

פתרון הבחינה במתמטיקה

קיץ תשפ"ב, 2022, מועד א, שאלון: 35581

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

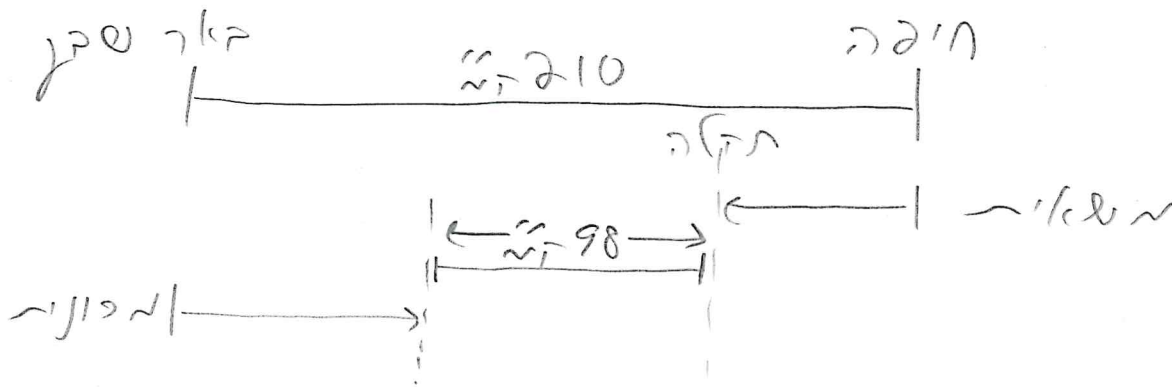
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. מכונית יצאה מבאר שבע לחיפה במהירות קבועה v_1 . באותו הזמן בדיוק יצאה משאית מחיפה לבאר שבע במהירות קבועה v_2 . המרחק בין חיפה לבאר שבע הוא 210 ק"מ. המשאית נעצרה בצד הדרך עקב תקלה, לפני שחלפה המכונית על פניה. באותו הזמן המרחק בין המשאית לבין המכונית היה 98 ק"מ.
- א. הביעו באמצעות v_1 ו- v_2 את הזמן שחלף מרגע תחילת הנסיעה ועד שנעצרה המשאית בצד הדרך. זמן שהיית המשאית בצד הדרך היה גדול פי 1.5 מן הזמן שחלף מרגע יציאתה מחיפה עד לרגע עצירתה. המשאית יצאה שוב לדרך באותה המהירות, v_2 , בדיוק ברגע שבו חלפה המכונית על פניה.
- ב. מצאו את היחס בין מהירות המכונית לבין מהירות המשאית.
- 140 דקות לאחר שיצאה המשאית שוב לדרך, היא הגיעה לבאר שבע.
- ג. מצאו את מהירות המכונית ואת מהירות המשאית.

פתרון:
נניח:



א. (נסמן t - הזמן עד לתקלה ב- t . ככיון

הצירים של המשאית ושל המכונית הוא $210 - 98$

וזמן נסיעה משותף צרכים:

$$t \cdot v_1 + t \cdot v_2 = 210 - 98$$

ול

$$t = \frac{112}{v_1 + v_2}$$

הזמן עד שתקלה
 המשאית:



ה. הצמן שבו המכונה עברה את 98 הקילומטר הינו לביטוי אביו המשאית קראו

$$1.5 \cdot \frac{112}{V_1 + V_2} \quad \text{המהירות היא}$$

נרשום משוואה כזו:

$$1.5 \cdot \frac{112}{V_1 + V_2} \cdot V_1 = 98 \quad (V_1 + V_2)$$

$$168V_1 = 98V_1 + 98V_2$$

$$70V_1 = 98V_2$$

||
↓

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{98}{70} = \frac{7}{5} = 1.4$$

היחס בין מהירות המכונה למהירות

$$\boxed{\frac{7}{5} = 1.4} \quad \text{המשאית הוא}$$

ז. הציון שעברה המשאית עד לתחילת היא:

$$V_2 \cdot \frac{112}{V_1 + V_2}$$

$$270 - \frac{112V_2}{V_1 + V_2} \quad \text{הציון שרשאה זה אקדור היא:}$$



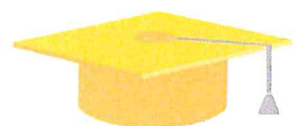
(3. ב. א. ה. ח. ס. ע. פ. ק. י. נ. ד. כ. א.:

$$210 - \frac{112V_2}{1.4V_2 + V_2} = \frac{490}{3}$$

נרשם משוואה 3:

$$V_2 \cdot \frac{140}{60} = \frac{490}{3} \Rightarrow V_2 = 70 \Rightarrow V_1 = 98$$

מהירות המשאית	70 קמ"ש
מהירות המנוף	98 קמ"ש



2. סדרה I היא סדרה הנדסית אין-סופית שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$ ומנתה היא $9 \cdot r^2$.
 נתון: $0 < r < \frac{1}{3}$.

בין כל שני איברים בסדרה I הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, \dots$ ומנתה היא q .

א. (1) הביעו את q באמצעות r .

(2) הסבירו מדוע שתי הסדרות I ו-II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום סדרה I.

ב. חשבו את q .

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 15.

ג. מצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב-5 ($b_5, b_{10}, b_{15}, \dots$).

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו

אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

$$\text{א (1)} \quad Q_a = 9r^2, \quad b_3 = a_2, \quad b_1 = a_1$$

$$q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{Q_2}{Q_1} = Q_a = 9r^2 \rightarrow \boxed{q = 3r} \quad q = 3r$$

מכיון ש $0 < r < \frac{1}{3}$ נכנס q לאזור
 אזור שסדרה b_n יורדת
 אז $q < 1$ ו- $r < \frac{1}{3}$

$$\text{א (2)} \quad 0 < r < \frac{1}{3} \rightarrow 0 < r^2 < \frac{1}{9} \rightarrow 0 < 9r^2 < 1 \rightarrow \boxed{0 < Q_a < 1}$$

$$\boxed{0 < q < 1} \leftarrow 0 < 3r < 1 \leftarrow 0 < r < \frac{1}{3}$$

מאחר ו- $0 < q < 1$ יש שתי הסדרות a_n ו- b_n מתכנסות.



$$\frac{4}{3} = \frac{S_{II}}{S_I} = \frac{\frac{a_1}{1-3r}}{\frac{a_1}{1-9r^2}} = \frac{1-9r^2}{1-3r} = 1+3r$$

II	I	
$b_1 = a_1$	a_1	איבר I
$q = 3r$	$Q_1 = 9r^2$	נ/ג

$$\frac{4}{3} = 1+3r \rightarrow 4 = 3+9r \rightarrow r = \frac{1}{9} \rightarrow \boxed{q = 3r = \frac{1}{3}}$$

סכום האיברים בסדרה II

3

$$S_{\infty} = \frac{\frac{a_1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = 15$$

סכום האיברים בסדרה II

$$\frac{a_1}{3} = 15 \cdot \frac{8}{9}$$

$$a_1 = 15 \cdot \frac{8}{3} = 40$$

$$\boxed{a_1 = 40}$$

סכום האיברים בסדרה II במקומו של האיבר הראשון בסדרה I

$$S_{\infty} = \frac{\frac{40}{3^4}}{1-\frac{1}{3^5}} = \frac{60}{121}$$

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{40}{3^4}$$

$$q^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3^5}$$

איבר I :
נ/ג :



$$\frac{b_5}{\sum_{\text{איור גלילי והלאה בסדרות}} b_5} = \frac{b_5}{\frac{b_5}{1-q}} = \frac{b_5(1-q)}{b_5} = \frac{1-q}{q} = \frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 2 \quad \underline{3}$$

ב) נחזיר סדרה הנדסית מתכנסת C_n
 שמה $-1 < q < 1$

$$\frac{C_n}{\sum_{\text{סדרה הנדסית}} C_n} = \frac{C_n}{\frac{C_{n+1}}{1-q_c}} = \frac{C_n(1-q_c)}{C_{n+1}} = \frac{1-q_c}{q_c} = \text{תוצאה של גלילי?}$$

למה? הנה קבועה!

/



3. נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תיקו והפסד.

ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק.

נסמן ב- p את ההסתברות שנטע תפסיד במשחק ($p > 0$).

בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.

נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא $4.5p$.

א. מצאו את הערך של p .

נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.

ב. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב-3 משחקים לפחות.

ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

ד. (1) מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

(2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות. מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

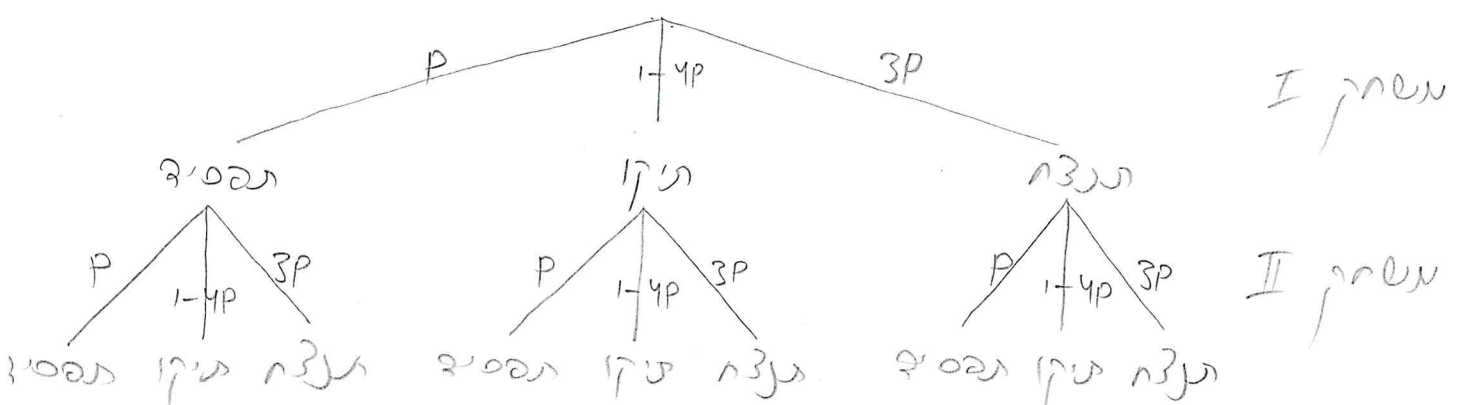
פתרון:
נשמע כנראה כי תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.
וכן כסימון הנתון והמארג המשפטי זהילוב ההסתברות למצאנו שני המשחקים יחידים.

א. $P(\text{תוצאה}) = 3p \Rightarrow P(\text{תפסיד}) = p$

נניח:
ההסתברות
שנטע תנצח במשחק
היא פי 3 מן
ההסתברות שהיא
תפסיד במשחק.

$$P(\text{תיקו}) = 1 - P(\text{תפסיד}) - P(\text{תוצאה}) = 1 - p - 3p = 1 - 4p$$

נפרט כעת את מרחב ההסתברות והוא יתן לנו את התשובה.
ההסתברות היא:



למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



המשק והסביבה הם חלק מהחיים.

נשאלת הנני לא שלוק 2 שחקנים.
 דנה אתה זה, ההסתברות שיהיה תוצאה המשחק אתה לסתור
 היא 4.5P
 מצד שני, לפי דיאגרמה העץ שפרטנו את הקובץ:

$$P\left(\begin{array}{c} \text{השני} \\ \text{משחק} \\ \text{לא תוצאה} \\ \text{המשחק אתה} \\ \text{לסתור} \end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c} \text{תוצאה} \\ \text{הראשון} \end{array}\right) \cup \left(\begin{array}{c} \text{תוצאה} \\ \text{הראשון} \\ \text{שחקן} \\ \text{השני} \end{array}\right) \cup \left(\begin{array}{c} \text{תוצאה} \\ \text{הראשון} \\ \text{שחקן} \\ \text{השני} \end{array}\right) =$$

ההסתברות של אי קיום מאורע אחר

$$\downarrow = P\left(\begin{array}{c} \text{תוצאה} \\ \text{הראשון} \end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c} \text{תוצאה} \\ \text{הראשון} \\ \text{שחקן} \\ \text{השני} \end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c} \text{תוצאה} \\ \text{הראשון} \\ \text{שחקן} \\ \text{השני} \end{array}\right) =$$

ההסתברות של קיום מאורע אחר

$$\downarrow = 3P + (1-4P) \cdot 3P + P \cdot 3P =$$

$$= -9P^2 + 6P$$

נשווה לנני 4.5P

$$-9P^2 + 6P = 4.5P \quad / -4.5P$$

$$-9P^2 + 1.5P = 0$$

$$-9P\left(P - \frac{1}{6}\right) = 0$$

$$\downarrow \quad \begin{array}{c} \text{אם} \\ \text{אם} \end{array} \quad \boxed{P = \frac{1}{6}}$$

0 < P נני



ג. שאל שחקן 5 משחקים דני אחי זכ. ההסתברות שגאע תעלה ד-3 משחקים לפסוק.

מסוקר ד-5 "נסינו" דלמי ולניש (מזאוי המשחק אינו גלוי) זי דני לפי הנסן, שמי אפשרויו זכוי ומשלימוי דל "נסינו":
 "תעלה" או "דא תעלה"

לומר מסוקר ההבלגה בינומי.

נשמע אס-כן בינסתו דיונלי ההבלגה בינומי: "העלה":

0	1	2	3	4	5
5	4	3	2	1	0

$P(\text{תעלה}) = 3 \cdot P = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
 $P(\text{דא תעלה}) = 1 - P(\text{תעלה}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ההסתברות שגאע תעלה ד-3 משחקים לפסוק: וסבורו לפי אימים מאורעו זכים (פס אסוקר דלגלי זכיה פסוקר אסוקר):

$$P\left(\begin{matrix} \text{תעלה} \\ \text{ד-3} \\ \text{משחקים} \\ \text{לפסוק} \end{matrix}\right) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 =$$

$$= 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^4 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2} = 0.5$$

ההסתברות שגאע תעלה ד-3 משחקים לפסוק היא 0.5.

המשך הפסוק דלמי הפסוק...

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
 אל תתפשר עליה.



2, יפוע כי נלע הפסידה במשחק אחר פסח.
 מהי ההסתברות שהיא ניצחה ד-3 המשחקים הראשונים
 וקוללה בטל-טקו המשחק האחרון.

מפורד ההסתברות מופיע.
 האם נחשב את ההסתברות שכל הפסידה במשחק אחר פסח:
 נשאל בטל-טקו של מה הסכום הקופה וקובעיה של המארח המלשם:

$$P(\text{נלע הפסידה במשחק אחר פסח}) = 1 - P(\text{נלע הפסידה בשלוש משחקים}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{4651}{7776}$$

כעת:

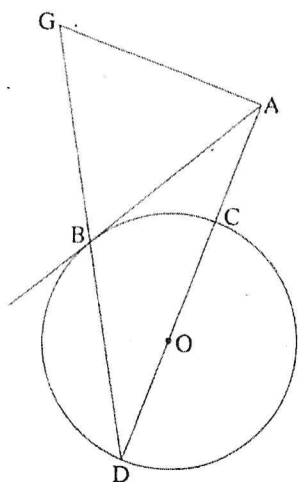
$$P(\text{נלע ניצחה ד-3 משחקים הראשונים וקוללה בטל-טקו המשחק האחרון} \mid \text{הפסידה במשחק אחר פסח}) = \frac{P(\text{נלע הפסידה במשחק אחר פסח})}{P(\text{נלע הפסידה במשחק אחר פסח})} =$$

$$= \frac{P(\text{נלע ניצחה ד-3 משחקים הראשונים וקוללה בטל-טקו המשחק האחרון})}{P(\text{נלע הפסידה במשחק אחר פסח})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{4651}{7776}\right)} = \frac{54}{4651} \approx 0.012$$

(ההסתברות לניצחון במשחק יחיד: $\frac{1}{2}$: $3p = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$,
 ההסתברות שניקו במשחק יחיד: $\frac{1}{3}$: $1 - 4p = 1 - 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$,
 ההסתברות להפסד במשחק יחיד: $p = \frac{1}{6}$.

הינך כי נלע הפסידה במשחק אחר פסח -
 ההסתברות שכל ניצחה ד-3 המשחקים הראשונים
 וקוללה בטל-טקו המשחק האחרון היא: $\frac{54}{4651} \approx 0.012$.





4. נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.
מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:
הישר AB משיק למעגל בנקודה B,
הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות
הישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט).
הנקודות B, D ו- G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט.
נסמן: $\angle ADB = \alpha$.
א. הביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות α .
ב. הוכיחו: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$.
נתון: $AG = 7$, $AC = \frac{1}{2}DC$.
ג. חשבו את R.
נסמן ב- S את שטח המשולש BDC.
ד. (1) הוכיחו: $\triangle ADG \sim \triangle BDC$.
(2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.

2/12/20

7126

II

$$T' \sim AB \quad (1)$$
$$\angle GAD = 90^\circ \quad (2)$$
$$V_{DC} = 2R \quad (3)$$

BC 7 1/2 1/2 1/2 1/2 (4)

$$\nabla ADB = \alpha \quad (5)$$
 $\angle NBC = 90^\circ$ (6)
$$\downarrow$$

$$* GBC = SC^c \quad (7)$$
$$\neq ABC = \neq ADB = 2 \text{ (8)}$$

$AG \perp AD$ 1' 5)

١٥٥

נכון AD אחר בלחיצת המעטף

בנימל עזר (נא/ שטאט) סטאטאמאנט

115

5/10 הימים - הנשקף על דולר.
עכ. (5), (5).

1800 1/5 1/2 1/3 1/4 1/5

זוהי בין שני אפשרויות. לפי ⑤, ④, ③





נימוק

חיסור זוויות. אפי (7), (8)

השלמה של המשולש AGP

זווית 180°. אפי (2), (5)

השלמה של המשולש ABG

זווית 180°. אפי (9), (10)

טעם

(9) $\angle ABG = 90^\circ - \alpha$

(10) $\angle AGB = 90^\circ - \alpha$

(11) $\angle BAG = 2\alpha$

נ.ש.ל. כ'

כל זווית שווה לקדמון

(12) $\angle BAC = \angle BAD$

משפט זמניו. ז.ז. אפי (8), (12)

(13) $\triangle BAC \sim \triangle DAB$

יחס הצלעות השתאף
במשולשים דומים. אפי (13)

(14) $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$

נ.ש.ל. ב'

נתון

(15) $AC = \frac{1}{2} DC$

נתון

(16) $AG = 7$

אפי (3), (15). חישוק

(17) $AC = R$

יחס הצלעות השתאף

(18) $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$

במשולשים דומים. אפי (13)

הזווית של המשולש ABG

(19) $AB = AG = 7$

יש צלעות שוות. אפי (9), (10), (16)




נילוי

חישוב. לפי (15), (3)

חיבורי הטעם. לפי (3), (20)

קצתה ביחס של (18)

חישוב

טענה

$$AC = R \quad (20)$$

$$AD = 3R \quad (21)$$

$$\frac{7}{R} = \frac{3R}{7} \quad (22)$$

$$R = \frac{7}{\sqrt{3}} \quad (23)$$

נ.ש.ל.

נילוי

כל אורך שווה לעצמו

לפי (2), (6)

משפט קנטון S.S. לפי (25), (26)

$$S_{BDC} = S \quad (24)$$

$$\angle ADG = \angle BDC \quad (25)$$

$$\angle GAD = \angle DBC = 90^\circ \quad (26)$$

$$\triangle ADG \sim \triangle BDC \quad (27)$$

נ.ש.ל. (1)

חישוב. לפי (21), (23)

משפט פיתגורס במשולש ADF

לפי (2)

חישוב. לפי (16), (28), (29)

יחס הסתמים של משולשים ק/ל'ק

שווה לריבוע יחס הפאות הנגזרות

לפי (2)

$$AD = 3R = 7\sqrt{3} \quad (28)$$

$$GD^2 = AD^2 + AG^2 \quad (29)$$

||

$$GD = 14 \quad (30)$$

$$\frac{S_{ADG}}{S_{BDC}} = \left(\frac{GD}{DC}\right)^2 \quad (31)$$



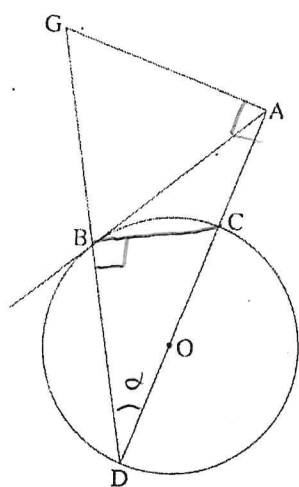
נלמד
היטוב

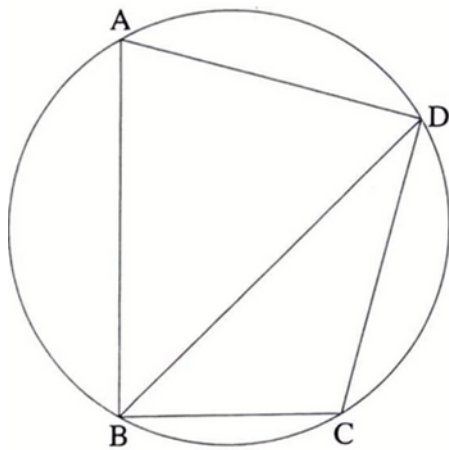
שאלה

$$S_{\text{מס}} = \left(\frac{14}{2 - \frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2 \cdot S = 35 \text{ (32)}$$

~ ש.ל. 3' (2)

שיטות עם המוסמך:





5. מרובע ABCD חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט).

נסמן: $\angle DAB = \alpha$, α היא זווית חדה.

א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו-R.

נתון: $BC = R$, $CD = R\sqrt{2}$.

ב. חשבו את α .

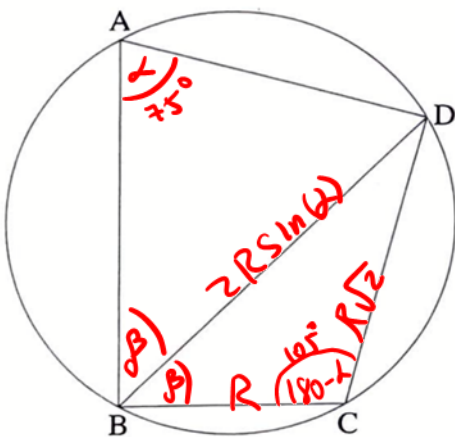
נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

נסמן ב- h_1 את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD,

וב- h_2 את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.



א. נחשב ΔABD חסום במעגל, (כפי שנינוס)

$$\frac{BD}{\sin(\alpha)} = 2R \rightarrow \boxed{BD = 2R \sin(\alpha)}$$

ב. כיוון חסום של שני זוויות נגדיות נרשמו

$$\angle BCD = 180 - \alpha \leftarrow 180^\circ - \alpha$$

נחשב במשולש הקוסינוסים? ΔBDC :

$$BD^2 = CD^2 + CB^2 - 2 \cdot CD \cdot CB \cdot \cos(180 - \alpha)$$

$$(2R \sin \alpha)^2 = R^2 + (R\sqrt{2})^2 - 2 \cdot R \cdot R\sqrt{2} \cdot (-\cos \alpha) \quad | : R^2$$

$$4 \sin^2 \alpha = 1 + 2 + 2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$4(1 - \cos^2 \alpha) = 3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$4 - 4 \cos^2 \alpha = 3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$0 = 4 \cos^2 \alpha + 2\sqrt{2} \cos \alpha - 1$$

$$\cos \alpha = 0.2588$$

$$\boxed{\alpha = 75^\circ}$$

$$\cos \alpha = -0.9659$$

$$\alpha = 165^\circ$$

(כפי ש- α חדה)



$$\angle DBC = \angle DBA = \beta \quad \text{ס'יון } \angle$$

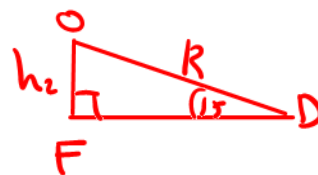
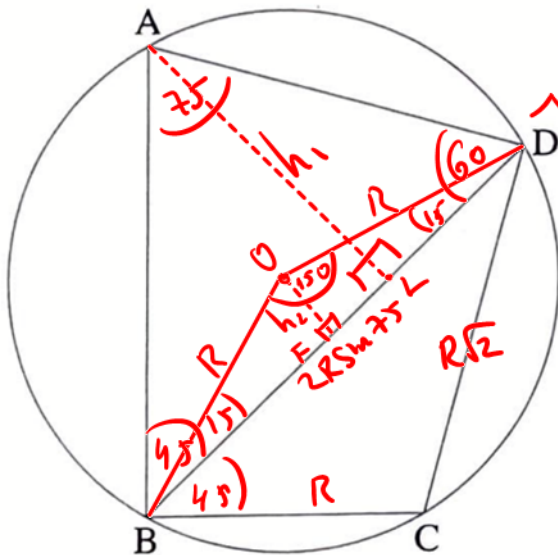
נכיר את משפט הסינוסים? $\angle DBC$ כתיבתי (וא) א β

$$\frac{DC}{\sin \beta} = 2R \rightarrow \frac{R\sqrt{2}}{\sin \beta} = 2R \rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \beta = 45^\circ, 135^\circ$$

$$\angle ABD = 45^\circ \quad \text{ס'יון כוונת}$$

$$\angle : h_2 \text{ אקט.}$$

$\angle BOD = 2\angle BAD = 90^\circ$ מרכז ג' צורה כי 2 מהיקנה
המשפט של אוג' קט.



$\triangle ODF$

$$\sin(45) = \frac{h_2}{R} \rightarrow h_2 = R \sin(45)$$

$$\angle : h_1 \text{ אקט.}$$

$\triangle ABD$

$$\frac{AD}{\sin(45)} = 2R \rightarrow AD = 2R \sin 45 = R\sqrt{2}$$

$\triangle ADL$

$$\sin(60) = \frac{h_1}{AD} \rightarrow h_1 = \sin(60) \cdot R\sqrt{2} = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$



$$\frac{h_1}{h_2} = \left| \frac{\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{R\sin(45)} \right| = 3 + \sqrt{3} = 4.732$$



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = 3x + \frac{3}{x}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את התשובה.
 (3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

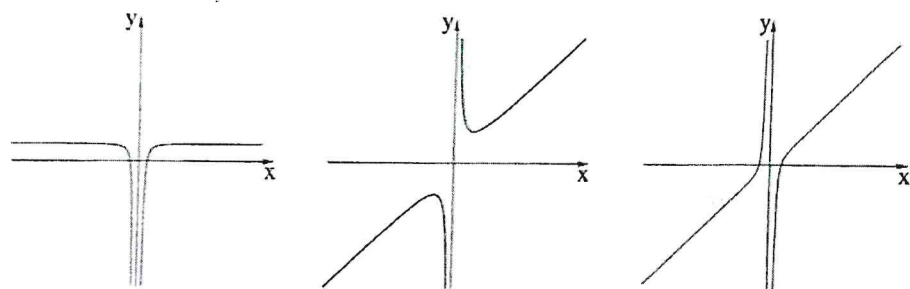
נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו- $g(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו- $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$.

הפונקציות $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ב. כל אחד מן הגרפים III-I, שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$.

לכל אחת מן הפונקציות פתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.



גרף III

גרף II

גרף I

- ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .
 ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{2}$ ו- $x = 2$.

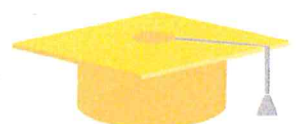
ה. נתון: $I < a$ הוא פרמטר. חשבו את $\int_{\frac{1}{a}}^a g(x) dx$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = \int_1^x f'(t) dt$. נתון כי הפונקצייה $h(x)$ מוגדרת בתחום $1 \leq x$.

ו. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $h(x)$, וקבעו את סוגה.

6.1 $\overline{x \neq 0}$

6.2 $f(-x) = -3x - \frac{3}{x}$
 $-f(x) = -(3x + \frac{3}{x}) = -3x - \frac{3}{x}$
 $f(-x) = -f(x)$
 הפונקציה אי זוגית



6.13)

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{x^2} \rightarrow F'(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^2}$$

$$f'(x) = 0: 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

$$F'(2) = +$$

$$F'(\frac{1}{2}) = -$$

$$F'(-\frac{1}{2}) = -$$

$$F'(-2) = +$$

$$x < -1 \text{ או } 1 < x: \text{ עלייה}$$

$$-1 < x < 0 \text{ או } 0 < x < 1: \text{ ירידה}$$

7) * הערך המינימום המקומי של $f(x)$ הוא -1 והערך המקסימום של $f(x)$ הוא 3 .
 נקודות קיצון: $x = -1$ ו- $x = 1$.
 נקודות קיצון: $x = -1$ ו- $x = 1$.

* נניח שיש נקודה x_0 שבה $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) > 0$ (כלומר, $f''(x_0) > 0$ ו- $f'(x_0) = 0$).
 אז x_0 היא נקודה של מינימום מקומי.
 נקודות קיצון: $x = -1$ ו- $x = 1$.

הערה: אם $f''(x_0) < 0$ ו- $f'(x_0) = 0$, אז x_0 היא נקודה של מקסימום מקומי.
 נקודות קיצון: $x = -1$ ו- $x = 1$.

* נניח שיש נקודה x_0 שבה $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) = 0$.
 אז x_0 היא נקודה של נקודת שיתוף.
 נקודות קיצון: $x = -1$ ו- $x = 1$.



$$6. \quad g(x) = 0$$

$$f(x) \cdot f'(x) = 0$$

שם
 II $f(x)$
 עתה $f'(x) = 0$
 (בסוף) $x = \pm 1$
 אולי

$$| (1, 0) | \quad | (-1, 0) |$$

1) $x = \frac{1}{2}$ ו $x = 2$ שני נקודות
 ש $g(x)$ מתאפסת בין הנקודות (ב $x=1$ אם
 סוף קודם) וכן (ב $x=1$ אם החלוקה לא
 (פרד'ם)

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) f'(x) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x) f'(x) dx$$

$$\text{לפי הנוסחה: } \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\left[\frac{[f(x)]^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^2 - \left[\frac{[f(x)]^2}{2} \right]_{-\frac{1}{2}}^1$$

$$\frac{[f(2)]^2}{2} - \frac{[f(1)]^2}{2} - \frac{[f(1)]^2}{2} + \frac{[f(\frac{1}{2})]^2}{2} = \frac{7.5^2}{2} - \frac{6^2}{2} - \frac{6^2}{2} + \frac{3.5^2}{2} = |20.25|$$

$$\int_{\frac{1}{a}}^a g(x) dx = \int_{\frac{1}{a}}^a f(x) f'(x) dx = \left[\frac{[f(x)]^2}{2} \right]_{\frac{1}{a}}^a = \frac{[f(a)]^2}{2} - \frac{[f(\frac{1}{a})]^2}{2}$$



6(ה) הנשך

$$\frac{(3a + \frac{3}{a})^2}{2} - \frac{(\frac{3}{a} + 3a)^2}{2} = \boxed{0}$$

$$(1) \quad h(x) = \int_1^x f'(t) dt \rightarrow h(x) = F(t) \Big|_1^x$$

$$h(x) = F(x) - F(1)$$

$$h'(x) = f'(x) - 0$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$x=1$ (ג) $x \geq 1$ בתחום

לפי חסר $f'(x)$ מתא'ם ב $x=1$ נח' $h'(x)$ וזמן גם $h'(x)$ מתא'ם ב $x=1$ $h'(x) = f'(x)$ מתא'ם, מסת' $x=1$ וק'ר מ'נ'מ'ר ב $h(x)$.

$$h(1) = F(1) - F(1) = 0$$

$$\boxed{\min(1, 0)}$$



7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2(\cos x)^2 + \sin 2x}{2 \cos x}$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) הסבירו מדוע לפונקצייה $f(x)$ אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x .
 (3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
- ב. (1) הראו כי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ מתקיים: $f'(x) = \cos x - \sin x$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- ג. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 (2) t הוא מספר. מצאו את כל ערכי t שבעבורם יש למשוואה $f(x) = t$ פתרון יחיד (בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$).
- ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי שני הישרים $x = \frac{3}{4}\pi$ ו- $x = \frac{5}{4}\pi$.

פתרון

1.1.

תחום הגדרה של f בתחום הנתון: נדרוש: מקרה שונה מאפס: $\cos x \neq 0$

$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (א שלם)

וקיבלנו הנתון
 $\downarrow$ $0 \leq x \leq 2\pi$

k	-1	0	1	2
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$

$x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

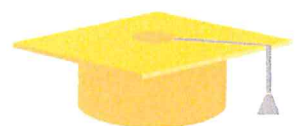
כלומר, בתחום הנתון, נחלק את התחום של הפונקציה f הנתון:

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$

המשקל הפתוח קטן הרבה...

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



א.2. הערכים החשובים באסימטוטות מאונכות לקיר ה- x
 בתחום הנקרא - מסעף קודם - מאפסי הימין בתחום: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
 ערכים אלו מאפסי גם את המונח של הפונקציה:

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 0^2 + 0 = 0$$

$$2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2 + \sin\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot 0^2 + 0 = 0$$

נכנס למסלול את היבול האלגרי של הפונקציה f תוך שימוש
 בצבול - טריגונומטריות:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2(\cos x)^2 + \sin 2x}{2 \cos x} = \frac{2(\cos x)^2 + 2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos x} = \\ &= \frac{2 \cos x \cdot (\cos x + \sin x)}{2 \cos x} = \cos x + \sin x \end{aligned}$$

היבול שנקרא נקודות אסימטוטות:

מסקנה - הנקודות אלו קיימות בקודות אי-יציבות סלקות ("מוריס")
 של הפונקציה f ואין אלו אסימטוטות המאונכות לקיר ה- x של הפונקציה

*הארה:

ניתן להיווכח במסקנה הנ"ל גם על ידי ערכי אדלם - ערכים
 של ערכי x המתקרבים לנקודות אלו.

כאשר ערכי ה- x שואפים לערכים אלו ערכי הפונקציה שואפים להיות

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x) = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (\cos x + \sin x) = \cos \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים
אל תתפשר עליה.



המשק הבטחון קצת יבש...

מסקנה: חצי-סעיף קודם:
 נקודות אי-היציבות הסליקו- של הפונקציה f במחזור ("חורים")

$$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$$

3. נקודות חצי-סעיף קודם של הפונקציה f במחזור:

חיתוך עם גרף $y=0$:

* נמצא נקודות חצי-סעיף קודם של הפונקציה f במחזור:

$$f(x) = \cos x + \sin x$$

$$\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \quad \text{או} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \quad \text{או} \quad x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow f(x) = 0$$

$$\cos x + \sin x = 0 \quad / -\sin x$$

$$\cos x = -\sin x$$

$$\cos x = \sin(-x)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \quad / +x$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad / :2$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k$$

כאן x יצא ל-0

k	0	1	2	3
x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$

וגם יתכן:

$$\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$$



חינוך ע"י ציר ה- y ($x=0$):

$$f(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1 + 0 = 1$$

$$(0, 1)$$

ד.ו. צ"ל: על x קומם ההקדמה של הפונקציה f מתקיים:

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

הואילן:

$$f(x) = \cos x + \sin x, \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ או } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ או } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$$

נצייר את הפונקציה המפושטת הנ"ל קומם הנ"ל:

$$f'(x) = -\sin x + \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ או } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ או } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

↓ חוק החילוף (קואטליקו) בחיבור

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

קומם הנ"ל - מ"ל קומם סוף ד.ו.

ד.2. נקודות קיצון של $f(x)$ קומם וסוגן:
 נקודות קריטיות: נשווה את הנגזרת לאפס:

$$f'(x) = 0$$

$$\cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

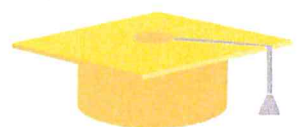
$$x = -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k \quad \text{או} \quad x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



המשך הפתרון בעמ' הבאה...

$$f'(x) = 0 \quad \text{הבינו}$$

$$\downarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k$$

ובתחום הנשוא:

K	-1	0	1	2
X	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$

עצמי סעיף נוסף:

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$f''(x) = -\sin x - \cos x$$

נבדוק את הנק' הקריטית (משוואה) שהתקבלה מעיל:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0$$

לכן, עבור $x = \frac{\pi}{4}$ יש מינימום מקומי (פנימי).

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) \text{ max}}$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} > 0$$

לכן, עבור $x = \frac{5\pi}{4}$ יש מקסימום מקומי (פנימי).

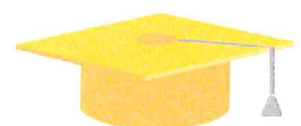
$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$\boxed{\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right) \text{ min}}$$

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.

אל תתפשר עליה.



המשך הפתרון בפרק הבא...

נקודות קריטיות בקנה המוסר:

$$f(x) = \cos x + \sin x = 1$$

נקודות היחידה של קנה המוסר.

סוג הקיצון בקנה המוסר - נסו מסוג הקיצון של קנה הקיצון הפנימי הקובע את ביטוי $\max(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ - זמן סוג הקיצון של נקודה זו היא מניחים (קנה המוסר הגדול):

$$\boxed{\max(0, 1)}$$

$$f(2\pi) = \cos(2\pi) + \sin(2\pi) = 1 + 0 = 1$$

סוג הקיצון בקנה המוסר - נסו מסוג הקיצון של קנה הקיצון הפנימי הקובע את ביטוי $\max(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$ - זמן סוג הקיצון של נקודה זו היא מניחים (קנה המוסר הגדול):

$$\boxed{\max(2\pi, 1)}$$

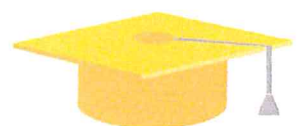
* הארה:

נקודות אי-הרציפות בסלקה $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ הנמצאות בין הנקודות $(0, 1)$ ו- $(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$ לא משפיעות על התוצאה הבאה ולכן נכלל בקבוצה של קנה המוסר היטני בלבד.

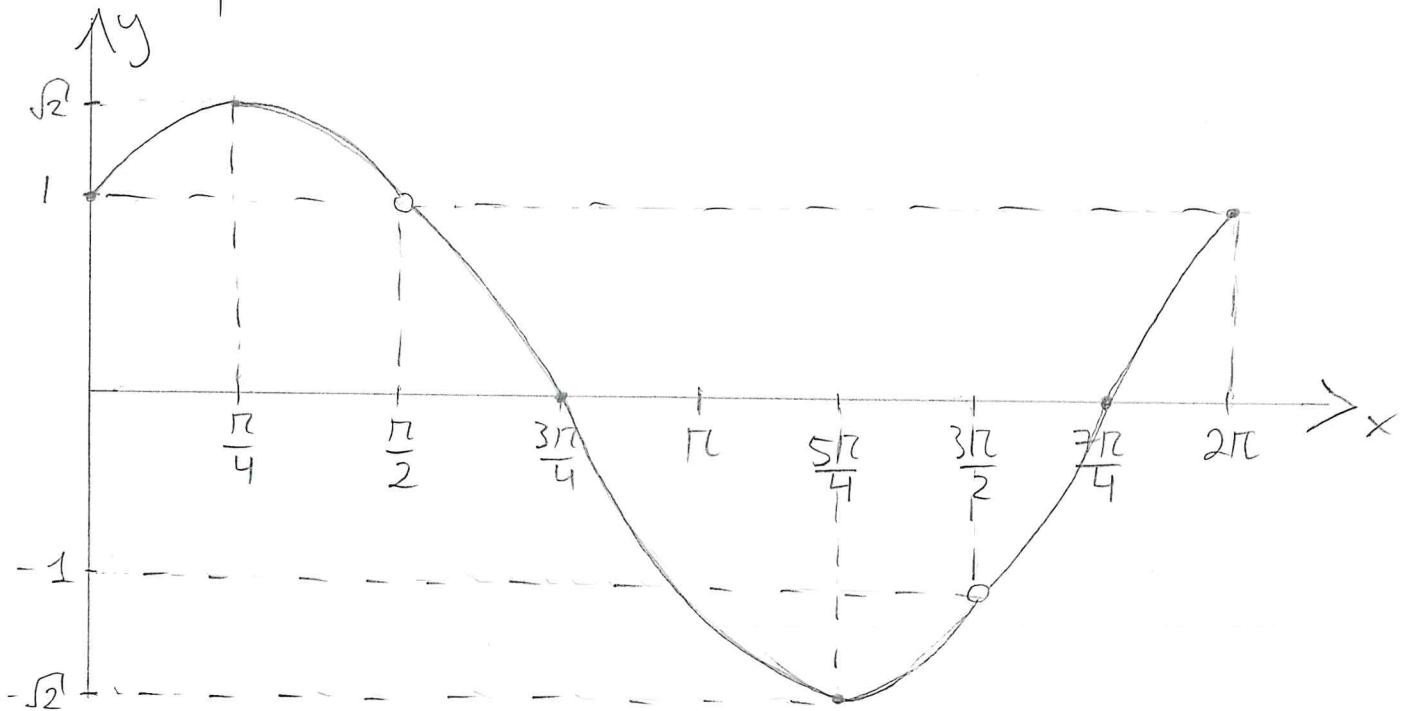
המשק הסגור קבוע הבא.

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



ע.1. על פי סעיפי החקירה עד כה נשאל
 סקירה של גורם הפונקציה (ואל בתחום היכון:



ע.2. כל ערכי t שהעבורם משוואה $t = f(x)$ מתקין יחיד
 בתחום הנדרש.

פתרון גרפי: השאלה שקולה לשאלה: כמה נקודות משותפות
 יש לגרף הפונקציה f הימני ולגרף $y = t$?

תשובה: עדיין $t = \pm\sqrt{2}$ יהיה השקה בנקודה יחידה -
 בנקודות הקיצון
 הפנימיים.

ועבור $t = 1$ יהיה נקודה חמישה יחידה שכן
 בנקודה אי-הרציפות הסלקית (החור) $(-\frac{\pi}{2}, 1)$ אין כאן חומר.
 ניתן להראות כי נק' החומר היחידה היא $(\pi, -1)$.

המשך הפתרון למטה הקלף...





2. השטח המוחלט של יבוי פונקציה ימצא $f(x)$

על יבוי ציר ה- x
ועל יבוי הישרים $x = \frac{5\pi}{4}$ ו- $x = \frac{3\pi}{4}$

מתקרה קודמת, ניתן להבחין כי $f(x)$ יורד במחצית:

$$\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$$

משמע ערכי ימצא $f(x)$ שליליים במחצית זה ועל

ימצא נמצא מחצית אחרת היא במחצית זה.

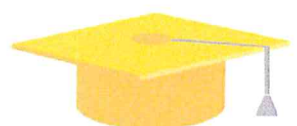
נוסף על כך אף האינטגרל בערכו המוחלט אז נכתוב:

אם האינטגרל המסומן ב-1- (הפירוש קיין) $\int (f(x) - 0) dx$ בשטח הרצוי:

$$S = - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (f(x)) dx = - [f(x)]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = - [f(\frac{5\pi}{4}) - f(\frac{3\pi}{4})] =$$

$$= f(\frac{3\pi}{4}) - f(\frac{5\pi}{4}) = 0 - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} \approx 1.414$$

מחשבים קודמים:
נך חומר עם ציר ה- x
ונך קיבלו פתרון



נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- x .

נתון כי שיעור ה- x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה- x של נקודות החיתוך של הפונקצייה $f(x)$ עם הפונקצייה $g(x)$. נסמן ב- p את שיעור ה- x של הנקודה A. p הוא פרמטר.

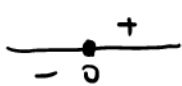
ב. הביעו באמצעות p את אורך הקטע AB.

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB.

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נמקו את התשובה.

$$f(x) = x^3 \quad g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^3}$$

ל. (1) תחום הגדרה של $f(x)$: כל x
תחום הגדרה של $g(x)$: $x \geq 0$



$$\sqrt{f(x)} = f(x)^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{כ. (2)}$$

$$f(x) = f(x)^2$$

$$f(x)(f(x) - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = 0$$

$$x^3 = 0$$

$$x = 0$$

$$f(x) = 1$$

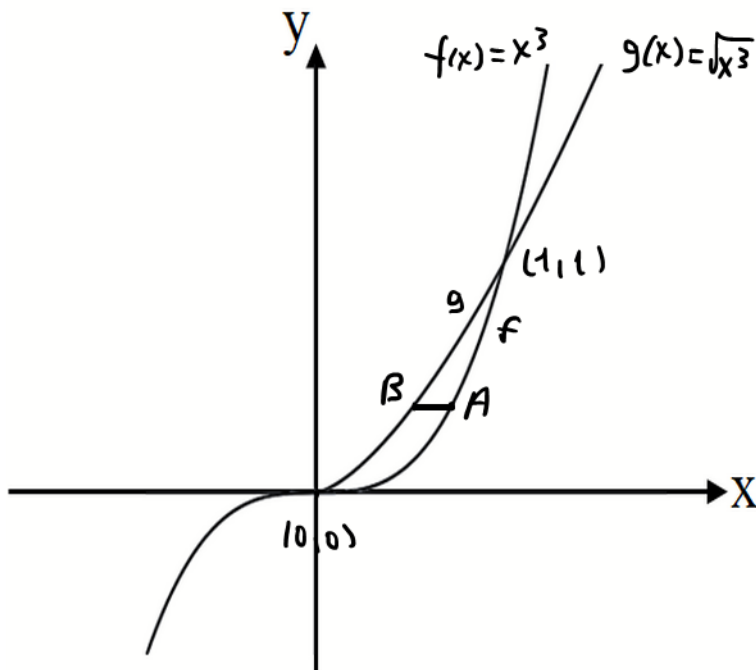
$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

$(0, 0), (1, 1)$



אנחנו סקלר, נסמך בהיכר הפתרון, לא נדרש בשאלה.



הנתון $0 < x < 1$

$f(x)$ נמדד $g(x)$

למשל $g(0.5) > f(0.5)$

$0.35 > 0.125$

נתון $x_A = p$

$0 < p < 1$

$A(p, f(p))$

$A(p, p^3)$

היכן AB מתקבל וצנר ה- x ונס $y_B = y_A = p^3$

$p^3 = \sqrt{x^3}$ וכן $g(x) = \sqrt{x^3}$ נחטור על $B(x, p^3)$
 $p^6 = x^3 \Rightarrow x = p^2 \Rightarrow B(p^2, p^3)$

נסכים: $B(p^2, p^3)$ $A(p, p^3)$

$$AB = p - p^2$$

$$AB = x_A - x_B$$

נשים לב כי עבור $0 < p < 1$

מתקיים $p^2 < p$ ולכן $p - p^2$ אינו ערך חיובי של אורך AB



$$S_{A \cup B} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot y_A \quad 0(0,0) \quad 2.$$

$$A \cup B \text{ אזור הריבוע } y_A = p^3$$

$$\left[S = \frac{1}{2} \cdot p^3 (p - p^2) \right] \quad S = \frac{1}{2} (p^4 - p^5)$$

$$S'(p) = \frac{1}{2} (4p^3 - 5p^4)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot p^3 (4 - 5p) = 0$$

$$p=0 \quad \text{נפח אפס}$$

$$p=0.8$$

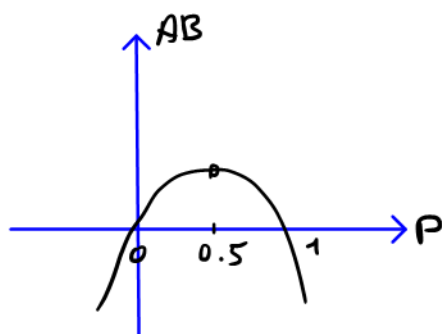
$$S_{\max} = S(0.8) = 0.04096 = \frac{128}{3125}$$

P	0.8
S'	+
S	↗
	max
	↘

$$S_{\max} = \frac{128}{3125} = 0.04096$$

$$AB = p - p^2$$

$$p=0.5 \quad 3. \quad AB \text{ מקסימלי כאשר}$$



שלב המקסימום של $A \cup B$ מקסימלי

לא מתקבל

כאשר אנחנו מקסימליים.

