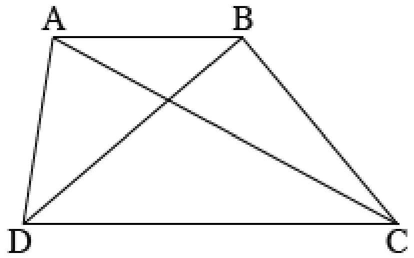
שאלון 35571 מועד
חורף תשפ"ב

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35571 מועד חורף תשפ"ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.



נתונים

.1 $ABCD$ **טרפז . .2** $AB \parallel DC$.

.3 $S_{\Delta ADC} = 24$ **. .4** $S_{\Delta ADB} = 12$

צ"ל: (1) $\frac{DC}{AB}$ **(2)** S_{ABCD}

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1, 2	5	$\frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta ADB}} = \frac{DC \cdot h \cdot 0.5}{AB \cdot h \cdot 0.5}$	לבסיסי הטרפז יש גובה משותף, שהוא המרחק הקבוע בין בסיסי הטרפז, המקבילים זה לזה
3, 4, 5	6	$\frac{24}{12} = \frac{DC}{AB}$	
6	7	$\frac{DC}{AB} = \frac{2}{1}$	
		מ.ש.ל. (1)	
2, 4	8	$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} = 12$	מרחקים שווים בין ישרים מקבילים, לצלע משותפת
	9	$S_{ABCD} = S_{\Delta ADC} + S_{\Delta ABC}$	סכום שטחים
9	10	$S_{ABCD} = 24 + 12$	
10	11	$S_{ABCD} = 36$	

1ב

(1) נוכיח שהטענה $(1+\frac{1}{1})\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot...\cdot(1+\frac{1}{n})=n+1$**, נכונה לכל** n **טבעי.**

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $1+1=2$ **אגף שמאל:** $1+\frac{1}{1}=2$

קבלנו שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $(1+\frac{1}{1})\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot...\cdot(1+\frac{1}{k})=k+1$.

ונוכיח שטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל:**

$$\Leftrightarrow \underbrace{(1+\frac{1}{1})\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot...\cdot(1+\frac{1}{k})}_{\downarrow}\cdot(1+\frac{1}{k+1})=k+1+1$$

$$\Leftrightarrow \qquad (k+1) \qquad \cdot\frac{k+1+1}{(k+1)}=k+2$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \cancel{(k+1)}\cdot\frac{k+2}{\cancel{(k+1)}}=k+2$$

$$\Leftrightarrow k+2=k+2$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי אקסיומת האינדוקציה, טענה I **נכונה לכל** n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו שהטענה $(1+\frac{1}{1})\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot...\cdot(1+\frac{1}{n})=n+1$**, נכונה לכל** n **טבעי.**

(2) נחשב את המכפלה $(1+\frac{1}{1})\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot(1+\frac{1}{4})\cdot(1+\frac{1}{5})\cdot...\cdot(1+\frac{1}{99})$.

נשים לב, שבהשוואה לטענה שהוכחנו בסעיף (1), חסר הגורם השמאלי במכפלה, שערכו $1+\frac{1}{1}=2$.

על פי הטענה שהוכחנו בסעיף (1), נקבל את ערך המכפלה עבור $n=99$.

$$(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot(1+\frac{1}{4})\cdot(1+\frac{1}{5})\cdot...\cdot(1+\frac{1}{99})=$$

$$\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{1})\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot(1+\frac{1}{4})\cdot(1+\frac{1}{5})\cdot...\cdot(1+\frac{1}{99})=$$

$$\frac{1}{2}\cdot(99+1)=\frac{1}{2}\cdot100=50$$

תשובה: $(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot(1+\frac{1}{4})\cdot(1+\frac{1}{5})\cdot...\cdot(1+\frac{1}{99})=50$.

נוכיח, בדרך אחרת, את הטענה שבסעיף (1).

נוכיח, שהטענה $(1+\frac{1}{1})\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n})=n+1$**, נכונה לכל** n **טבעי.**

$$(1+\frac{1}{1})\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n})=n+1$$

$$\Leftrightarrow(\frac{1+1}{1})\cdot(\frac{2+1}{2})\cdot(\frac{3+1}{3})\cdot\ldots\cdot(\frac{n-1+1}{n-1})\cdot(\frac{n+1}{n})=n+1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{n}}{n-1}\cdot\frac{n+1}{\cancel{n}}=n+1$$

$$\Leftrightarrow n+1=n+1$$

תשובה: הוכחנו שהטענה $(1+\frac{1}{1})\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n})=n+1$**, נכונה לכל** n **טבעי.**

בגרות פב ינואר 22 מועד חורף שאלון 35571

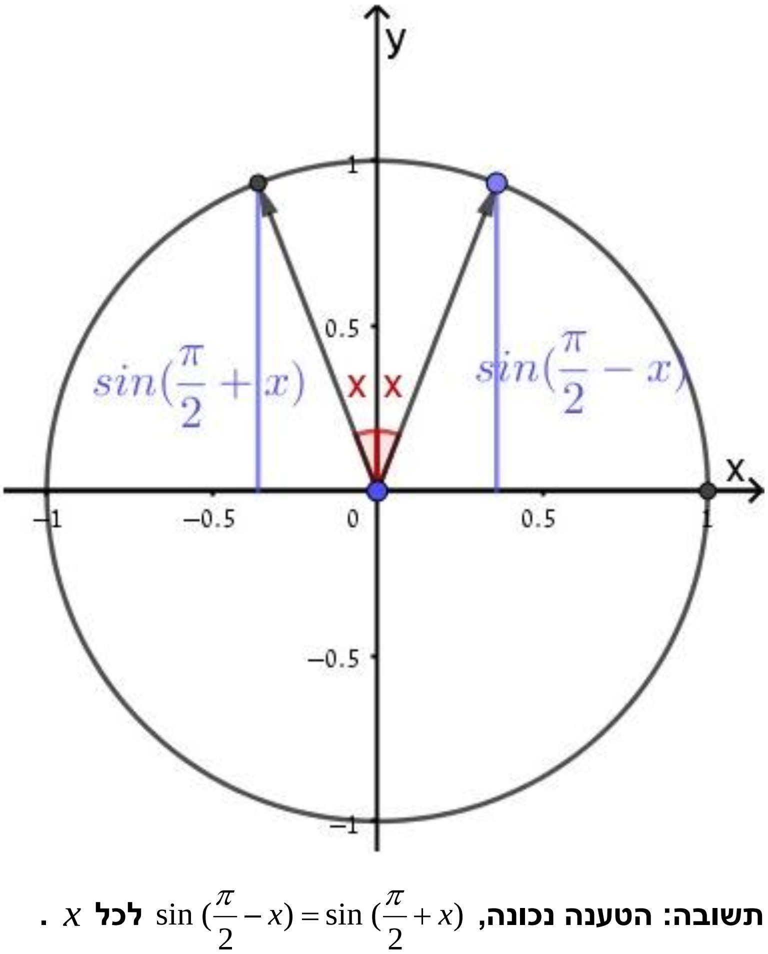
(1) נבדוק האם הטענה $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ **, נכונה לכל** x .

$$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(\frac{\pi}{2}+x)$$
$$\Leftrightarrow \cos(x)=\cos(x) \quad o.k.$$

הסבר נוסף, למעבר המיידי באגף ימין: $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\sin\left[\pi-(\frac{\pi}{2}+x)\right]=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$

ניתן לראות זאת גם באיור של מעגל היחידה,

כאשר שיעור ה- y **של הנקודה מסמן את ערך סינוס הזווית המתאימה. (תודה לדוד צחור)**



תשובה: הטענה נכונה, $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ **לכל** x .

(2) נבדוק האם הטענה $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$**, נכונה לכל** x .

$$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$$
$$\Leftrightarrow \cos(x)=-\sin(\frac{\pi}{2}-x).$$
$$\Leftrightarrow \cos(x)=-\cos(x) \quad \textit{not o.k.}$$

הסבר נוסף, למעבר באגף ימין: $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ **(פונקציית ה-** $\sin$ **היא פונקציה אי זוגית).**

דרך נוספת, להראות שהטענה אינה נכונה לכל x **, היא על ידי דוגמה נגדית.**

דוגמא: $x=\frac{\pi}{3}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

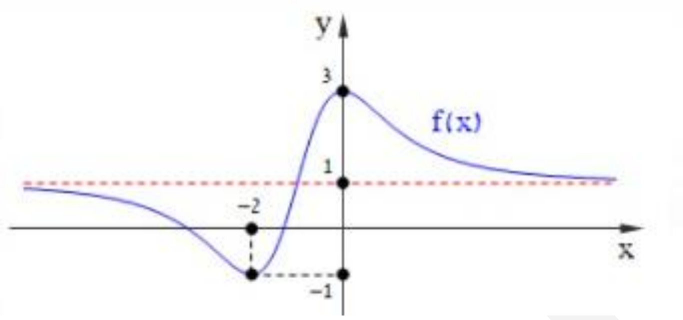
וקבלנו ש- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\neq\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$**.**

דרך שלישית, היא פשוט על פי אי-הזוגיות של פונקציית הסינוס,

וממנה מתקבל ישירות ש- $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=-\sin(x-\frac{\pi}{2})$

תשובה: הטענה אינה נכונה, $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ **אינו נכון לכל** x .

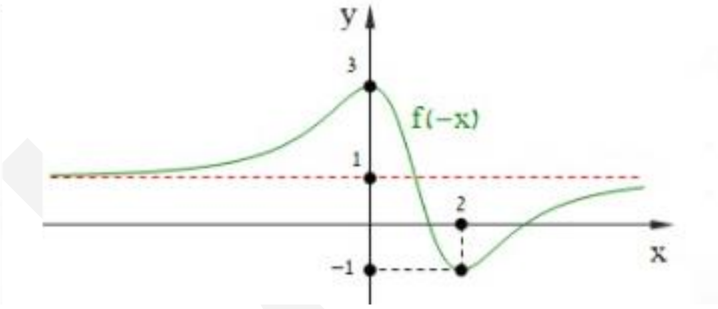
(1) $f(x)$ **, מוגדרת לכל** x **, ובהתאם הגרף שלה רציף כמתואר בסרטוט.**

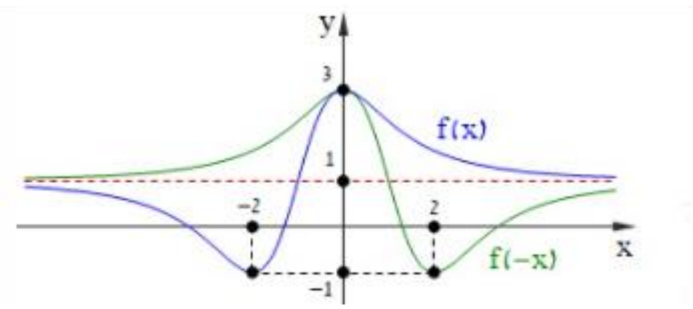


$g(x)=f(-x)+1$ **, מוגדרת אף היא לכל** x **.**

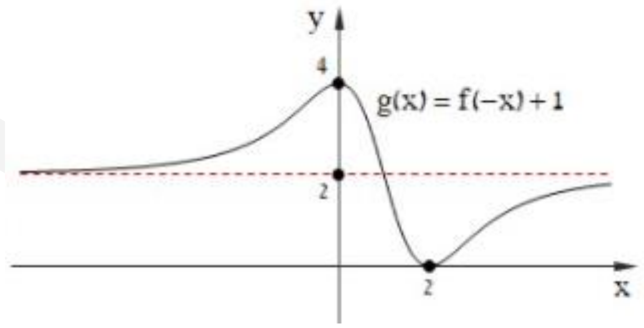
יש כאן שתי טרנספורמציות. (תודה לסרור אסעד)

הגרף של $f(-x)$ **סימטרי לגרף של** $f(x)$ **, כאשר ציר ה-** y **הוא ציר הסימטריה, כמו פונקציה זוגית.**





$f(-x)+1$ **היא תזוזה נוספת אנכית,** 1 **יחידה כלפי מעלה.**



כיוון ש- $y=1$ **הוא אסימפטוטה אופקית של הגרף של** $f(x)$ **, עבור** $x\to\pm\infty$ **,**

הרי שלאחר השיקוף סביב ציר ה- y **היא נשארת ללא שינוי,**

ולאחר הזזה 1 **יחידה כלפי מעלה, זזה כלפי מעלה גם האסימפטוטה האופקית והיא** $y=2$ **.**

תשובה: משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$ **היא** $y=2$ **.**

(2) לאחר השיקוף סביב ציר ה- y **אין שינוי בסוג נקודות הקיצון, ובערכי ה-** y **שלהן,**

כאשר ערכי ה- x **מחליפים סימן (עבור** $x\neq 0$ **).**

נקבל שנקודות הקיצון של $f(-x)$ **הן:** $(0,3)$ **מקסימום, ו-** $(2,-1)$ **מינימום.**

לאחר התזוזה האנכית, 1 **יחידה כלפי מעלה,**

נקבל, שנקודות הקיצון של $g(x)=f(-x)+1$ **הן:** $(0,4)$ **מקסימום, ו-** $(2,0)$ **מינימום.**

תשובה: שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ **הם** $(0,4)$ **מקסימום, ו-** $(2,0)$ **מינימום.**

א. נתונה סדרה חשבונית A עולה (ולכן $d>0$), שסכומה S_n .

נתונה סדרה חשבונית נוספת B, שמקיימת $b_n = S_{n+1} - S_n$, ומכאן ש- $b_n = a_{n+1}$.

(1) נוכיח שהסדרה b_n חשבונית.

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$
$$b_{n+1} - b_n = d$$

ולכן, B חשבונית, והפרשה זהה להפרש הסדרה A .

תשובה: הסדרה B חשבונית.

(2) הסדרה B אינה זהה לסדרה A , שכן: $b_1 = a_2 \,, b_2 = a_3 \,, b_3 = a_4$ וכן הלאה, תמיד בפיגור של איבר.

תשובה: הסדרה B אינה זהה לסדרה A .

ב. מסמנים ב- T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B.

$$\mathrm{T}_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ... + b_{n-1} + b_n$$
$$\mathrm{T}_n = \frac{-d}{-d} \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ... + b_{n-1} + b_n)$$
$$\mathrm{T}_n = \frac{(b_1 + b_2)\cdot(-d) + (b_3 + b_4)\cdot(-d) + ... + (b_{n-1} + b_n)\cdot(-d)}{-d}$$

המעבר האחרון, של החלוקה לזוגות, התאפשר כי נתון ש- n טבעי <u>זוגי</u>.

$$\boxed{\mathrm{T}_n = \frac{(b_1 + b_2)\cdot(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)\cdot(b_3 - b_4) + ... + (b_{n-1} + b_n)\cdot(b_{n-1} - b_n)}{-d}}$$

המעבר האחרון התבסס על העובדה ש- $b_{n-1} - b_n = -d$, לכל $n \geq 2$ טבעי.

הערה: ניתן היה להוכיח, בדומה לזהויות ולאינדוקציה, מהסוף להתחלה.

תשובה: הוכחנו, כי הנוסחה מתקיימת לכל n טבעי זוגי.

ב. נתון: (1) $b_1^2-b_2^2+b_3^2-b_4^2+.....+b_{39}^2-b_{40}^2=-95$ **, וגם (2)** $\mathrm{T}_5=-20$.

(1) על פי הנוסחה, שהוכחנו בסעיף ב (כאשר $n=40$ **טבעי זוגי), ונוסחת כפל מקוצר,**

נקבל: $\mathrm{T}_{40}\cdot(-d)=-95$.

$$\frac{40\cdot\left[2\cdot b_1+d(40-1)\right]}{2}\cdot(-d)=-95$$

$$\underline{-20d(2\cdot b_1+39d)=-95}$$

(2) $\mathrm{T}_5=-20$ **, כאשר הפעם** n **אי-זוגי, ולא ניתן להשתמש בנוסחה, שהוכחנו בסעיף ב.**

$$\frac{5\cdot\left[2\cdot b_1+d(5-1)\right]}{2}=-20$$

$$2b_1+4d=-8$$

$$\underline{b_1=-4-2d}$$

נציב ב- (1) את $b_1=-4-2d$.

$$-20d\left[2\cdot(-4-2d)+39d\right]=-95$$

$$-20d(-8+35d)=-95$$

$$-700d^2+160d+95=0$$

$$\boxed{d=0.5}\quad o.k.\quad \leftarrow d>0$$

$$\cancel{d=-\frac{19}{70}}$$

$$b_1=-4-2\cdot0.5=-5\quad\rightarrow\boxed{b_1=-5}$$

תשובה: $b_1=-5$ **,** $d=0.5$.

ג. בסדרה A **מחברים** n **איברים, הנמצאים במקומות אי-זוגיים, החל מהאיבר הראשון .**

$b_1=-5$, $d=0.5$ **ולכן** $a_2=b_1=-5$ **, ומכאן ש-** $a_1=a_2-d=-5-0.5=-5.5$ **.**

סדרת המקומות האי-זוגיים.

A_1	$a_1=-5.5$
D	$a_{n+2}-a_n=a_n+2d-a_n=2d=2\cdot 0.5=1$
N	**לא ידוע**

נדרש שהסכום יהייה שלם וחיובי, לכן מספר האיברים חייב להיות זוגי,

כי כל איבר זוגי בסדרה A **הוא שלם.**

$$S_n>0$$

$$\frac{n\cdot\left[2\cdot(-5.5)+1\cdot(n-1)\right]}{2}>0 \quad /:\frac{n}{2}>0$$

$$-11+n-1>0$$

$$n>12 \quad \rightarrow n=14 \quad \leftarrow n \text{ is even}$$

תשובה: המספר המינימלי של איברים, שיש לחבר באופן זה,

כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי ושלם, הוא 14 **.**

א. בקופסה יש 3 סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה.

כאשר מוציאים סוכריה בטעם מנטה, מחזירים אותה לקופסה, וההסתברויות לא משתנות.

כאשר מוציאים סוכריה בטעם תות, אוכלים אותה ולא מחזירים אותה לקופסה, וההסתברויות משתנות.

ליאור מוציא מן הקופסה 3 סוכריות הזו אחר זו, באופן שתואר כאן.

(1) ליאור יאכל בדיוק סוכריה אחת, אם הוציא סוכריה בטעם תות פעם אחת בלבד.

ת מ מ   מ ת מ   מ מ ת

$$p=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=0.366$$

תשובה: ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכריה אחת היא 0.366 .

(2) נחשב את ההסתברות (המותנית) שליאור אכל את הסוכריה השנייה, אם ידוע כי אכל בדיוק סוכריה אחת.

$$\mathrm{P}(2nd\ /\ just\ one)=\frac{\mathrm{P}(2nd\cap just\ one)}{\mathrm{P}(just\ one)}$$

$$\mathrm{P}(2nd\ /\ just\ one)==\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}}{0.366}=\frac{0.12}{0.366}=\frac{20}{61}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{20}{61}$.

ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו, באופן המתואר בתחילת השאלה.

המאורע שליאור יאכל לפחות סוכריה אחת לפחות, הוא המאורע המשלים להוצאת n סוכריות מנטה,

כי במקרה זה לא יאכל אף סוכריה.

תשובה: ההסתברות שליאור יאכל סוכריה אחת לפחות היא $1-(\frac{2}{5})^n$.

ג. ליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, מאותה קופסה, בשני מצבים זהים.

אם יאכל שלוש סוכריות מהקופסה מהראשונה ואפס מהשנייה ולהיפך,

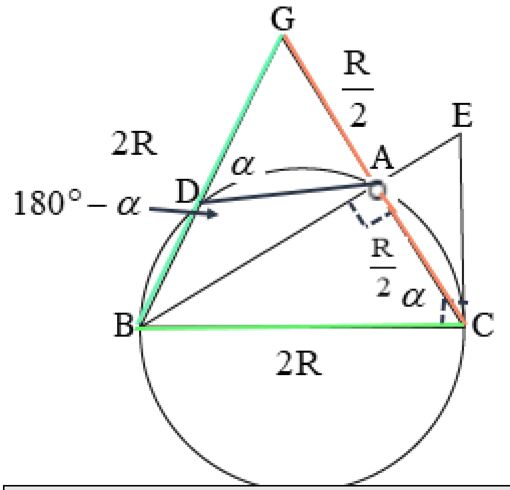
אשר ההסתברויות שוות כי הקופסאות זהות.

ההסתברויות, להוצאה מהקופסה שממנה אכל, משתנות כמובן מהוצאה להוצאה.

שלוש מנטה   ת ת ת

$$p=2\cdot\quad\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\quad\cdot\quad(\frac{2}{5})^3=\frac{8}{625}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{8}{625}$.



בגרות פב ינואר 22 מועד חורף שאלון 35571

נתונים

1. R **רדיוס המעגל.** **2.** BC **קוטר במעגל.**

3. $GA = AC$ **. עבור ג. 4.** $\frac{S_{DBCA}}{S_{\Delta GAD}} = 15$.

עבור ד. 5. EC **משיק למעגל בנקודה** C.

צ"ל: א. $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBA$ **ב.** $\Delta GBC \sim \Delta GAD$

ג. AC **ד.** $\frac{S_{\Delta CBE}}{S_{\Delta ABC}}$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
2	6	$\sphericalangle BAC = 90°$	זווית היקפית הנשענת על הקוטר היא ישרה
3,6	7	ΔGBC שווה שוקיים $GB = CB$	אם הגובה AB מתלכד עם התיכון, אז המשולש שווה שוקיים
7 ,6	8	$\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBA$	הגובה לבסיס במש"ש ΔGBC מתלכד עם חוצה זווית הראש
		מ.ש.ל. א	
	9	$\sphericalangle GBA = \alpha$	סימון
9 ,7	10	$\sphericalangle ADB = 180° - \alpha$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
10	11	$\sphericalangle GCB = \alpha$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל $180°$
11 ,9	12	$\sphericalangle GCB = \sphericalangle GDA$	כלל המעבר
	13	$\sphericalangle BGC = \sphericalangle AGD$	זווית משותפת
13 ,12	14	$\Delta GBC \sim \Delta GAD$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. ב	
14	15	$\frac{GB}{GA} = \frac{GC}{GD} = \frac{BC}{AD}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
4	16	$\left.\begin{array}{l} S_{DCBA} = 15s \\ S_{\Delta GAD} = s \end{array}\right\} \frac{S_{\Delta GBC}}{S_{\Delta GAD}} = \frac{16}{1}$	כללי פרופורציה
16 ,15	17	$\frac{GB}{GA} = \frac{GC}{GD} = \frac{BC}{AD} = \frac{4}{1}$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
7 ,3 ,2 ,1	18	$GB = CB = 2R$	
18 ,17	19	$GA = \frac{R}{2}$	חישוב
19 ,3	20	$AC = \frac{R}{2}$	כלל המעבר
		מ.ש.ל. ג	

הסבר	מס'	טענה	נימוק
5 ,2	21	$\sphericalangle ECB = 90^\circ$	המשיק מאונך לקוטר בנקודת ההשקה
21 ,6	22	$\sphericalangle ECB = \sphericalangle BAC$	כלל המעבר
	23	$\sphericalangle CBE = \sphericalangle ABC$	זווית משותפת
23 ,22	24	$\Delta CBE \sim \Delta ABC$	משפט דמיון זווית זווית
20 ,18 ,6	25	$(AB)^2 = (BC)^2 - (AC)^2$ $(AB)^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{15R^2}{4}$ $AB = \frac{R\sqrt{15}}{2}$	משפט פיתגורס ב- ΔABC
25 ,24 ,20	26	$\frac{CB}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{4}{\sqrt{15}}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
26 ,24	27	$\frac{S_{\Delta CBE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{16}{15}$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
מ.ש.ל. ד			

א. AB **הוא קוטר במעגל, ולכן** $\sphericalangle ADB = 90^\circ$ **(זווית היקפית, הנשענת על קוטר, היא ישרה).**

$\sphericalangle EDA = \alpha$ **(נתון)**

$\sphericalangle B = \sphericalangle EDA = \alpha$ **(זווית בין משיק למיתר)**

$\sphericalangle BAD = 90^\circ - \alpha$ **(סכום זוויות ב-** ΔBAD **שווה ל-** 180°)

תשובה: הוכחנו כי $\sphericalangle BAD = 90^\circ - \alpha$.

ב. $ED = FD$ (**נתון**) .

$\sphericalangle E = 90^\circ - 2\alpha$ **(זווית** $\sphericalangle BAD$ **חיצונית ל-** ΔAED **שווה לסכום שתי זוויות פנימיות, שלא צמודות לה)**

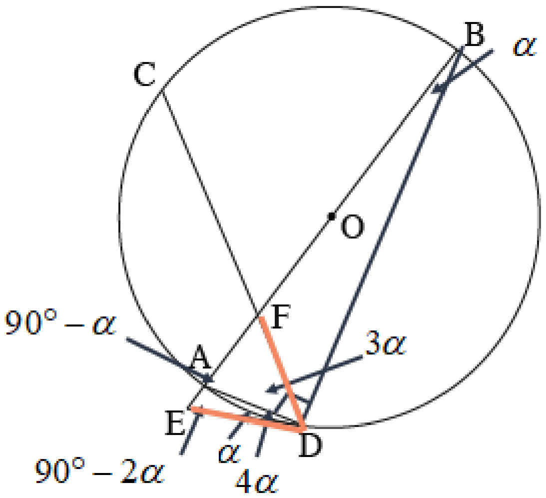
$\sphericalangle EFD = 90^\circ - 2\alpha$ (**מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות** ΔEFD)

$\sphericalangle EDF = 4\alpha$ **(סכום זוויות ב-** ΔEFD **שווה ל-** 180°)

$\sphericalangle CDA = 3\alpha$ **(הפרש זוויות)**

תשובה: $\sphericalangle CDA = 3\alpha$.

ג. $\underline{\Delta EDB}$ **לפי משפט הסינוסים**



$$\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\boxed{AD = 2R\sin\alpha}$$

$$S_{\Delta AFD} = \frac{(AD)^2 \sin(90^\circ - \alpha)\sin 3\alpha}{2\sin(90^\circ - 2\alpha)}$$

$$S_{\Delta AFD} = \frac{4R^2 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin 3\alpha}{2\cos 2\alpha}$$

$$S_{\Delta AFD} = \frac{R^2 \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \sin 3\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\boxed{S_{\Delta AFD} = R^2 \tan 2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \sin 3\alpha}$$

תשובה: שטח המשולש AFD **הוא** $R^2 \tan 2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \sin 3\alpha$.

ד. (1) נביע באמצעות α את היחס $\frac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta AED}}$.

$$\frac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta AED}}=\frac{(AD)^2\sin\sphericalangle FAD\sin3\alpha/2\sin\sphericalangle AFD}{(AD)^2\sin\sphericalangle EAD\sin\alpha/2\sin\sphericalangle DEA}$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta AED}}=\frac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}}$$

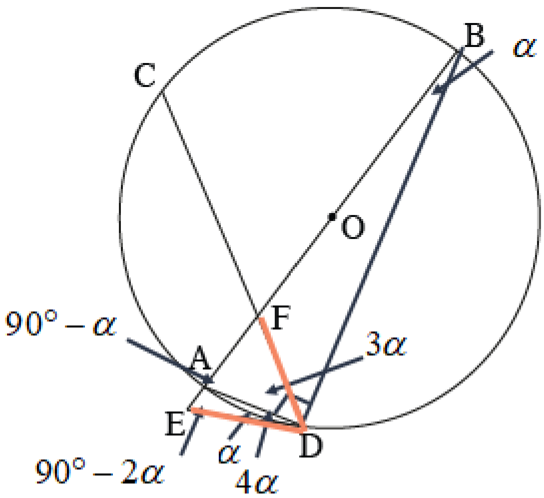
הסבר:

$\sphericalangle AFD=\sphericalangle DEA$ **(זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים)**

$\sin\sphericalangle FAD=\sin\sphericalangle EAD$ **(כי אלו זוויות צמודות שמשלימות ל-** $180°$ **ו-** $\sin x=\sin(180°-x)$ **)**

תשובה: $\frac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta AED}}=\frac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}$.

(2) נתון כי $\frac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta AED}}=1+\sqrt{3}$



$$\frac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}=1+\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin(\alpha+2\alpha)}{\sin\alpha}=1+\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin\alpha\cos2\alpha+\cos\alpha\sin2\alpha}{\sin\alpha}=1+\sqrt{3}$$

$$\frac{\cancel{\sin\alpha}\cos2\alpha+\cos\alpha\cdot2\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}}=1+\sqrt{3}$$

$$2\cos^2\alpha-1+2\cos^2\alpha=1+\sqrt{3}$$

$$4\cos^2\alpha=2+\sqrt{3}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\quad\leftarrow0°<\alpha<90°$$

$$\boxed{\alpha=15°}$$

תשובה: $\alpha=15°$.

דרך נוספת לפתרון סעיף ד.

(1) ללא כל הסתמכות על הביטוי מסעיף ג ובזכות העובדה שמשולש DEF הוא משו"ש והסתמכות על הנוסחה של שטח משולש : מחצית מכפלת שתי צלעות בסינוס הזווית שביניהן.

$$\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}=\frac{0.5\cdot DF\cdot AD\cdot \sin\sphericalangle ADF}{0.5\cdot DE\cdot AD\cdot \sin\sphericalangle ADE}=\frac{\sin(3\alpha)}{\sin(\alpha)}\ .$$

(2)

$$\sin(3\alpha)=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin(2\alpha)\cdot\cos(\alpha)+\cos(2\alpha)\cdot\sin(\alpha)=$$
$$=2\sin(\alpha)\cdot\cos^2(\alpha)+\cos(2\alpha)\cdot\sin(\alpha)=$$
$$=\sin(\alpha)[2\cos^2(\alpha)+\cos(2\alpha)]=\sin(\alpha)[1+\cos(2\alpha)+\cos(2\alpha)]=$$
$$=\underline{\sin(\alpha)[1+2\cos(2\alpha)]}$$

נציב את מה שהתקבל ביחס שהתקבל בתת סעיף ד1 ונקבל:

$$\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}=\frac{\sin(\alpha)[1+2\cos(2\alpha)]}{\sin(\alpha)}=1+2\cos(2\alpha)\ .$$

נתון: $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}=1+\sqrt{3}$ **, ולכן:**

$$1+2\cos(2\alpha)=1+\sqrt{3}$$
$$\cos(2\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$2\alpha=30^{O}\Rightarrow\boxed{\alpha=15^{O}}$$

דרך נוספת לתת סעיף ד2, שהיא מחוץ למיקוד תשפ"ב וגם פחות מסורבלת:

$$\frac{\sin(3\alpha)}{\sin(\alpha)}=1+\sqrt{3}\Rightarrow\sin(3\alpha)=(1+\sqrt{3})\cdot\sin(\alpha)$$
$$\sin(3\alpha)-\sin(\alpha)=\sqrt{3}\cdot\sin(\alpha)\Rightarrow 2\sin(\alpha)\cdot\cos(2\alpha)=\sqrt{3}\cdot\sin(\alpha)/:\sin(\alpha)>0$$
$$\cos(2\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2\alpha=30^{O}=\boxed{\alpha=15^{O}}$$

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{(x^3-m)^2}$.

(1) בתחום ההגדרה המכנה שונה מ- 0 .

$$(x^3-m)^2\neq 0$$
$$x^3\neq m$$
$$x\neq\sqrt[3]{m}$$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq\sqrt[3]{m}$.

(2) תשובה: $x=\sqrt[3]{m}$, $y=0$ $(x\to\pm\infty)$

ב. $f'(-1)=0$ **כי יש נקודת קיצון ל-** $f(x)$ **בנקודה שבה** $x=-1$.

$$f'(x)=\frac{2x(x^3-m)^2-x^2\cdot 2(x^3-m)\cdot 3x^2}{(x^3-m)^4}$$
$$0=2\cdot(-1)((-1)^3-m)^2-(-1)^2\cdot 2((-1)^3-m)\cdot 3(-1)^2$$
$$0=-2(-1-m)^2-6(-1-m)\quad /:-2(-1-m)>0\quad\leftarrow m>0$$
$$-1-m+3=0$$
$$\boxed{m=2}$$

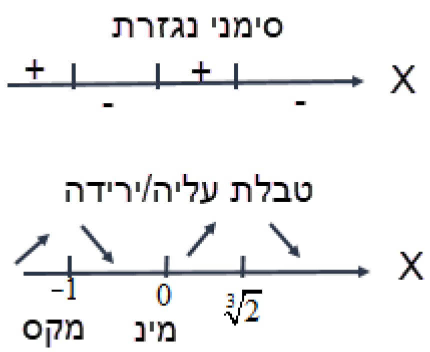
תשובה: $m=2$.

ג. נציב $m=2$ **ונקבל ש-** $f(x)=\frac{x^2}{(x^3-2)^2}$.

נשים לב ש- $f(x)$ **היא אי-שלילית, ולכן** $(0,0)$ **מינימום.**

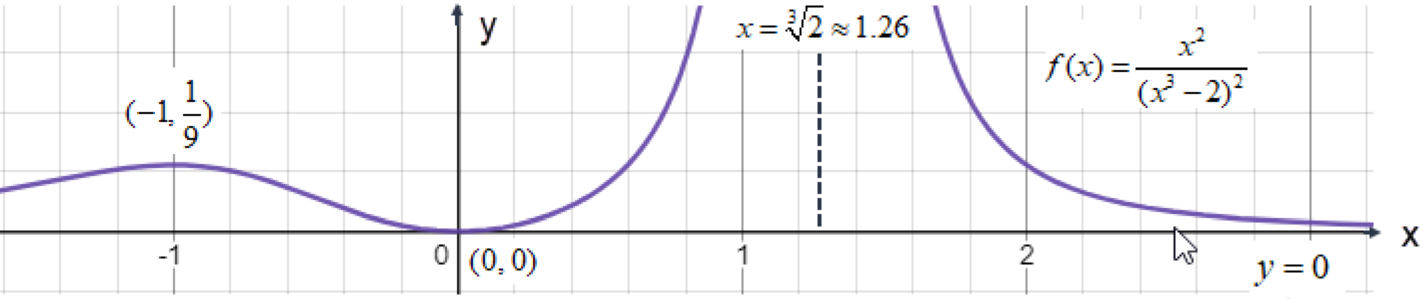
נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגן.**

$$f'(x)=\frac{2x(x^3-2)^2-x^2\cdot 2(x^3-2)\cdot 3x^2}{(x^3-2)^4}$$
$$f'(x)=\frac{2x(x^3-2)\left[x^3-2-3x^3\right]}{(x^3-2)^4}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{4x(x^3-2)\left[-x^3-1\right]}{(x^3-2)^4}}$$
$$0=4x(x^3-2)\left[-x^3-1\right]$$
$$x=0\quad\to(0,0)$$
$$\cancel{x^3-2=0}\quad\leftarrow x\neq\sqrt[3]{2}$$
$$-x^3-1=0\quad\to x=-1\quad\to(-1,\frac{1}{9})$$



תשובה: $(0,0)$ **מינימום ,** $(-1,\frac{1}{9})$ **מקסימום.**

ד. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל.

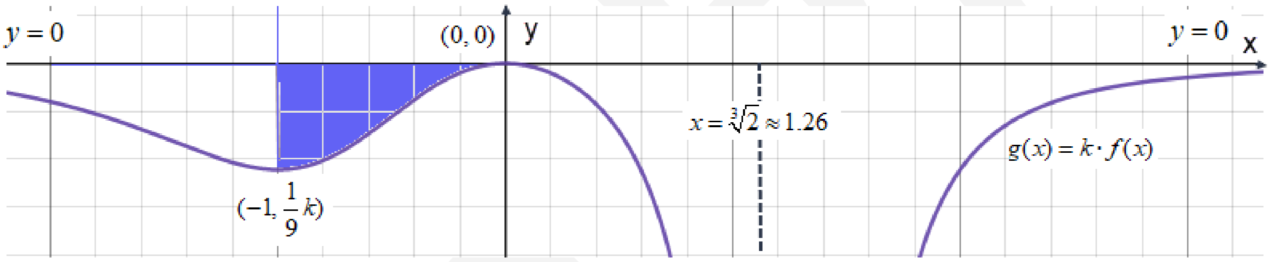
ה. נתונה הפונקציה: $g(x)=k\cdot f(x)$, כאשר $k<0$.

(1) כאשר כופלים את כל שיעורי ה- y פי מספר שלילי:

תחום ההגדרה נשאר ללא שינוי, תחומי חיוביות ושליליות מתהפכים (במקרה הזה $g(x)$ אי חיובית),

תחומי עלייה וירידה מתהפכים ($g'(x)=k\cdot f'(x)$, $k<0$) וסוג הקיצון משתנה כמובן בהתאם.

אין שינוי באסימפטוטה אנכית, והפעם גם אסימפטוטה אופקית ללא שינוי כי היא $y=0$.



תשובה: הסרטוט מעל (כולל סימון שטח עבור תת סעיף ה(2)).

(2) נחשב את השטח המבוקש, הצבוע בכחול, שנתון שגודלו הוא 1.

ניעזר בזיהוי הנגזרת הפנימית.

$$S=\int_{-1}^{0}(0-\frac{kx^2}{(x^3-2)^2})\,dx=\int_{-1}^{0}(-\frac{k}{3}(x^3-2)^{-2}\cdot 3x^2)\,dx$$

$$S=(-\frac{k}{3}\cdot\frac{(x^3-2)^{-1}}{-1})\Big]_{-1}^{0}=(\frac{k}{3}\cdot\frac{1}{x^3-2})\Big]_{-1}^{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0: \quad -\frac{k}{6} \\ x=-1: \quad -\frac{k}{9} \end{array}\right\} S=-\frac{k}{6}-(-\frac{k}{9})=-\frac{k}{18}$$

$$-\frac{k}{18}=1 \quad \rightarrow \boxed{k=-18}$$

תשובה: $k=-18$.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x + 2\cdot\sqrt{x^2-2x}$.

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ- 0 .

$x^2-2x \geq 0$ **, נקבל פרבולה בעלת מינימום, שמתאפסת עבור** $x=0,2$ **, וחיובית מימין ומשמאל.**

תשובה: תחום ההגדרה של $f(x)$ **הוא** $x \geq 2$ **או** $x \leq 0$.

(2) נמצא את תחום ההגדרה של $f'(x)$.

$$f'(x) = 3 + \cancel{2}\cdot\frac{(2x-2)}{\cancel{2}\sqrt{x^2-2x}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3\sqrt{x^2-2x}+2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}}$$

כיוון שהשורש מופיע עכשיו גם במכנה, תחום ההגדרה הוא אי שוויון חזק.

תחום ההגדרה של $f'(x)$ **הוא** $x>2$ **או** $x<0$.

(3) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים של $f'(x)$ **:**

תשובה: אסימפטוטות אופקית: $(x\to+\infty)y=5$ **,** $(x\to-\infty)y=1$.

אסימפטוטות אנכית: $x=0$ **,** $x=2$.

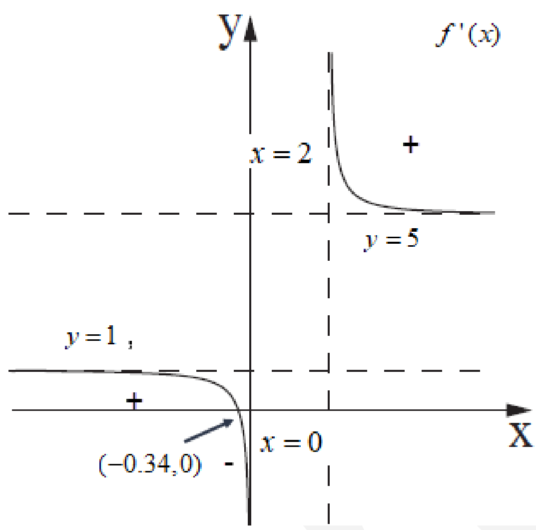
(4) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של $f'(x)$ **עם ציר ה-** x **, בה מתקיים** $f'(x)=0$.

$$3\sqrt{x^2-2x}+2x-2=0$$
$$3\sqrt{x^2-2x}=2-2x \quad \to test:$$
$$(3\sqrt{x^2-2x})^2=(2-2x)^2$$
$$9(x^2-2x)=4-8x+4x^2$$
$$5x^2-10x-4=0$$
$$x=2.34\,? \quad x=-0.34\,?$$
$$test(x=2.34) \quad 3\sqrt{2.34^2-2\cdot2.34}=2-2\cdot2.34 \quad 2.68\neq-2.68 \; not\; o.k.$$
$$test(x=-0.34): \quad 3\sqrt{(-0.34)^2-2\cdot(-0.34)}=2-2\cdot(-0.34) \quad 2.68=2.68\; o.k.$$

תשובה: $(-0.34,0)$.

(5) נשרטט סקיצה של $f'(x)$, כאשר נבדוק תחילה את הסימנים שלה, ועל פי הנתון שאין לה קיצון.

$$f'(-1)>0\,,\ f'(-0.3)<0\,,\ f'(2.1)>0$$



ב. נתונה הפונקציה $f(x)=3x+2\cdot\sqrt{x^2-2x}$.

(1) תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ תואמים לתחומי חיוביות ושליליות של $f'(x)$.

עלייה - $x>2$ **או** $x<-0.34$ **, ירידה** $-0.34<x<0$ **, ולכן** $x=-0.34$ **מקסימום.**

$$f(-0.34)=3\cdot(-0.34)+2\cdot\sqrt{(-0.34)^2-2\cdot(-0.34)}=0.764$$

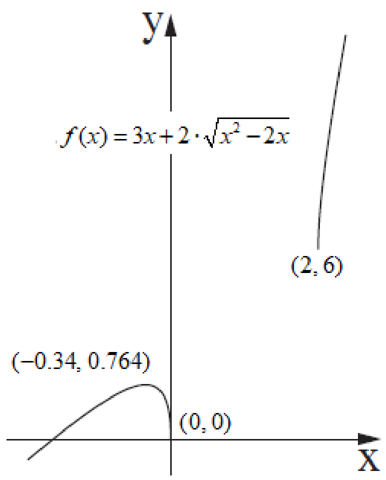
וכמוכן, שלא נשכח את נקודות הקצה, שהן גם נקודות קיצון.

תשובה: $(2,6)$ **מינימום,** $(0,0)$ **מינימום ,** $(-0.34,0.764)$ **מקסימום.**

(2) נצייר סקיצה של הפונקציה $f(x)$.

תחומי הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ ומטה $(\cap)$ של $f(x)$ תואמים לתחומי עלייה וירידה של $f'(x)$,

ובהתאם אין נקודת פיתול ל- $f(x)$.



ג. תחום הערכים של שיפועי $f(x)$ הוא $m>5$ או $m<1$, על פי הסקיצה של $f'(x)$.

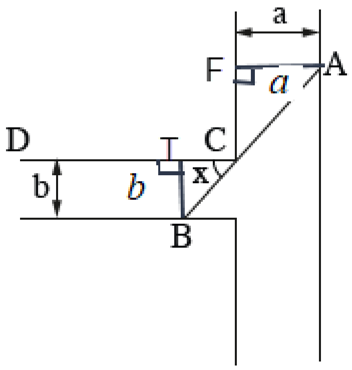
לישר שמשוואתו $y=4x+c$ יש שיפוע 4, ולכן לא ייתכן שישיק לפונקציה $f(x)$.

תשובה: לא ייתכן.

א. נביע את אורך הסכר AB, **באמצעות** a , b **ו-** x ($a,b>0$ **ממשיים,** $0<x<\frac{\pi}{2}$).

נעביר שני אנכים, BT **ו-** AF **לדופנות של התעלה, ונקבל שני מלבנים, כאשר** $BT=b$ **ו-** $AF=a$.

$AF \parallel DC$ **, ולכן** $\sphericalangle FAC=\sphericalangle DCB=x$



ΔAFC

$$\cos x=\frac{AF}{CA}$$

$$\boxed{CA=\frac{a}{\cos x}}$$

ΔBCT

$$\sin x=\frac{BT}{BC}$$

$$\boxed{BC=\frac{b}{\sin x}}$$

אורך הסכר הוא: $AB=BC+CA=\frac{b}{\sin x}+\frac{a}{\cos x}$

תשובה: אורך הסכר AB **הוא** $AB=\frac{b}{\sin x}+\frac{a}{\cos x}$.

ב. הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *אורך הסכר* AB.

נתון כי $a=2b$ **, ולכן:** $\boxed{AB=b\cdot(\frac{1}{\sin x}+\frac{2}{\cos x})} \leftarrow AB=\frac{b}{\sin x}+\frac{2b}{\cos x}$

$$AB'(x)=b\cdot\left[\frac{0-\cos x}{\sin^2 x}+\frac{0-2(-\sin x)}{\cos^2 x}\right]$$

$$\boxed{AB'(x)=b\cdot\frac{2\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}}$$

$$2\sin^3 x-\cos^3 x=0$$

$$2\sin^3 x=\cos^3 x \quad /:2\cos^3>0$$

$$\tan^3 x=\frac{1}{2}$$

$$\tan x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$x=0.671 \quad \leftarrow 0<x<\frac{\pi}{2}\approx 1.571$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0.6)=-0.3b<0 \\ f'(0.8)=0.82b>0 \end{array}\right\} \boxed{x=0.671,\min}$$

תשובה: $x=0.671$ $(38.44°)$ **, שבעבורו אורך הסכר** AB **יהיה מינימלי.**

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8 .

$$8=b\cdot(\frac{1}{\sin 0.671}+\frac{2}{\cos 0.671})$$

$$8=b\cdot 4.162$$

$$\boxed{b\approx 1.922}$$

תשובה: $b\approx 1.922$.