

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
 - שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון: נקודה K נמצאת על הפרבולה $y^2 = 4px$ ($p > 0$).

שיעור ה- y של נקודה K הוא 12.

המרחק בין נקודה K ובין מוקד הפרבולה הוא 20.

א. מצא את p (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הערכים של p שמצאת בסעיף א ב- p_1 ו- p_2 . $p_1 < p_2$.

ישר מן הצורה $y = mx$ ($m \neq 0$) חותך את הפרבולה $y^2 = 4p_1x$ בראשית הצירים ונקודה נוספת, A ,

ואת הפרבולה $y^2 = 4p_2x$ בראשית הצירים ונקודה נוספת, B .

הצב את הערכים p_1 ו- p_2 שמצאת, וענה על סעיפים ב-ג.

ב. הבע את שיעורי נקודה A , ואת שיעורי נקודה B באמצעות m .

בעבור כל ישר $y = mx$ ($m \neq 0$), נסמן ב- M את אמצע הקטע AB הנוצר באופן המתואר.

ג. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות M האלה (ללא m).

2. נתונה התיבה $ABCD A' B' C' D'$.

הנקודה K נמצאת על המקצוע CC' .

הנקודה E היא אמצע המקצוע $A'D'$ (ראה סרטוט).

נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$; $\vec{AD} = \underline{v}$; $\vec{AB} = \underline{u}$; $\vec{CK} = t \cdot \vec{CC'}$ ($t > 0$ הוא סקלר).

נתון: $|\underline{u}| = 3\sqrt{2}$; $|\underline{v}| = 6$; $|\underline{w}| = 6\sqrt{2}$

. $\angle EKB = 90^\circ$

א. מצא את t .

נסמן ב- π את המישור $CDA'B'$.

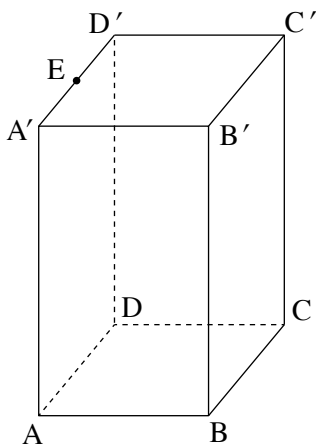
ב. (1) הוכח כי הישר BK מאונך למישור π .

(2) הסבר מדוע הישר EK מקביל למישור π .

נתון: $B(-1, 0, 1)$; $K(4, 5, -1)$,

. $\underline{w} = (2, 2, -8)$

ג. מצא את משוואת המישור π .



3. א. פתור את המשוואה: $z^2 - (1+i)z + 2i + 2 = 0$.

אחד הפתרונות של המשוואה שפתרת נמצא ברביע הרביעי והוא מיוצג על ידי הנקודה A במישור גאוס.

הפתרון השני מיוצג על ידי הנקודה B במישור גאוס.

דרך הנקודה B עובר מעגל שמרכזו בראשית הצירים O . הישר AO חותך את המעגל בנקודות C ו- D .

במעגל חסום מצולע משוכלל בעל n צלעות.

נתון כי הנקודות D, C, B הן קודקודים של המצולע.

ב. מהו ה- n האפשרי הקטן ביותר? נמק את תשובתך.

ג. בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב:

(1) רשום את המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

(2) כתוב משוואה שפתרונותיה הם כל המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת וגזירה לכל x . הגרף שלה חותך את ציר ה- x בראשית הצירים בלבד. נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הן $(1, 1)$ ו- $(-1, -1)$ בלבד. הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ מתאפסת בעבור $x = 1$ ו- $x = -1$ בלבד. ציר ה- x הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $g(x)$ בעבור x שואף לאינסוף ובעבור x שואף למינוס אינסוף.
- א. (1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.
- (2) רשום את תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$ (פונקציית הנגזרת של $g(x)$).
- נתונה הפונקציה $f(x) = e^{g(x)} - g(x)$.
- ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.
- (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
- (4) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.
5. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = ax - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$, $a \neq 0$, הוא פרמטר. ענה על סעיפים א-ג בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$.
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה. נתון כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בשתי נקודות שונות.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה $g(x) = f'(x)$ (נגזרת הפונקציה $f(x)$) המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$. נתון: $a > 0$.
- ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x = \frac{2}{a}$ וציר ה- x , והוכח כי השטח אינו תלוי ב- a .

בהצלחה!