

מתמטיקה 5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך — $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הן שתי נקודות שונות הנמצאות על הפרבולה $y^2 = 36x$ ברביע הראשון.

א. (1) הראה כי שיפוע המיתר AB הוא $m = \frac{36}{y_2 + y_1}$.

(2) הנקודה $(x, 7\frac{1}{2})$ היא אמצע המיתר AB.
מצא את m.

ב. נתון: המרחק של כל נקודה על הפרבולה הנתונה מן הישר $x = a$ שווה למרחק של נקודה זו מן הנקודה $(9, 0)$.

מרחק הנקודה A מן הישר $x = 0.75a$ הוא 7.

(1) מהו הערך של a? נמק.

(2) מצא את משוואת הישר AB.

2. נתון טרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel DC$) (ראה סרטוט).

נתון: $\angle DAB = 120^\circ$.

נסמן: $\vec{DC} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = t\underline{u}$ (t הוא סקלר).

א. (1) הבע את t באמצעות $|\underline{u}|$ ו- $|\underline{v}|$.

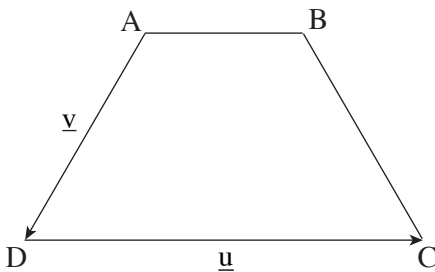
(2) הבע את הווקטור \vec{BC} באמצעות $|\underline{u}|$, \underline{v} , \underline{u} ו- $|\underline{v}|$.

נתון: $\underline{v} = (-1, y, 0)$, $\underline{u} = (8, 6, -10)$.

ב. (1) מצא את שיעור ה- y של הווקטור \underline{v} (מצא את שני הערכים).

(2) עבור איזה ערך משני הערכים של y שמצאת בתת-סעיף (1), הבסיס DC הוא קוטר במעגל שהטרפז

חסום בו? נמק.



3. א. נתון מספר מרוכב $z = r \cdot [\cos \theta + i \cdot \sin \theta]$.

הסבר מדוע מתקיים: $r \cdot [\cos(180^\circ + \theta) + i \cdot \sin(180^\circ + \theta)] = -z$.

z_1, z_2, z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים. הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס נמצאות על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

הנקודות המייצגות את z_1 ו- z_2 נמצאות ברביע הראשון, והנקודה המייצגת את z_3 נמצאת ברביע השלישי.

נסמן $z_1 = r_1 (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$.

ב. הוכח כי המנה $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3}$ היא מספר ממשי.

נתון גם כי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_1 ו- z_3 נמצאות על מעגל היחידה, ו- $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3} = \frac{5}{4}$.

ג. חשב את הערך המוחלט של z_2 .

ד. z_4 הוא הצמוד של z_3 .

הבע באמצעות α את שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_2, z_3, z_4 .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 4e^{\sqrt{x}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $h(x) = f(x^2)$, $g(x) = 2 \cdot f'(x)$ בתחום $x > 0$.

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, קבע את סוגה,

והראה כי הנקודה הזאת נמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

נתון: הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ נפגשים בנקודה אחת בלבד (הנקודה שמצאת בסעיף ב).

ג. סרטט את הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ באותה מערכת צירים.

ד. נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, גרף הפונקציה $h(x)$ ועל ידי הישר $x = a$, $a > 1$,

שווה ל- $e^4 + 4e - 2 \cdot f(a)$.

מצא את הערך של a . תוכל להשאיר \ln בתשובתך.

5. הגרפים I, II שבסרטוט שלפניך מתארים שתי פונקציות המוגדרות בתחום $-1 \leq x \leq 4$.

אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$,

והאחר הוא של פונקציית הנגזרת שלה, $f'(x)$.

א. קבע מי מבין הגרפים I ו- II הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$. נמק.

הסתמך על הסרטוט וענה על סעיף ב.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מה הן האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$

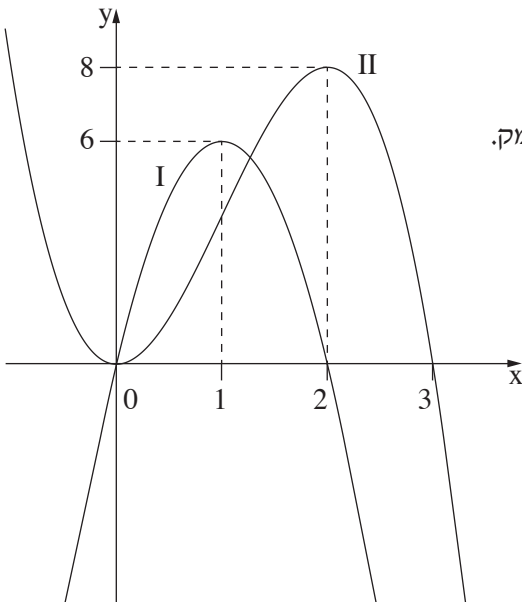
המאונכות לציר ה- x ?

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון הפנימיות

של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(5) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.



בהצלחה!