פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשפ"ב, 2022, מועד ב, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

1. נתונות הנקודות $A(-5\,,4)$ ו־ $B(0\,,-1)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה־ x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M .

ג. מהי משוואת האליפסה?

נסמן ב־ F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה־ x עובר במוקד השמאלי של האליפסה.

הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו־ T , ואת המעגל M בנקודות K ו־ L .

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF .

פתרון:

א. כדי שקטע AB יהיה מיתר במעגל, מרכז המעגל צריך להיות על האנך האמצעי לקטע AB. נמצא אותו:

אמצע AB:

$x_M = \frac{-5+0}{2} = -2.5$

$y_M = \frac{-1+4}{2} = 1.5$

שיפוע AB:

$m_{AB} = \frac{4-(-1)}{-5-0} = -1$

שיפוע האנך:

$m_{\perp} = 1$

משוואת האנך האמצעי:

$y - 1.5 = 1(x+2.5)$

$\boxed{y = x+4}$

המקום הגאומטרי הוא הישר $y = x+4$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ב. נקודת החיתוך של מעגל M עם ציר x
נמצאת באותו מרחק מהמשיקים, לכן
מרכז המעגל על ציר y, שהוא האנך
האמצעי לקטע המחבר את נקודות
החיתוך עם ציר ה-x, לכן מרכז
המעגל הוא החיתוך של הישר מסעיף
א' עם ציר y: $(0,4)$

רדיוס המעגל הוא המרחק מאחת
הנקודות, כלומר $4-(-1)=5$
לסיכום, מרכז המעגל M הוא $(0,4)$
ורדיוס המעגל M הוא $R=5$

ג. נקודות החיתוך של המעגל עם ציר x:
משוואת מעגל M: $x^2+(y-4)^2=25$
$x^2+(0-4)^2=25 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm 3$
כלומר קודקודי האליפסה בנקודות $(3,0)$, $(-3,0)$
קוטר המעגל M הוא 10, כלומר $a=5$
נמצא את הפרמטר b: $a^2=b^2+c^2$

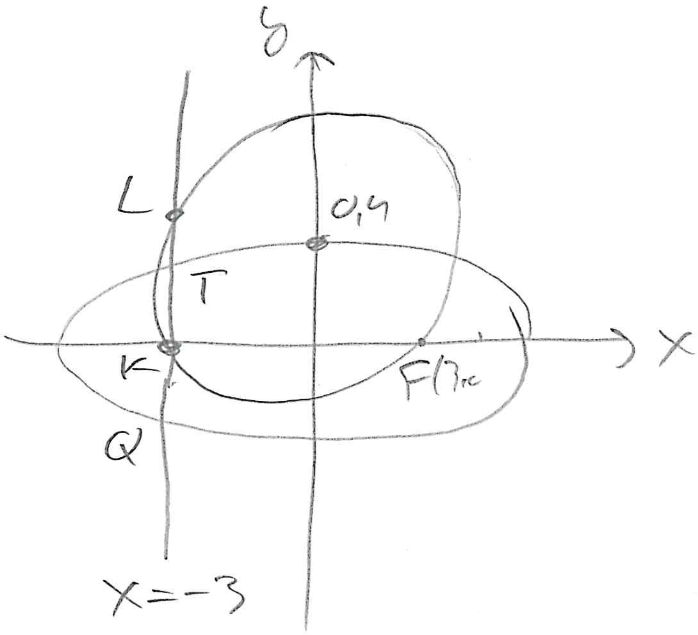
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

$5^2=b^2+3^2 \to b^2=16$

משוואת האליפסה היא:

$$\boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1}$$

ג. נשרטט:



משוואת הישר המאונך לציר x היא $x=-3$.

נקודות חיתוך עם האליפסה:

$$\frac{(-3)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \to \frac{y^2}{16}=\frac{16}{25} \to y^2=\frac{256}{25} \to y=\pm\frac{16}{5}$$

לכן, הנקודות הן: $Q(-3,-\frac{16}{5})$ ו- $T(-3,\frac{16}{5})$

נקודות חיתוך עם המעגל:

$$(-3)^2+(y-4)^2=25 \to (y-4)^2=16 \to y=0,\ y=8$$

הנקודות הן: $L(-3,8)$, $K(-3,0)$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

מכוון?

$$\frac{S_{KLF}}{S_{TQF}}=\frac{\frac{KL\cdot h}{2}}{\frac{TQ\cdot h}{2}}=\frac{KL}{TQ}=\frac{8-0}{\frac{16}{5}+\frac{16}{5}}=\boxed{\frac{5}{4}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

.2 נתונה פירמידה OABC שבסיסה משולש ABC.

נסמן: $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{w}$.

נתון: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = 90^o$, $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$.

הנקודה H מקיימת $\overrightarrow{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$. s, t ו־ k הם פרמטרים.

נתון כי $\overrightarrow{OH}$ מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי $t = s = k$.

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC .

ג. הביעו באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ שבעבורו נפח הפירמידה PABC כפול מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).

ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה־ x , הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה־ y , והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה־ z .

נתון: $|\underline{u}| = a$.

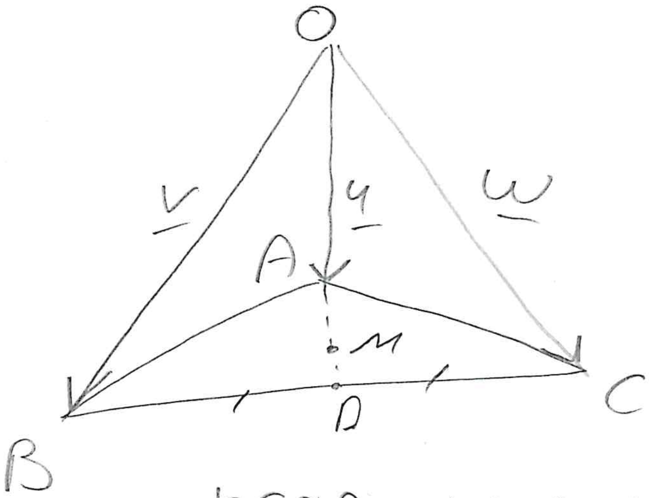
ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP .

ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC .

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $57\frac{1}{6}$. חשבו את a .

פתרון:

נסמן:



נתון:

$\sphericalangle COA = \sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = 90^o$

לכן:

$\underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

כמו כן נתון: $|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|$

לכן: $\underline{w}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{v}=\underline{u}\cdot\underline{u}$

א. הוכחה $\vec{OH}=t\underline{u}+s\underline{v}+k\underline{w}$

מאונך לבסיס ABC, כלומר מאונך לכל וקטור שמוכל בבסיס, לכן:

$$\begin{cases}\vec{OH}\cdot\vec{AB}=0\\ \vec{OH}\cdot\vec{AC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(t\underline{u}+s\underline{v}+k\underline{w})\cdot(\underline{v}-\underline{u})=0\\ (t\underline{u}+s\underline{v}+k\underline{w})\cdot(\underline{w}-\underline{u})=0\end{cases}$$

נכפלם:

$$t\underline{u}\cdot\underline{v}-t\underline{u}\cdot\underline{u}+s\underline{v}\cdot\underline{v}-s\underline{v}\cdot\underline{u}+k\underline{w}\cdot\underline{v}-k\underline{w}\cdot\underline{u}=0$$
$$t\underline{u}\cdot\underline{w}-t\underline{u}\cdot\underline{u}+s\underline{v}\cdot\underline{w}-s\underline{v}\cdot\underline{u}+k\underline{w}\cdot\underline{w}-k\underline{w}\cdot\underline{u}=0$$

ונקבל:

$$\begin{cases}-t\underline{u}\cdot\underline{u}+s\underline{v}\cdot\underline{v}=0\\ -t\underline{u}\cdot\underline{u}+k\underline{w}\cdot\underline{w}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=s\\ t=k\end{cases}\Rightarrow\boxed{t=s=k}$$

ב. נסמן את אמצע BC ב- D.

והנקודה M נמצאת על התיכון AD

כך ש $\vec{AM}=\frac{2}{3}\vec{AD}$.

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

GEVA.CO.IL | 1-800-20-40-60

יואל גבע
לא מתפשרים.

מכאן:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AD} = \vec{OA} + \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{BD})$$

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\left(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}\right) = \vec{OA} + \frac{2}{3}\left(\vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB})\right)$$

$$\vec{OM} = \underline{u} + \frac{2}{3}\left(\underline{v} - \underline{u} + \frac{1}{2}(\underline{w} - \underline{u} + \underline{u} - \underline{v})\right)$$

$$\vec{OM} = \underline{u} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} - \underline{u}\right)$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$$

לפי הנתונים, הפירמידה ישרה ומשוכללת
ולכן מפגש התיכונים של הבסיס הוא
גם מרכז המעגל החוסם את הבסיס.
הגובה בפירמידה ישרה חותך את הבסיס
במרכז המעגל החוסם את הבסיס, ולכן
OM הוא גובה לבסיס ABC בפירמידה

ג. הנקודה P נמצאת על הגובה OM.
לפירמידה PABC ו- OABC יש אותו
בסיס ולכן כדי שנפח הפירמידה PABC
יהיה כפול מנפח פירמידה OABC.

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הגובה צריך להיות כפול, כלומר

$|\vec{PM}| = 2|\vec{OM}|$

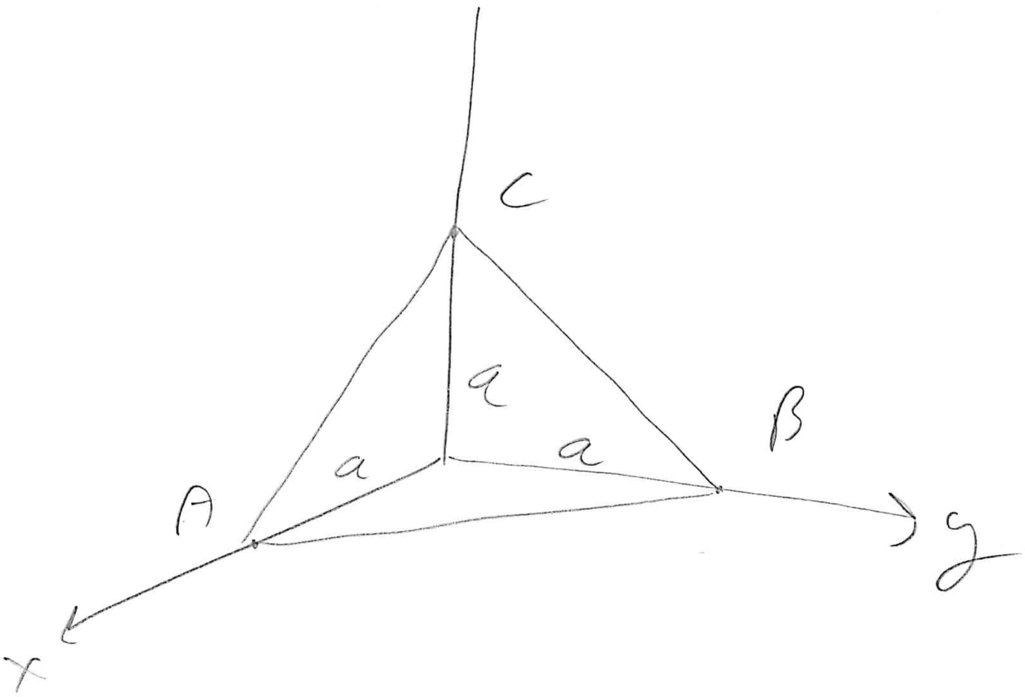
אפשרות ראשונה:

$$\boxed{\vec{OP} = -\vec{OM} = -\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{3}\underline{v}-\frac{1}{3}\underline{w}}$$

אפשרות שניה:

$$\boxed{\vec{OP} = 3\cdot\vec{OM} = \underline{u}+\underline{v}+\underline{w}}$$

ד. נשרטט:



נתון: $|\underline{u}|=a$

לכן: $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$

ומכאן: $\underline{u}=(a,0,0)$, $\underline{v}=(0,a,0)$, $\underline{w}=(0,0,a)$

ומכאן הצגה פרמטרית לישר l:

$$\underline{x} = O + t\cdot\vec{OM} = t\left(\tfrac{1}{3}\underline{u}+\tfrac{1}{3}\underline{v}+\tfrac{1}{3}\underline{w}\right)$$

$$\underline{x} = t\left(\tfrac{a}{3},\tfrac{a}{3},\tfrac{a}{3}\right) \Rightarrow \underline{x} = t(1,1,1)$$

ה. $\vec{OM}$ הוא הנורמל של מישור ABC,

לכן המשוואה היא:

$$x+y+z+d=0$$

נציב את נקודה A:

$$1\cdot a+1\cdot 0+1\cdot 0+d=0 \rightarrow d=-a$$

משוואת המישור היא:

$$\boxed{x+y+z-a=0}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

1. בסיס הפירמידה יהיה משולש ACB
והגובה לבסיס יהיה OC.

לכן:

$$V=\frac{S_{ACB}\cdot OC}{3}=\frac{\frac{a\cdot a}{2}\cdot a}{3}=\frac{a^3}{6}$$

מכאן:

$$\frac{a^3}{6}=57\frac{1}{6}$$

$$\downarrow$$

$$a^3=343$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{a=7}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

.3 המספר $z=R(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

נתון: $\frac{z}{\bar{z}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

א. מצאו את α .

נתון: $|4iz|-\left|\frac{\bar{z}}{i}\right|-\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|=8$.

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9=\frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקודי הבסיס B ו־ C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו־ $\frac{\bar{z}}{z}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z+k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k ?

(2) חשבו את שטח המרובע $ABOC$ (הנקודה O היא ראשית הצירים).

א

$z=R\operatorname{cis}(\alpha)$

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{R\operatorname{cis}(\alpha)}{R\operatorname{cis}(-\alpha)}=1\operatorname{cis}(2\alpha)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\operatorname{cis}(120^\circ)$$

$$2\alpha=120^\circ+360^\circ k$$
$$\alpha=60^\circ+180^\circ k$$
$$\boxed{\alpha=240^\circ}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

ב

$$|4iz|-\left|\frac{\bar{z}}{i}\right|-\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|=8$$

$$|4cis90°\cdot Rcis(240°)|-\left|\frac{Rcis(-240°)}{cis(90°)}\right|-\left|\frac{Rcis(240°)}{Rcis(-240°)}\right|=8$$

$$|4Rcis(330°)|-|Rcis(-330°)|-|cis(480°)|=8$$

$$4R-R-1=8$$

$$3R=9$$

$$\boxed{R=3}$$

ג

$$w^9=\frac{z^3}{27}=\frac{(3cis(240°))^3}{27}=\frac{27cis(720°)}{27}=cis(0)$$

$$W_k=1cis(0+40°k) \quad k=0\ldots8$$

$W_0=1cis(0°)$, $w_1=1cis(40°)$, $w_2=1cis(80°)$, $w_3=1cis(120°)$
$w_4=1cis(160°)$, $w_5=1cis(200°)$, $w_6=1cis(240°)$ $w_7=1cis(280°)$, $w_8=1cis(320°)$

$$\frac{z}{\bar{z}}=1cis(120°)=w_3$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

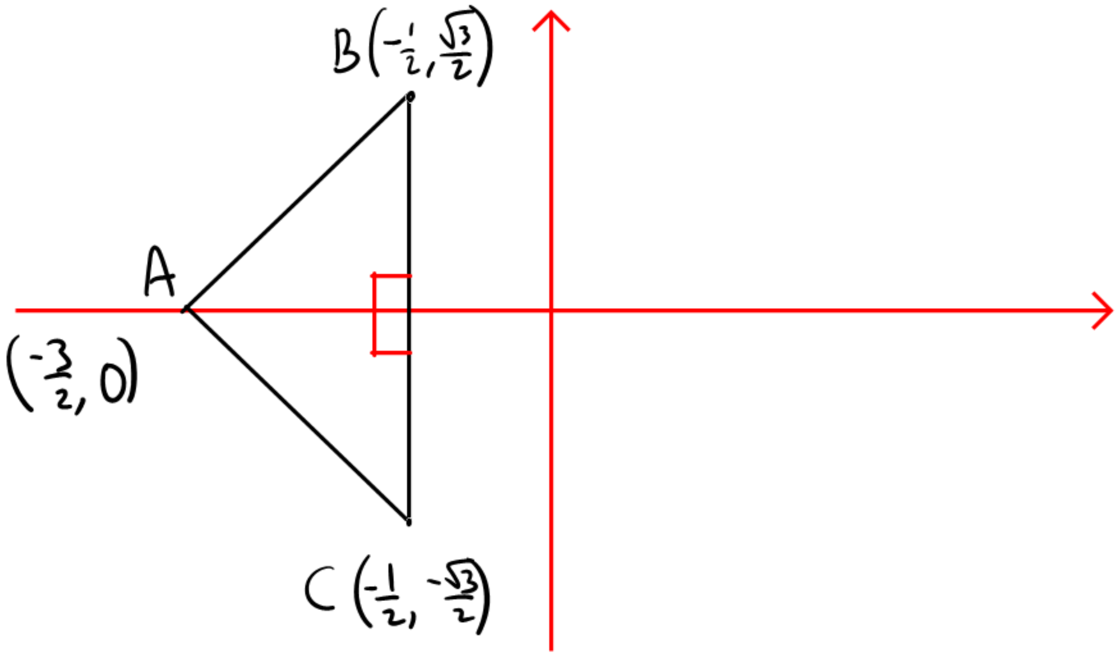
(1) ג

$$B: \ \frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \longrightarrow B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$C: \ \frac{\bar{z}}{z} = \frac{3cis(-240^\circ)}{3cis(240^\circ)} = cis(-480^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \longrightarrow C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

נזכיר $K = ti$, t ממשי.

$$A: \ z + k = 3cis(240) + t \cdot i = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i + ti \longrightarrow A\left(-\frac{3}{2}, t - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$



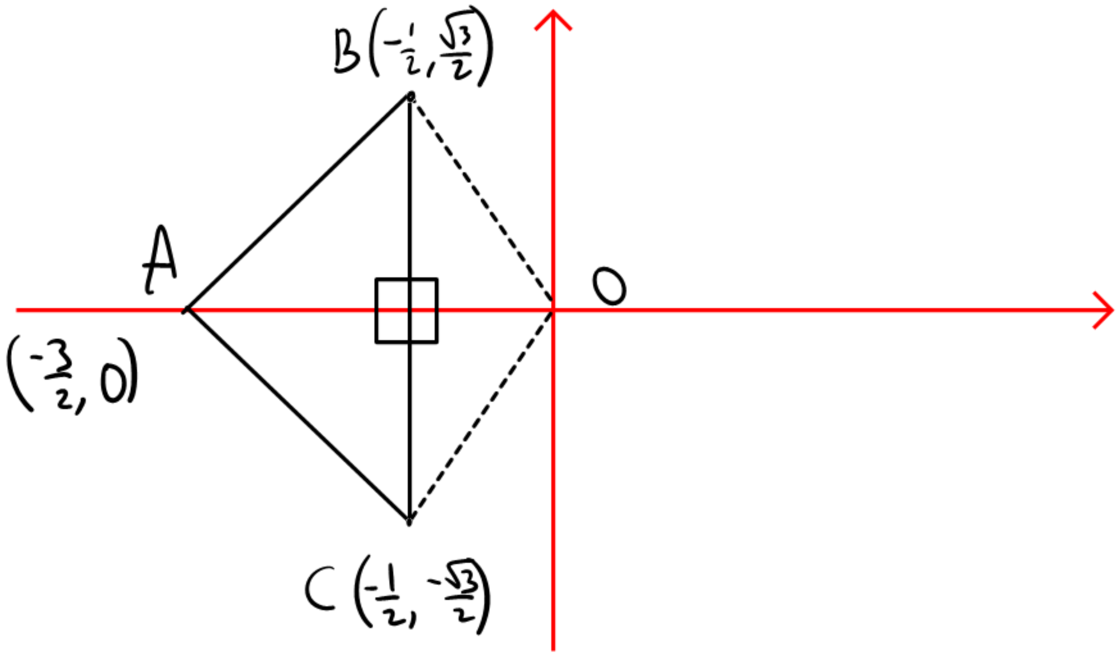
מאחר ונקודות B ו C בעלות שיעורי x זהים ושיעורי y נגדיים, נובע שציר x הוא האנך האמצעי לבסיס BC, לכן $y_A = 0$

$$y_A = t - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0 \longrightarrow t = \frac{3\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \boxed{K = \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

(2) 3



מדובר בדלתון: נחשב ע״י מכפלת
אלכסונים חלקי שתיים

$$d_{AO}=\frac{3}{2}$$

$$d_{BC}=\sqrt{3}$$

$$S=\frac{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

א. **(1)** מצאו את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה־ x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$, וענו על הסעיפים ג–ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ $(g'(x)=f(x))$.

ד. **(1)** מהו תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב־ B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקציה $g(x)$ הוא הגבוה מבין כל נקודות הפיתול שלה.

נתון כי שיעור ה־ y של הנקודה B הוא $\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

4א(1) $f(x)>0:$

$$x^2e^{a-x^3}>0$$

$x^2>0$ (זוגי) חיובי תמיד e^{a-x^3} מצוין !

$x^2>0 \rightarrow \boxed{x\neq 0}$

(2)

$$f'(x)=2xe^{a-x^3}+x^2e^{a-x^3}\cdot -3x^2$$

$$f'(x)=xe^{a-x^3}(2-3x^3)$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

ללמוד על פסיכומטרי ביואל גבע ←

4א(2) המשך

$$xe^{a-x^3}(2-3x^3)=0$$

$x=0$, $\varnothing$

$3x^3=2$

$x^3=\frac{2}{3}$

$x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=0.873$

e^{a-x^3} תמיד חיובי ולכן לא ישפיע על סימן הנגזרת.

x	$x<0$	$0<x<\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}<x$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘

$f'(-1)=-$

$f'(0.5)=+$

$f'(1)=-$

$\boxed{min\ x=0}$ $\boxed{max\ x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}$

4ד.

$f'(x)$ תחתוך את ציר ה-x בשיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $f(x)$. $f'(x)$ תהיה מעל ציר ה-x כאשר $f(x)$ עולה, ומתחת ציר ה-x כאשר $f(x)$ יורדת ולכן:

$$\int_0^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} f'(x)\,dx=\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$$

$$f(x)\Big]_0^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$$

$$f\left(\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}}\right)-f(0)=\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$$

$$\left(\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}}\right)^2e^{a-\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^3}-0=\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

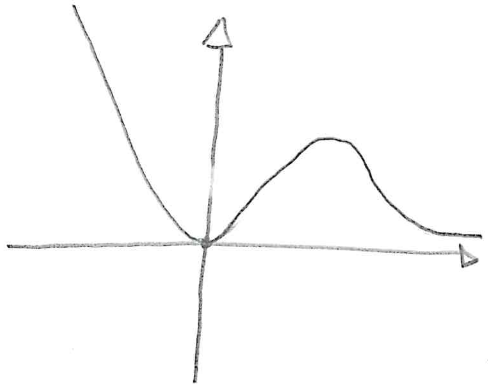
4ד. המשך

$$e^{a-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2} \rightarrow e^{a-\frac{2}{3}} = 1.395$$

$$a-\frac{2}{3} = \ln(1.395)$$

$$\boxed{a=1}$$

4ג.



$F\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = 1.065$

$f(0) = 0$

$\lim_{x\to\infty} \infty \cdot e^{-\infty} = \frac{\infty}{e^{\infty}} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \infty \cdot e^{\infty} = \infty$

1 3(1).

$g'(x)$ מעל לציר x עבור כל $x\neq0$ ולכן עולה עבור $x\neq0$, וניתן לראות ש $g'(x)$ חיובית משמאל ומימין ל $x=0$ ולכן $g(x)$ עולה משמאל ומימין ל $x=0$, ולכן גם ב $x=0$ $g(x)$ עולה.

עולה: כל x
ירידה: אף x

(2)

ל $g(x)$ תהיה נקודת פיתול כאשר ל $g'(x)$ תהיה נקודת קיצון מצאנו בסעיף (ג) כי ל $g'(x)$ יש שתי נקודות קיצון ולכן! ל $g(x)$ יש 2 נקודות

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

המשך 4

מכיוון ו- $g(x)$ מוגדרת לכל x ועולה רהזו
לכל x, צריך ה- y הגבוה מבין שתי הנקו'
ויתקבל ב- x הימני ויותר ולכן $B\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}\right)$.

$$g(x) = \int g'(x)dx$$

$$\int x^2 e^{1-x^3} dx = -\frac{1}{3}\int 3x^2 e^{1-x^3} dx$$

לפי הנוסחה:

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

$$g(x) = -\frac{1}{3}e^{1-x^3} + c$$

$$\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3} = -\frac{1}{3}e^{1-\frac{2}{3}} + c$$

$$e - e^{\frac{1}{3}} = -e^{\frac{1}{3}} + 3c$$

$$c = \frac{e}{3}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{e - e^{1-x^3}}{3}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

5

נתונה פונקצייה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקצייה מוגדרת לכל x ורציפה, הפונקצייה היא אי־זוגית,
הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה של הפונקצייה, ולפונקצייה יש נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם $(-1,-a)$,
a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=\ell n\left(f(x)\right)$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $h(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקצייה $h(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.

נתון: $f(x)=\frac{6x}{1+x^2}$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת: $g'(x)=f(x)$ וגם: $g(0)=0$.

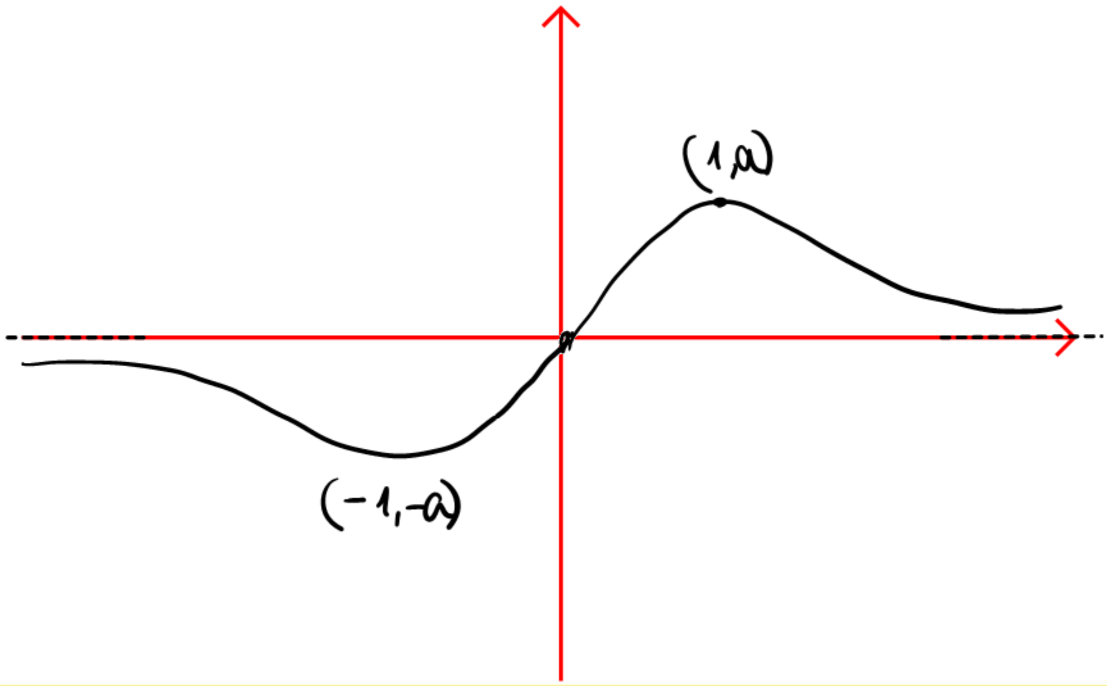
ג. **(1)** מצאו את הפונקצייה $g(x)$.

(2) האם הפונקצייה $g(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל $\int_{-5}^{t} g(x)dx$, $t>-5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים $\int_{-5}^{5} g(x)dx = 2\cdot\int_{-5}^{t} g(x)dx$? נמקו.

א



הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

ב (1) תחום ההגדרה של $h(x)$ הוא תחום החיוביות של $f(x)$ ← $\boxed{x>0}$

(2) $\boxed{x=0 \text{ ישנה אסימ' אנכית}}$ מאחר ש: $f(0^+)=0^+$

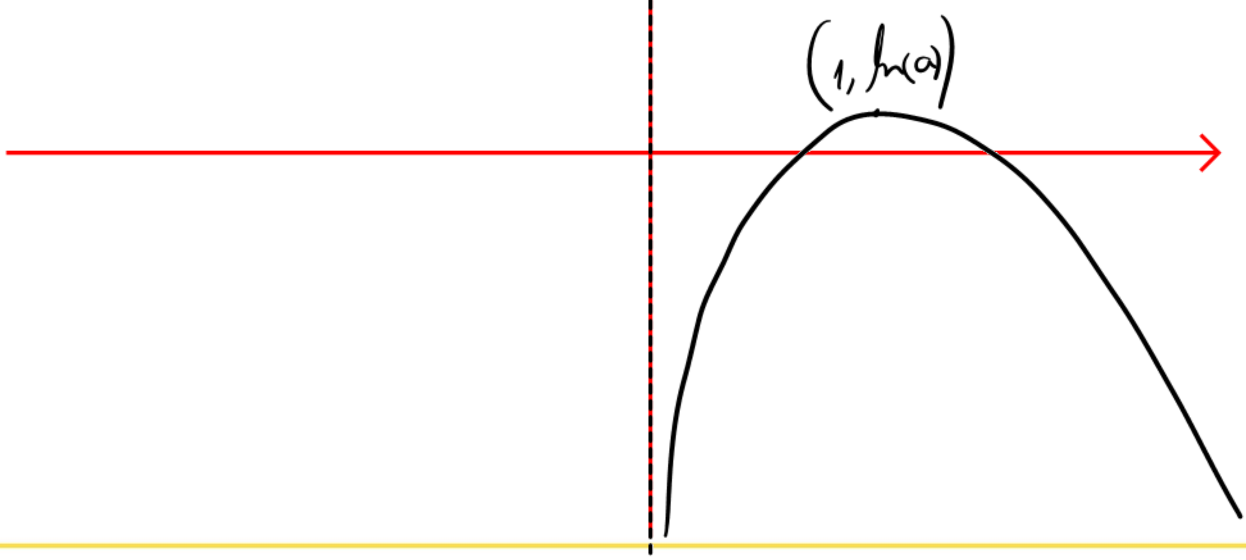
לכן $h(0^+)=\ln(f(0^+))=\ln(0^+)=-\infty$

אין אסימ' אופקית מאחר ש: $f(\infty)=0^+$

לכן $h(\infty)=\ln(f(\infty))=\ln(0^+)=-\infty$

(3) כדי שלפונ' $h(x)$ תהיינה 2 נקודות חיתוך עם x, נדרש שלפונ' $f(x)$ תהיינה 2 נקודות שעבורן ה-y שלהן הוא 1, ולכן נדרש שעבור ה-y בנקודת המקס' יהיה גדול מ: 1 ← $\boxed{a>1}$

(4) $h(x)$:



הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ג (1)

$$f(x)=\frac{6x}{1+x^2}=g'(x)$$

$$g(x)=\int g'(x)dx=\int\frac{6x}{1+x^2}dx=\int 3\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx=3\cdot\ln(1+x^2)+c$$

$$g(x)=3\ln(1+x^2)+c$$

3) ב׳ (0,0):

$$0=3\ln(1)+c$$

$$0=c$$

$$\boxed{g(x)=3\ln(1+x^2)}$$

ג (2) הנק׳ $g(x)$ הינה פונ׳ זוגית מאחר !:

$$g(-x)=g(x)$$

3

$$\int_{-5}^{t}g(x)dx\ ,\ t>-5$$

הערך של t שעבורו מתקיים השוויון הוא $t=0$
מאחר והפונ׳ $g(x)$ זוגית, ולכן מתקיים ש:

$$\int_{0}^{5}g(x)dx=\int_{-5}^{0}g(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-5}^{5}g(x)dx$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←