BOC = \alpha$ (זווית שטוחה שווה ל- $180°$, והצירים מאונכים זה לזה)

$\sphericalangle AEO = \sphericalangle BOC$ (כלל המעבר)

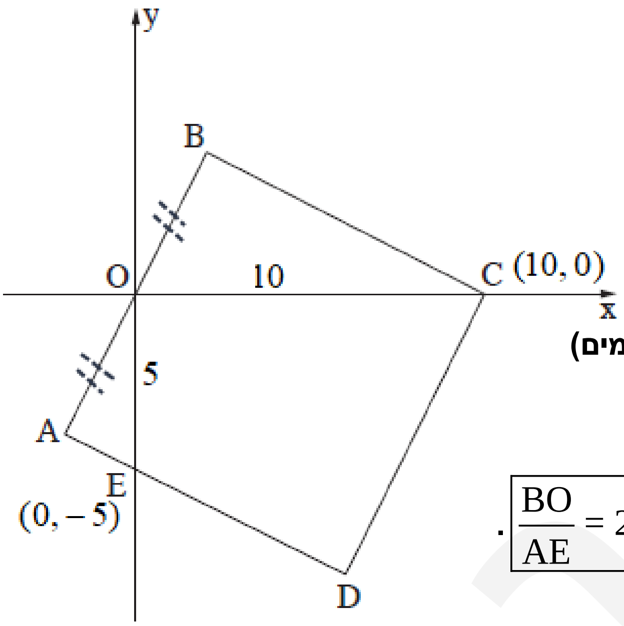
תשובה: הוכחנו ש- $\sphericalangle AEO = \sphericalangle BOC$

(2) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$ (זוויות הריבוע ישרות ושוות זו לזו)

$\sphericalangle AEO = \sphericalangle BOC$ (הוכחנו)

$\Delta OAE \sim \Delta CBO$ (משפט דמיון זווית זווית)

תשובה: הוכחנו ש- $\Delta OAE \sim \Delta CBO$.



ב. נתון: הנקודה O היא אמצע הצלע AB.

$\frac{OA}{CB} = \frac{OE}{CO} = \frac{AE}{BO}$ (יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים)

כיוון ש- $AB = CB$ (צלעות הריבוע שוות זו לזו),

הרי שיחס הדמיון הוא $\frac{OA}{AB} = \frac{1}{2}$, ומכאן ש: $\frac{AE}{BO} = \frac{1}{2}$ ו- $\boxed{\frac{BO}{AE} = 2}$.

תשובה: $\frac{BO}{AE} = 2$.

ג. נתון: $E(0, -5)$, ולכן $OE = 5$, ועל פי יחס הדמיון $OC = 10$.

הנקודה C על הקרן החיובית של ציר ה- x , ומרחקה מהראשית הוא 10, ולכן שיעוריה $(10, 0)$.

תשובה: אורך הקטע OC הוא 10, ושיעורי הנקודה C הם $(10, 0)$.

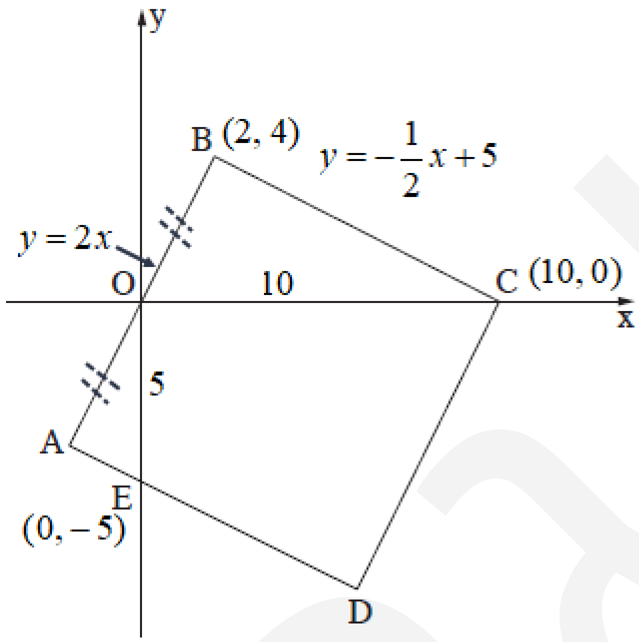
ד. נתון: שיפוע הצלע BC **הוא** $-\frac{1}{2}$ **, ולכן שיפוע הצלע** AB **, המאונכת לה, הוא** $+2$ **(שיפוע הופכי לנגדי).**

נמצא את משוואת הצלע BC **, בעזרת** $m_{BC}=-\frac{1}{2}$ **, והקודקוד** $C(10,0)$.

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-10) \quad \rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{2}x+5}$$

נמצא את משוואת הצלע AB **, בעזרת** $m_{AB}=2$ **, וראשית הצירים** $O(0,0)$ **שנמצאת על צלע זו.**

$$y-0=2(x-0) \quad \rightarrow \boxed{y=2x}$$



$$B\begin{cases} y=2x \\ y=-\frac{1}{2}x+5 \end{cases}$$

$$2x=-\frac{1}{2}x+5$$

$$2\frac{1}{2}x=5 \quad /:2\frac{1}{2}$$

$$x=2 \quad \rightarrow y=2\cdot 2=4 \quad \rightarrow \boxed{B(2,4)}$$

תשובה: $B(2,4)$.

ה. נמצא את שטח הריבוע.

$$BC=\sqrt{(2-10)^2+(4-0)^2}=\sqrt{80}$$

$$S_{ABCD}=(\sqrt{80})^2=80$$

תשובה: שטח הריבוע $ABCD$ **הוא** 80 .

ו. נשים לב ש- $\frac{1}{2}=\frac{OB}{BC}$, וגם $\frac{1}{2}=\frac{OE}{OC}$.

כיוון ש- $\sphericalangle EOC=\sphericalangle OBC$ (שתיהן ישרות)

הרי ש- $\Delta EOC \sim \Delta OBC$ (משפט דמיון צלע זווית צלע)

ומכאן ש- $\sphericalangle OCE=\sphericalangle BCO$ (זוויות מתאימות במשולשים דומים).

ניתן, גם בטריגומטריה בשני המשולשים,

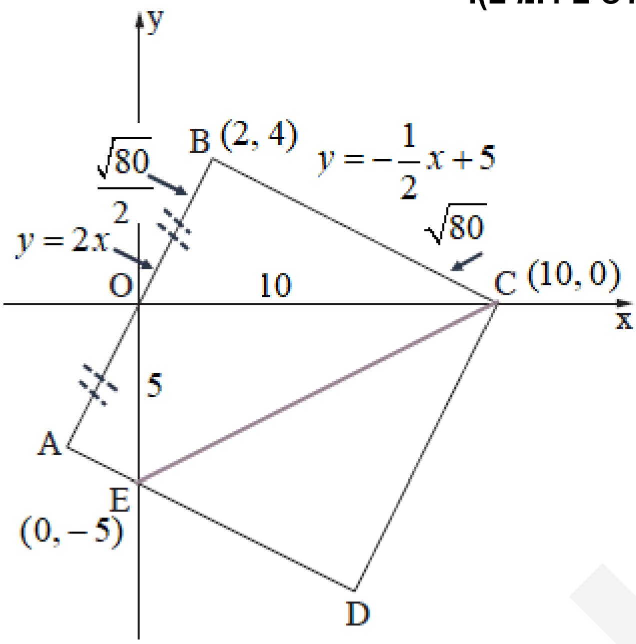
למצוא שגודל כל אחת מהזוויות הוא:

$$\tan x=\frac{1}{2}$$

$$x=26.565°$$

ולכן, הזווית שווה זו לזו.

תשובה: כן, מתקיים $\sphericalangle OCE=\sphericalangle BCO$.



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$ **(מומלץ לשים לב לכך שהפונקציה זוגית, והגרף סימטרי לציר ה-** y **).**

(1) בתחום ההגדרה מכנה שונה מאפס: $x^2-1\neq 0 \quad \rightarrow x\neq \pm 1$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq \pm 1$ **.**

(2) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים.

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x **: הישרים** $x=1$ **, ו-** $x=-1$ **(מספרים מאפסים מכנה ולא מונה).**

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y **: הישר** $y=4$ **.**

(חזקות המונה והמכנה שווים, והפונקציה שואפת למנת המקדמים של x^2 **)**

הערה – לא נדרשים הסברים בבגרות.

תשובה: $x=1 \ , \ x=-1 \ , y=4$ **.**

(3) נמצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ציר y **:** $x=0$ **-** $f(0)=\dfrac{4\cdot 0^2-1}{0^2-1}=1 \quad \rightarrow \boxed{(0,1)}$

ציר x **:** $y=0$ **-** $4x^2-1=0 \quad \rightarrow x^2=0.25 \quad \rightarrow x=\pm 0.5$ **.**

תשובה: $(0,1)$ **,** $(0.5,0)$ **,** $(-0.5,0)$ **.**

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגה.

$$f'(x)=\frac{8x(x^2-1)-2x(4x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x\left[4(x^2-1)-(4x^2-1)\right]}{(x^2-1)^2}$$

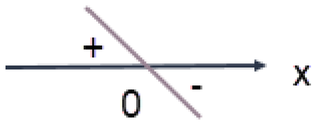
$$f'(x)=\frac{2x(4x^2-4-4x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-6x}{(x^2-1)^2}}$$

$$-6x=0 \quad \rightarrow x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,1)}$$

הביטוי במונה הוא של קו ישר יורד, וסימניו קובעים את סימן הנגזרת.

נצייר את גרף סימני הנגזרת (מכנה הנגזרת חיובי).



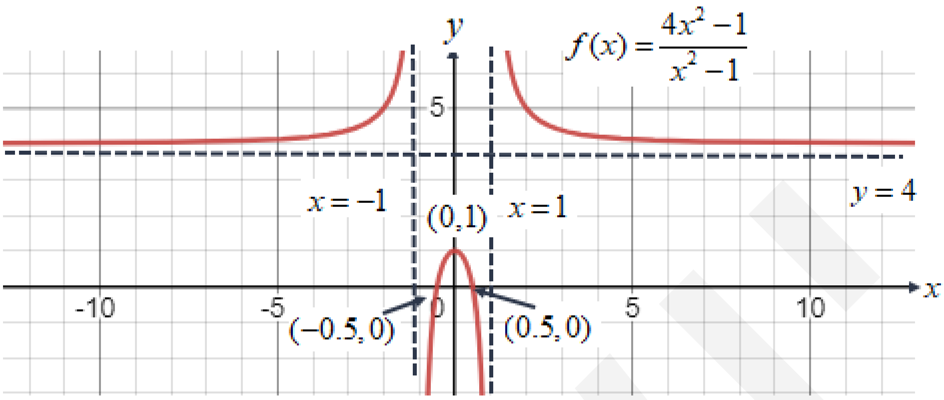
נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה

x		1		0		-1	
$f'(x)$	**-**		**-**	0	**+**		**+**
מסקנה	↘		↘	**מקס**	↗		↗

תשובה: $(0,1)$ **מקסימום.**

ג. הסקיצה המתאימה.

כמו שציינו בהתחלה: (מומלץ לשים לב לכך שהפונקציה זוגית, והגרף סימטרי לציר ה- y).



תשובה: השרטוט מעל.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=-f(x)+k$ **, שהיא שתי טרנספורמציות על** $f(x)$ **:**

סיבוב סביב ציר ה- x $(-f(x))$ **, תוך שינוי תחומי עלייה וירידה וסוג הקיצון,**

ואז תזוזה אנכית $(+k)$ **יחידות של** $f(x)$ **.**

(1) משוואת האסימפטוטה האופקית של $g(x)$ **, היא** $y=1$ **.**

לכן, $-4+k=1 \quad \rightarrow \boxed{k=5}$

תשובה: $k=5$ **.**

(2) $g(x)=-f(x)+5$ **.**

$g'(x)=-f'(x)$ **, וכמו שהסברנו ניתן לראות שתחומי עלייה וירידה מתהפכים.**

לכן, $x=0$ **מינימום, ו-** $(0,4) \rightarrow g(0)=-f(0)+5=-1+5=4$ **.**

תשובה: $(0,4)$ **מינימום.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x-2\cdot\sqrt{x+a}$ **(** a **הוא פרמטר).**

הנקודה $(6,0)$ **נמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)$ **.**

נציב את שיעורי הנקודה בפונקציה.

$$0=6-2\cdot\sqrt{6+a}$$
$$2\sqrt{6+a}=6 \quad /:2$$
$$\sqrt{6+a}=3 \quad /(\ )^2 \quad \to test$$
$$6+a=9$$
$$\boxed{a=3}$$
$$test:\sqrt{6+3}\overset{?}{=}3 \quad \to 3=3\ o.k.$$

תשובה: הראינו כי $a=3$ **.**

ב. נציב $a=3$ **הפונקציה** $f(x)=x-2\cdot\sqrt{x+3}$ **.**

בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

$$x+3\geq 0$$
$$\boxed{x\geq -3}$$

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\geq -3$ **.**

ג. נמצא את שיעורי <u>כל</u> נקודות הקיצון ונקבע את סוגן. $(-3,-3)$ **בהכרח נקודת קיצון קצה.**

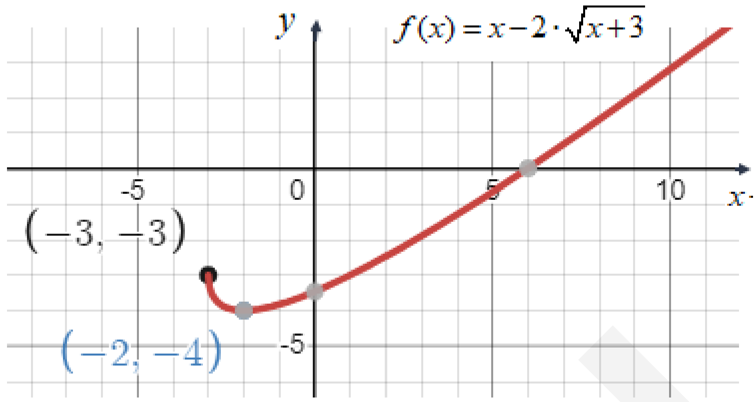
$$f'(x)=1-\frac{2\cdot 1}{2\sqrt{x+3}}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}}}$$
$$0=\sqrt{x+3}-1$$
$$1=\sqrt{x+3} \quad /(\ )^2 \quad \to test$$
$$1=x+3$$
$$\boxed{x=-2}$$
$$test:\sqrt{-2+3}\overset{?}{=}1 \quad \to 1=1\ o.k.$$
$$x=-2 \quad \to (-2,-4)$$
$$f'(-2.5)<0\ ,\ f'(-1)>0 \quad \to \boxed{(-2,-4),\min}$$

כיוון שהפונקציה יורדת מנקודת הקצה $(-3,-3)$ **לנקודת המינימום,**

הרי שנקודת הקצה היא נקודת מקסימום.

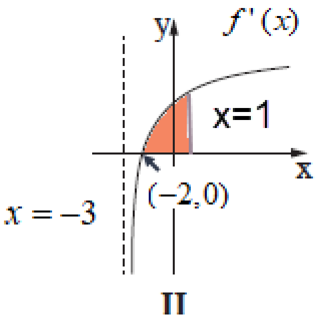
תשובה: $(-2,-4)$ **מינימום ,** $(-3,-3)$ **מקסימום.**

ד. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ה. כאשר מציירים, או בוחרים, את גרף הנגזרת $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}}$, נעזרים בשיקולים הבאים:



- תחום הגדרה: $x>-3$
- אסימפטוטות: $x=-3$.
- נקודת אפס: $(-2,0)$.
- סימני נגזרת, בהתאם לעלייה/ירידה של $f(x)$,

$f'(x)>0$ כאשר $x>-2$.

$f'(x)<0$ כאשר $-3<x<-2$.

תשובה: הגרף המתאים הוא גרף II (בסרטוט מופיע כבר השטח עבור סעיף ו).

ו. נחשב את השטח המבוקש (צבוע בכתום):

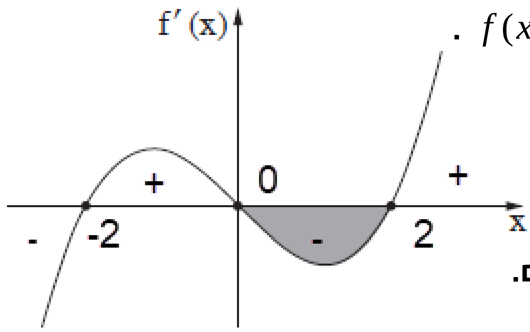
$$S=\int_{-2}^{1}(f'(x)-0)\,dx=f(x)\Big]_{-2}^{1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=1 & f(1)=-3 \\ x=-2 & f(-2)=-4 \end{array}\right\} S=-3-(-4)=1\rightarrow \boxed{S=1}$$

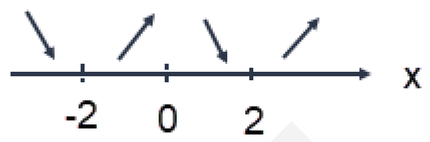
תשובה: גודל השטח, המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

על ידי הישר $x=1$, ועל ידי ציר ה- x , הוא 1.

א. בשרטוט הנתון , סימנו את נקודות האפס הנתונות של $f'(x)$.



על-פי סימני הנגזרת, ניתן לקבוע את תחום העלייה והירידה של $f(x)$.



תשובה: עבור $f(x)$: $x=2$, $x=-2$ מינימום , $x=0$ מקסימום.

ב. נחשב את השטח המבוקש (צבוע באפור), ונשווה אותו ל - $S=8$, על-פי הנתון:

ניעזר גם בנתון הנוסף, שלפיו $f(2)=3\frac{1}{2}$.

$$S=\int_0^2 (0-f'(x)-0)\,dx=-f(x)\Big]_0^2$$

$$\left.\begin{aligned} x=2 &\quad -f(2)=-3\frac{1}{2} \\ x=0 &\quad -f(0) \end{aligned}\right\} \boxed{S=-3\frac{1}{2}+f(0)}$$

ומכאן ש- $-3\frac{1}{2}+f(0)=8 \quad \rightarrow \boxed{f(0)=11.5}$

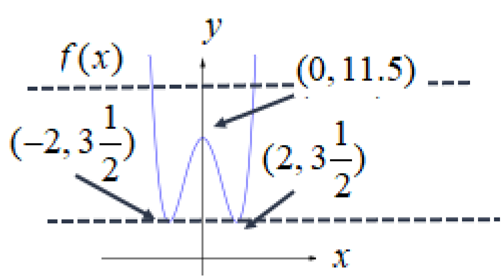
תשובה: $f(0)=11.5$.

ג. שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$ הן: $(2,3\frac{1}{2})$ מינימום, $(0,11.5)$ מקסימום, $(-2,3\frac{1}{2})$ מינימום.

בנוסף, נתון כי ל- $f(x)$ אין אסימפטוטה אופקית.

נשים לב, כי על פי הציור של גרף הנגזרת, ייתכן ו- $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית,

ואז הגרף של $f(x)$ יהייה של פונקציה זוגית וסימטרי לציר ה- y .



תשובה: הסרטוט מעל.

ד. לישר $y=k$ יהיו שתי נקודות חיתוך עם הגרף של $f(x)$,

אם יעבור מעל המקסימום, או בנקודות המינימום.

תשובה: עבור $k>11.5$, או $k=3.5$.