שאלון 35572 מועד ב׳
קיץ תשפ״א

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35572 מועד ב׳ קיץ תשפ״א.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. נתונה משוואת הפרבולה : $y^2 = 2ax$ **, ומשוואת המעגל** $x^2+y^2-2ax-2x=0$ ($a>0$ **, פרמטר).**

נמצא את נקודות החיתוך בין שתי העקומות.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2ax-2x=0 \\ y^2=2ax \end{cases}$$

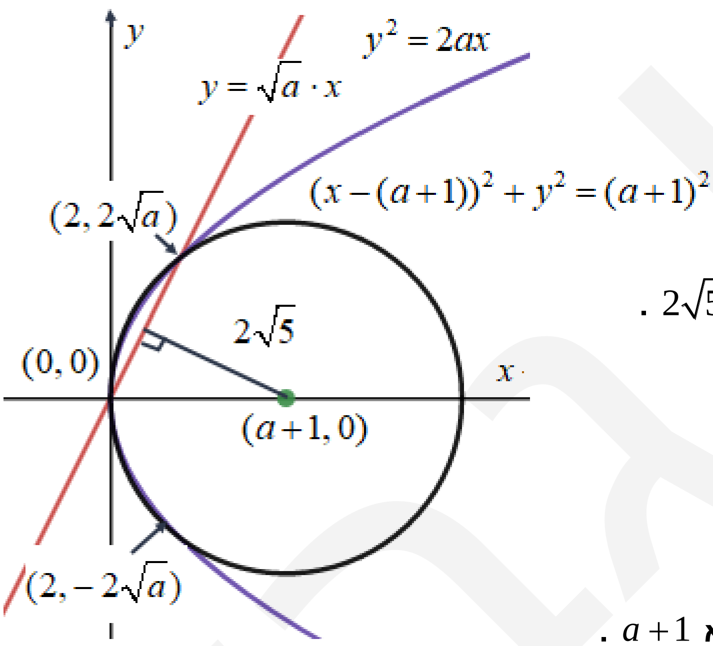
$$x^2-2x=0$$

$$x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$$

$$x=2 \quad \rightarrow y^2=4a \quad \rightarrow \boxed{(2,2\sqrt{a})} \quad \boxed{(2,-2\sqrt{a})}$$

תשובה: שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל הם - $(2,-2\sqrt{a})$, $(2,2\sqrt{a})$ **ו-** $(0,0)$.

ב. דרך שתיים, משלוש נקודות החיתוך, עובר ישר ששיפועו חיובי,



ולכן הנקודות הן $(2,2\sqrt{a})$ **ו-** $(0,0)$.

$m=\frac{2\sqrt{a}}{2}=\sqrt{a}$ **, ומשוואת הישר היא** $y=\sqrt{a}\cdot x$ **.**

תשובה: משוואת הישר היא $y=\sqrt{a}\cdot x$.

ג. ממרכז המעגל מעבירים אנך לישר. אורך האנך הוא $2\sqrt{5}$.

(1) נמצא את מרכז המעגל ואת הרדיוס שלו.

$$x^2+y^2-2ax-2x=0$$

$$x^2-2(a+1)x+y^2=0$$

$$\boxed{(x-(a+1))^2+y^2=(a+1)^2}$$

תשובה: מרכז המעגל הוא $(a+1,0)$ **ורדיוס הוא** $a+1$.

(2) כיוון שהישר $-\sqrt{a}\cdot x+y=0$ **עולה, ומרכז המעגל מתחתיו, הרי שהמרחק "שלילי".**

$$2\sqrt{5}=-\frac{-\sqrt{a}\cdot(a+1)+0}{\sqrt{a+1}}$$

$$2\sqrt{5}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+1} \quad ()^2 \rightarrow test$$

$$20=a(a+1)$$

$$0=a^2+a-20$$

$$a=4, \cancel{a=-5} \quad \leftarrow a>0$$

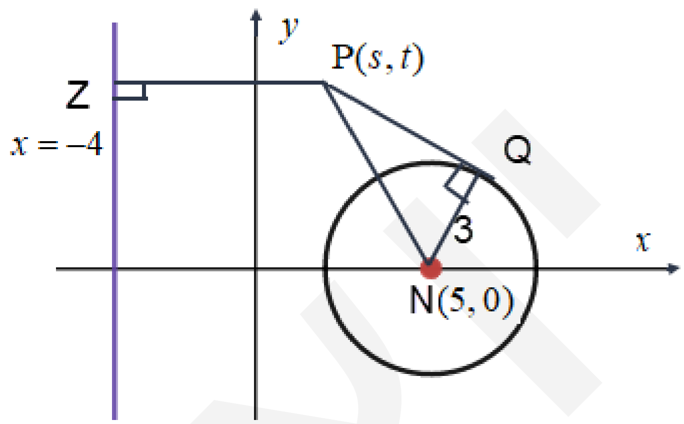
$$\underline{test}: 2\sqrt{5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5} \rightarrow 2\sqrt{5}=2\sqrt{5} \quad o.k.$$

תשובה: $a=4$.

ד. עבור $a = 4$, מרכז המעגל הנתון הוא $(5, 0)$ ורדיוסו הוא 5.

מגדירים מעגל חדש, שמרכזו הוא גם $(5, 0)$ ורדיוסו 3 (קטן ב- 2 מרדיוס המעגל הנתון).

נסמן: $P(s, t)$ נקודה על המקום הגיאומטרי, של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל החדש שווה למרחקן מן הישר $x = -4$.



בהתאם: $PZ = PQ$

$$s - (-4) = \sqrt{(PN)^2 - (QN)^2}$$
$$(s+4)^2 = (s-5)^2 + (t-0)^2 - 3^2$$
$$s^2 + 8s + 16 = s^2 - 10s + 25 + t^2 - 9$$
$$18s = t^2$$
$$\boxed{y^2 = 18x}$$

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא $y^2 = 18x$.

בגרות פא יולי 21 מועד קיץ ב שאלון 35572

א. נתון משולש ABC .

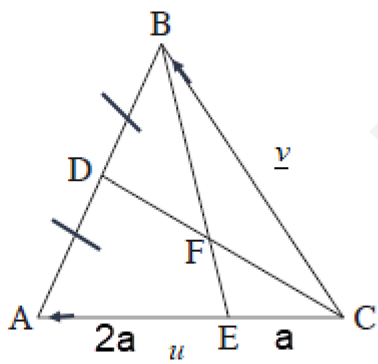
$\boxed{\overrightarrow{CA} = \underline{u}}$ $\boxed{\overrightarrow{CB} = \underline{v}}$

D **היא אמצע הצלע** AB

$\boxed{\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}}$

E **מחלקת את הצלע** AC **ביחס של** $AE:EC = 2:1$

$\boxed{\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\underline{u}}$



$\overrightarrow{BF} = t \cdot \overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{BF} = t(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE})$

$\boxed{\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}t\underline{u} - t\underline{v}}$

$\overrightarrow{CF} = k \cdot \overrightarrow{CD}$

$\boxed{\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}k\underline{u} + \frac{1}{2}k\underline{v}}$

נביע את $\overrightarrow{BF}$ **גם בדרך אחרת.**

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{BF} = -\underline{v} + \frac{1}{2}k\underline{u} + \frac{1}{2}k\underline{v}$

$\boxed{\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}k\underline{u} + (\frac{1}{2}k - 1)\underline{v}}$

נבנה מערכת של שתי משוואות, על-פי יחידות ההצגה של $\overrightarrow{BF}$.

$(1) \quad \frac{1}{3}t = \frac{1}{2}k \quad \rightarrow \boxed{t = 1.5k}$

$(2) \quad -t = \frac{1}{2}k - 1$

$(2) \quad -1.5k = \frac{1}{2}k - 1 \quad \rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}} \quad \rightarrow \boxed{t = \frac{3}{4}}$

תשובה: $t = \frac{3}{4}$, $k = \frac{1}{2}$.

ב. המשולש ABC **נמצא במישור** $x+2y+z-12=0$ **.**

המישור חותך את ציר ה- x **בנקודה** A **, לכן** $y_{\mathrm{A}}=z_{\mathrm{A}}=0 \quad \rightarrow \mathrm{A}(3,0,0)$ **.**

המישור חותך את ציר ה- y **בנקודה** C **, לכן** $x_{\mathrm{C}}=z_{\mathrm{C}}=0 \quad \rightarrow \mathrm{C}(0,6,0)$ **.**

המישור חותך את ציר ה- z **בנקודה** B **, לכן** $x_{\mathrm{B}}=y_{\mathrm{B}}=0 \quad \rightarrow \mathrm{B}(0,0,12)$ **.**

הנקודה $\mathrm{O}(0,0,0)$ **היא ראשית הצירים.**

$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=2:1$ **, ולכן** $\boxed{\mathrm{E}(1,4,0)} \leftarrow \mathrm{E}(\frac{2\cdot 0+1\cdot 3}{3},\frac{2\cdot 6+1\cdot 0}{3},\frac{2\cdot 0+1\cdot 0}{3})$

$\mathrm{BF}:\mathrm{FE}=3:1$ **, ולכן** $\boxed{\mathrm{F}(0.75,3,3)} \leftarrow \mathrm{F}(\frac{3\cdot 1+1\cdot 0}{4},\frac{3\cdot 4+1\cdot 0}{4},\frac{3\cdot 0+1\cdot 12}{4})$

תשובה: $\mathrm{E}(1,4,0)\ ,\ \mathrm{F}(0.75,3,3)$.

ג. נמצא את משוואת המישור AOE **.**

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\underline{\mathrm{A}}=\underline{x}=(3,0,0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\underline{\mathrm{C}}=\underline{x}=(1,4,0)$$

ההצגה הפרמטרית היא $\underline{x}=s(1,0,0)+t(1,4,0)$ **.**

המישור מכיל את ציר ה- x **(** OA **מונחת על ציר זה) , לכן** $a=d=0$ **.**

כל שלושת קודקודי $\Delta\mathrm{AOE}$ **הם בעלי אותו שיעור** z **,** $z=0$ **, ולכן משוואת** AOE **היא:** $z=0$.

או: $\boxed{\pi_{\mathrm{AOE}}:z=0} \leftarrow b=0 \leftarrow 4b=0 \leftarrow a+4b=0 \leftarrow (a,b,c)\cdot(1,4,0)=0$

תשובה: משוואת המישור היא $z=0$ **, מישור** $[x,y]$ **.**

ד. נמצא את נפח הפירמידה FAOE **.**

$$\mathrm{V}_{\mathrm{FAOE}}=\frac{\mathrm{S}_{\Delta\mathrm{AOE}}\cdot\mathrm{H}}{3}$$

$\mathrm{OA}=3$ **מונחת על ציר ה-** x **, במישור** $z=0$ **, לכן** $h_{\mathrm{OA}}=|y_{\mathrm{E}}|=4$ **.**

$\Delta\mathrm{AOE}$ **מוכל במישור** $z=0$ **, לכן** $\mathrm{H}=|z_{\mathrm{F}}|=3$ **.**

$$\mathrm{V}_{\mathrm{FAOE}}=\frac{\frac{\mathrm{OA}\cdot h_{\mathrm{OA}}}{2}\cdot\mathrm{H}}{3}=\frac{3\cdot 4\cdot 3}{6}=6 \ .$$

תשובה: נפח הפירמידה FAOE **הוא** 6 **יח"ק.**

א. נפתור את המשוואה $z^4-2z^2+4=0 \quad :\mathrm{I}$ (z **הוא מספר מרוכב).**

$$z^4-2z^2+4=0$$

$$(z^2)_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$(z^2)_1=1+\sqrt{3}\,i$$

$$(z^2)_2=1-\sqrt{3}\,i$$

נפתור את שתי המשוואות הריבועיות שהתקבלו.

$$w_1=(z^2)_1=1+\sqrt{3}\,i$$

$$|w_1|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$$

$$\tan\theta_{w_1}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

$$\boxed{(z^2)_1=2cis\,60^\circ} \leftarrow 1st\ quadrant$$

$$t_k=\sqrt{2}\,cis\frac{60^\circ+360^\circ k}{2}$$

$$z_1=\sqrt{2}\,cis\,30^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_2=\sqrt{2}\,cis\,210^\circ=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$w_2=(z^2)_2=1-\sqrt{3}\,i$$

$$|w_2|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$$

$$\tan\theta_{w_2}=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$$

$$\boxed{(z^2)_1=2cis\,(-60^\circ)} \leftarrow 4th\ quadrant$$

$$t_k=\sqrt{2}\,cis\frac{-60^\circ+360^\circ k}{2}$$

$$z_3=\sqrt{2}\,cis\,(-30^\circ)=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_4=\sqrt{2}\,cis\,150^\circ=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

תשובה: פתרונות המשוואה הם: $\sqrt{2}\,cis\,30^\circ$, $\sqrt{2}\,cis\,210^\circ$, $\sqrt{2}\,cis\,(-30^\circ)$, $\sqrt{2}\,cis\,150^\circ$.

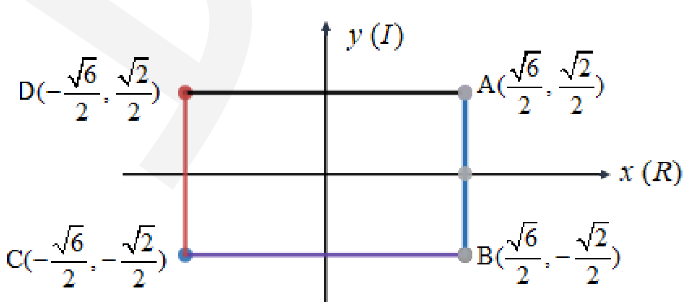
אפשר גם: פתרונות המשוואה הם: $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

ב. ארבעת הפתרונות שהתקבלו מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס, כמתואר בציור הבא.

$$S_{\mathrm{ABCD}}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}$$

$$S_{\mathrm{ABCD}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$$

$$\boxed{S_{\mathrm{ABCD}}=2\sqrt{3}}$$



תשובה: שטח המצולע הוא $2\sqrt{3}$.

ג. נתונה משוואה $II: \quad (az^2+b)(z+1)=0$ **(** z **הוא מספר מרוכב,** $a,b\neq 0$ **מספרים ממשיים).**

ידוע כי שניים מבין הפתרונות של המשוואה הם מספרים מדומים.

פתרון אחד הוא ממשי: $z+1=0 \quad \to z=-1$ **,**

ולכן שני הפתרונות המדומים מאפסים את הסוגריים השמאליים.

$z=t\cdot i$ **הוא פתרון מדומה, לכן:**

$$a(t\cdot i)^2+b=0$$

$$-at^2+b=0$$

$$t^2=\frac{b}{a} \quad \to \boxed{a\cdot b>0} \quad \leftarrow a,b\neq 0$$

תשובה: הוכחנו כי $a\cdot b>0$ **.**

ד. נתונה משוואה $II: \quad (az^2+b)(z+1)=0=0$ **(** z **הוא מספר מרוכב,** $a,b\neq 0$ **מספרים ממשיים).**

פתרון אחד הוא ממשי: $z+1=0 \quad \to z=-1$ **.**

על פי סעיף ג: $z=t\cdot i$ **הוא פתרון מדומה, כאשר** $t^2=\frac{b}{a} \quad \to t=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$**,**

ומכאן ששני הפתרונות הנוספים הם: $\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot i$ **ו-** $-\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot i$ **.**

תשובה: פתרונות המשוואה הם (-1) **,** $\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot i$ **,** $-\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot i$**.**

ד. ידוע כי הפתרונות המדומים של משוואה II **, כלומר** $\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot i$ **ו-** $-\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot i$**,**

מיוצגים על ידי נקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

רדיוס מעגל זה גדול פי 2 **מן הערך המוחלט של פתרונות משוואה** I **, כלומר שווה ל-** $2\sqrt{2}$ **.**

$$\left|\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot i\right|=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}}=2\sqrt{2}$$

$$\boxed{\frac{b}{a}=8}$$

תשובה: היחס המבוקש הוא $\frac{b}{a}=8$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=e^{(bx^2-2bx)}-1$, המוגדרת לכל x ($b<0$ פרמטר).

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$, ולכן $f(0)=e^0-1=1-1=0$ ונקודת החיתוך היא $\boxed{(0,0)}$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$.

$$e^{(bx^2-2bx)}-1=0$$
$$e^{(bx^2-2bx)}=1$$
$$bx^2-2bx=0$$
$$bx(x-2)=0$$
$$x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$$
$$x=2 \quad \rightarrow \boxed{(2,0)}$$

תשובה: נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים הן $(2,0)$ ו- $(0,0)$.

(2) נמצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x .

הסבר, למרות שלא נדרש בבגרות !!!

bx^2-2bx היא פרבולה הפוכה, כי $b<0$, ולכן כאשר $x\to\pm\infty$ אז הפרבולה שואפת ל $-\infty$,

ולכן $e^{(bx^2-2bx)}-1\to 0-1=-1$, ומקבלים ש- $y=-1$ אסימפטוטה אופקית לשני הצדדים.

תשובה: $y=-1$ $(x\to\pm\infty)$.

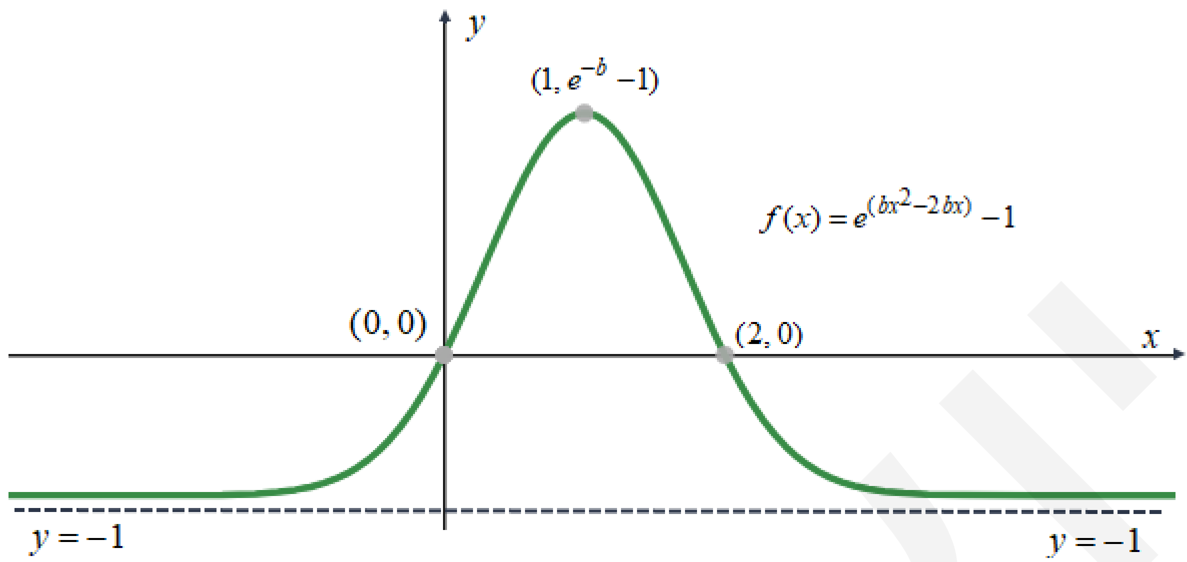
(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגן.

$$\boxed{f(x)=e^{(bx^2-2bx)}-1}$$
$$\boxed{f'(x)=(2bx-2b)e^{(bx^2-2bx)}}$$
$$2bx-2b=0 \quad /:2b<0$$
$$x-1=0$$
$$x=1 \quad \rightarrow \boxed{(1,e^{-b}-1)}$$

לפי השיעור החיובי של הנקודה החשודה כקיצון ונקודות החיתוך עם ציר ה- x - זוהי נקודת מקסימום.

תשובה: $(1,e^{-b}-1)$, מקסימום.

(4) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x+a)$, (a פרמטר), שהיא הזזה אופקית של $f(x)$.

(1) נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון על ציר ה- y , לכן ההזזה היא יחידה אחת שמאלה, ו- $a=+1$,
כאשר $g(x)=f(x+1)$.

$$g(x)=f(x+1)$$

$$g(x)=e^{(b(x+1)^2-2b(x+1))}-1$$

$$g(x)=e^{(bx^2+2bx+b-2bx-2b)}-1$$

$$\boxed{g(x)=e^{(bx^2-b)}-1}$$

תשובה: $a=1$, $g(x)=e^{(bx^2-b)}-1$.

(2) נבדוק את זוגיות הפונקציה $g(x)$.

$$g(-x)=e^{(b\cdot(-x)^2-b)}-1$$

$$g(-x)=e^{(bx^2-b)}-1 .$$

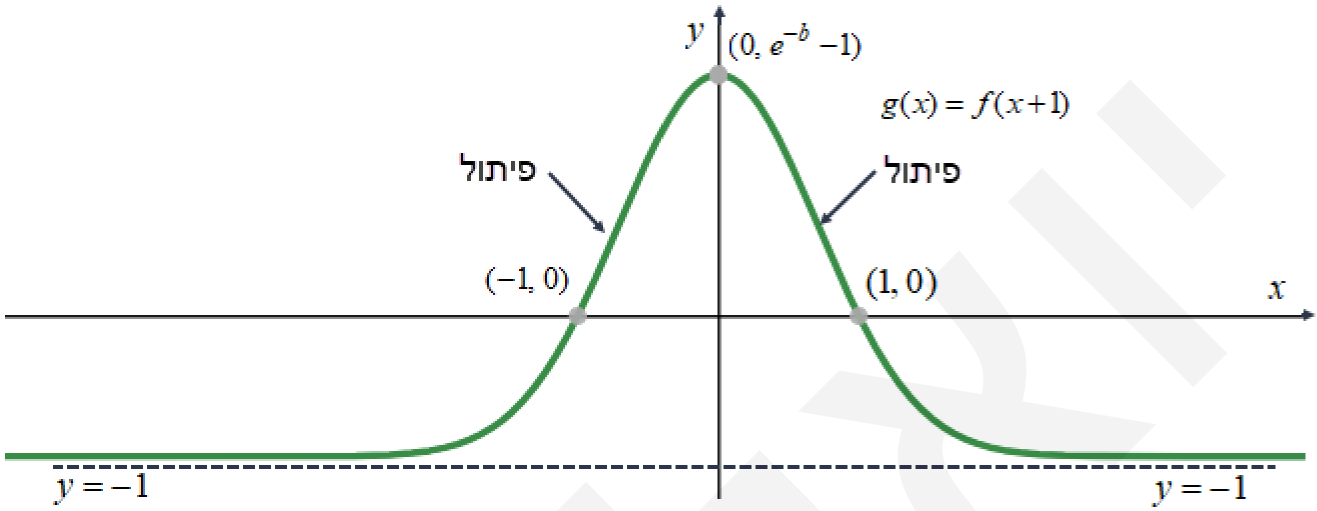
$$\boxed{g(-x)=g(x)}$$

ולכן, הפונקציה זוגית, סימטרית לציר ה- y ועם נקודת קיצון על ציר זה.

תשובה: $g(x)$ היא פונקציה זוגית.

ב. נצייר את גרף הפונקציה $g(x)=f(x+1)$.

- **שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-x זזו שמאלה, והן $(1,0)$ ו- $(-1,0)$.**
- **נקודת חיתוך עם ציר ה- y $(0,e^{-b}-1)$, מקסימום.**
- **אין שינוי באסימפטוטה האופקית, נשארת $y=-1$.**



תשובה: השרטוט מעל.

ג. נמצא את שיעור ה- x של כל אחת מנקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $g'(x)$ ונקבע את סוגן.

למעשה, אלו שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של $g(x)$, שעל פי הגרף המשורטט (מסומנות בחיצים), עוברת מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה משמאל לציר ה- y,

ולכן $g'(x)$ עוברת מעלייה לירידה ונקבל מקסימום. כאשר מימין לציר ה- y נקבל מינימום של $g'(x)$.

$$\boxed{g(x)=e^{(bx^2-b)}-1}$$

$$\boxed{g'(x)=2bxe^{(bx^2-b)}}$$

$$g''(x)=2b(e^{(bx^2-b)}+x\cdot 2bxe^{(bx^2-b)})$$

$$\boxed{g''(x)=2b\cdot e^{(bx^2-b)}(1+2bx^2)}$$

$$1+2bx^2=0$$

$$x^2=-\frac{1}{2b}$$

$$\boxed{x=\sqrt{-\frac{1}{2b}},\min}$$

$$\boxed{x=-\sqrt{-\frac{1}{2b}},\max}$$

תשובה: $x=\sqrt{-\frac{1}{2b}}$ מינימום, $x=-\sqrt{-\frac{1}{2b}}$ מקסימום.

ד. נציב $b=-0.5$ **, ומכאן ש-** $g(x)=e^{(-0.5x^2+0.5)}-1$ **,** $g'(x)=-xe^{(-0.5x^2+0.5)}$ **,**

ושיעורי ה- x **של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת הן** $x=1$ **ו-** $x=-1$ **, מספרים נגדיים זה לזה.**

כיוון ש- $g'(x)=-xe^{(-0.5x^2+0.5)}$ **היא פונקציה אי-זוגית, העוברת בראשית הצירים וסימטרית לראשית,**

די לחשב את השטח שמימין לציר ה- y **ולכפול פי** 2 **.**

כיוון ש- $g(x)$ **יורדת עבור** $x>0$ **, אז** $g'(x)<0$ **והשטח הוא מתחת לציר ה-** x**.**

$$S_1=\int_0^1 (0-g'(x))\,dx$$

$$S_1=-g(x)\Big]_0^1$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1: \quad -g(1)=-(e^{(-0.5+0.5)}-1)=0 \\ x=0: \quad -g(0)=-(e^{0.5}-1)=-\sqrt{e}+1 \end{array}\right\} S_1=0+\sqrt{e}-1 \quad \rightarrow \boxed{S_1=\sqrt{e}-1}$$

$$S=2S_1=2(\sqrt{e}-1)\approx 1.2974 \quad \rightarrow \boxed{S=2(\sqrt{e}-1)\approx 1.2974}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $2(\sqrt{e}-1)\approx 1.2974$ **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=ax^2-x^3$ ($a>0$ **, לסעיפים א-ג, הוא פרמטר).**

(1) נמצא תחומי חיוביות ושליליות של הפונקציה $f(x)$ **.**

עבור $x=0$ **מתקיים** $f(x)=0$ **.**

$$ax^2-x^3>0 \quad /:x^2>0$$
$$a-x>0$$
$$x<a$$

תשובה: הפונקציה חיובית עבור $x<a,\ x\neq 0$ **, ושלילית עבור** $x>a$ **.**

(2) נקודות האפס של הפונקציה $f(x)$ **הן** $(a,0)$ **ו-** $(0,0)$**.**

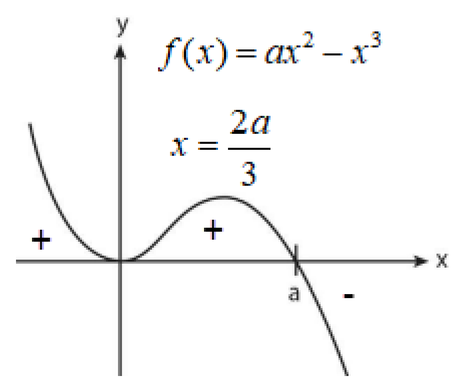
נצייר סקיצה אפשרית, בהסתמך על תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה,

כאשר ניתן גם לראות ש- $f'(x)=2ax-3x^2$ **ונקבל שתי נקודות קיצון עבור** $x=\frac{2a}{3}$ **ו-** $x=0$ **.**

הסבר חלופי: פונקציה ממעלה שלישית, עם מקדם שלילי לאיבר שבחזקה שלישית,

יורדת לכל x **, או עם מינימום מקסימום משמאל לימין,**

כאשר בראשית יש מינימום על פי תחומי החיוביות, בפונקציה הנתונה.



תשובה: הפונקציה חיובית עבור $x<a,\ x\neq 0$ **, ושלילית עבור** $x>a$ **.**

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=(\ell n\ f(x))$ **.**

(1) פונקציית ה- ℓn **מקבלת רק ביטויים חיוביים, בהתאם לחיוביות** $f(x)$ **על פי סעיף א.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x<a,\ x\neq 0$ **.**

(2) כאשר $f(x)\to 0$ **אז** $(\ell n\ f(x))\to -\infty$ **ונקבל שתי אסימפטוטות אנכיות.**

תשובה: $x=a$ **ו-** $x=0$ **הן שתי האסימפטוטות המאונכות לציר ה-** x **.**

(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ונקבע את סוגה.

$$\boxed{g(x) = (\ell n\ f(x))}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

<u>**בתחום ההגדרה**</u> $x < a,\ x \neq 0$ **: סימני הנגזרת ללא שינוי (מכנה חיובי),**

ותחומי עלייה וירידה של $g(x)$ זהים לאלו של $f(x)$: עלייה $0 < x < \frac{2a}{3}$ **, ירידה** $\frac{2a}{3} < x < a$ **או** $x < 0$ **.**

לכן, $x = \frac{2a}{3}$ **מקסימום (** $x = 0$ **לא בתחום ההגדרה).**

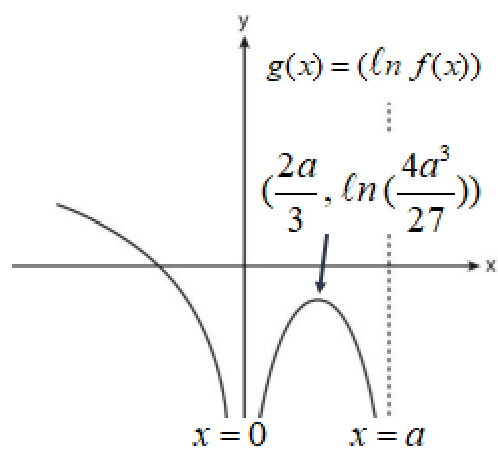
$$f(\frac{2a}{3}) = a \cdot (\frac{2a}{3})^2 - (\frac{2a}{3})^3 = a \cdot \frac{4a^2}{9} - \frac{8a^3}{27} = \frac{4a^3}{27}$$

$$g(\frac{2a}{3}) = (\ell n\ f(\frac{2a}{3})) \quad \rightarrow \boxed{(\frac{2a}{3}, \ell n\,(\frac{4a^3}{27})), \max}$$

תשובה: $(\frac{2a}{3}, \ell n\,(\frac{4a^3}{27}))$ **, מקסימום.**

ג. נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- x **.**

(1) על פי תחומי העלייה והירידה, נקודת חיתוך יחידה זו תהייה עבור $x < 0$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל.

(2) $g(x) = 0$ **רק בנקודה אחת אם** $\ell n\,(\frac{4a^3}{27}) < 0$**.**

$$\ell n\,(\frac{4a^3}{27}) < 0 \quad \rightarrow \frac{4a^3}{27} < 1 \quad \rightarrow a^3 < 6.75 \quad \rightarrow \boxed{0 < a < \sqrt[3]{6.75} \approx 1.89}$$

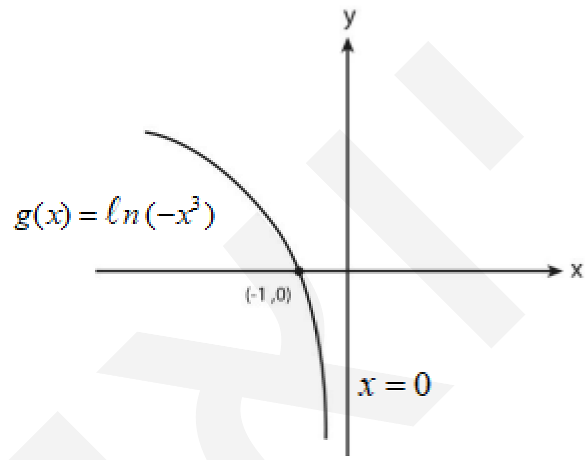
תשובה: עבור $0 < a < \sqrt[3]{6.75} \approx 1.89$ **גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה-** x **בנקודה אחת בלבד.**

ד. עבור $a=0$ **מתקיים** $g(x)=\ell n\left(-x^3\right)$ **, שמוגדרת בתחום** $x<0$ **.**

$x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **, לכן** $\ell n\left(-x^3\right)=0 \quad \rightarrow -x^3=1 \quad \rightarrow x=-1 \quad \rightarrow \boxed{(-1,0)}$ **.**

$g'(x)=\dfrac{-3x^2}{-x^3}=\dfrac{3}{x}<0$ **, והפונקציה יורדת בתחום** $x<0$ **ועולה לאף** x **.**



תשובה: הסרטוט מעל.