מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: חורף תשפ"ב, 2022
מספר השאלון: 035571
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

תוכנית חדשה

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך – $5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על חמש מן השאלות 1–8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

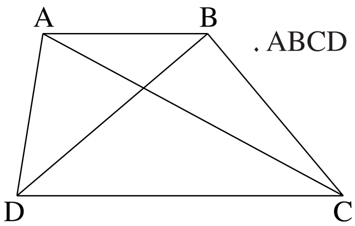
שים לב: אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

1. ענה על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניך. אם תענה על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות במחברתך.

א. לפניך טרפז $ABCD$ $(AB \parallel CD)$.

נתון: שטח המשולש ADC הוא 24 ושטח המשולש ADB הוא 12 .



(1) חשב את היחס בין אורך הבסיס הגדול ובין אורך הבסיס הקטן של הטרפז $ABCD$.

(2) חשב את שטח הטרפז $ABCD$.

ב. **(1)** בעבור כל n טבעי, הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת את הטענה:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$

(2) חשב את המכפלה:

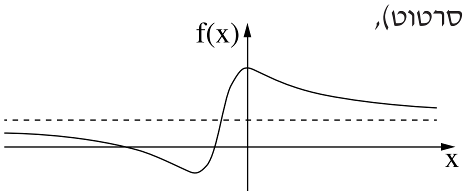
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

ג. בעבור כל אחת מן הטענות (1)–(2) שלפניך, קבע אם היא נכונה לכל x . נמק.

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

ד. לפניך הגרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x .



לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אופקית שמשוואתה היא $y=1$ (ראה סרטוט),

ו־ 2 נקודות קיצון בדיוק:

נקודת מקסימום $(0\ ,\ 3)$

ונקודת מינימום $(-2\ ,\ -1)$.

נגדיר את הפונקציה $g(x)=f(-x)+1$. גם הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x .

(1) מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$. נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם $a_1 , a_2 , a_3 , \dots$, והֶפרשה d .

מסמנים ב־ S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A , לכל n טבעי.

מגדירים סדרה נוספת, B , שאיבריה הם $b_1 , b_2 , b_3 , \dots$. איברי הסדרה B מקיימים $b_n = S_{n+1} - S_n$, לכל n טבעי.

א. **(1)** האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמק.

(2) האם הסדרה B זהה לסדרה A ? נמק.

מסמנים ב־ T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B , לכל n טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \dots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d} .$$

נתון: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

$T_5 = -20$

ג. חשב את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי־זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי שלם? נמק.

3. בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה. ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה. אם הסוכרייה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה, ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.

א. ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

(1) חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

(2) חשב את ההסתברות שליאור אכל את הסוכרייה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.

ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.
הבע בעזרת n את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.

ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה.
ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה.
חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

/המשך בעמוד 4/

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

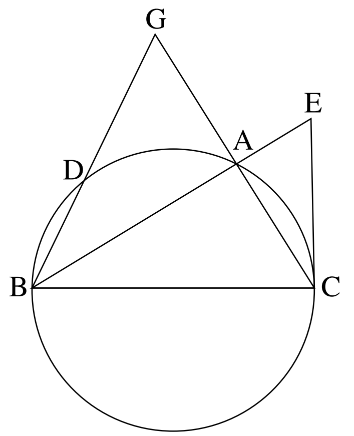
.4 משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראה סרטוט).

הצלע BC היא קוטר במעגל.

AG הוא המשך הצלע CA .

הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D .

נתון: GA = AC .



א. הוכח כי הישר AB חוצה את $\sphericalangle GBC$.

ב. הוכח כי $\triangle GBC \sim \triangle GAD$.

נתון כי $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

ג. הבע באמצעות R את אורך הצלע AC .

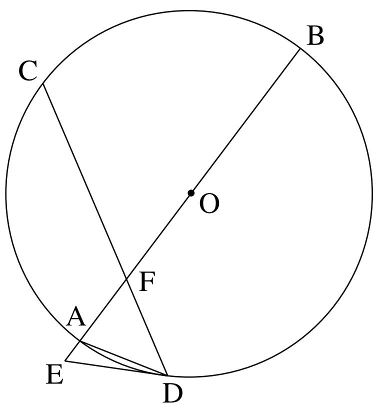
דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E .

ד. חשב פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC .

.5 AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O . המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F .

המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הקוטר AB בנקודה E (ראה סרטוט).

נסמן: $\sphericalangle ADE = \alpha$.



א. הראה כי $\sphericalangle BAD = 90^o - \alpha$.

נתון כי ED = FD .

ב. הבע באמצעות α את גודל $\sphericalangle CDA$.

ג. הבע באמצעות R ו־ α את שטח המשולש AFD .

ד. **(1)** הבע באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

(2) נתון כי $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$.

מצא את α .

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = (-1)$.

ב. מצא את הערך של m .

הצב בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאת, וענה על הסעיפים ג–ה.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = k \cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה־ x .

נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ x הוא 1 (השטח שמימין לאנך).

מצא את הערך של k .

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(4) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה־ x .

בתשובתך דייק שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, אם ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

ב. **(1)** מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם ייתכן שישר שמשוואתו $y = 4x + c$ (c פרמטר) ישיק לגרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

8. תעלת מים ראשית ברוחב קבוע a מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע b .

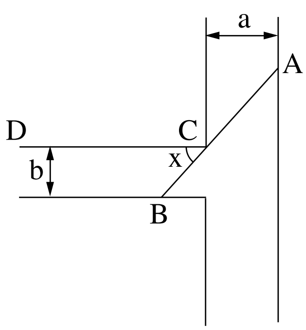
הנקודה C היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית

ובין דופן של התעלה המשנית (ראה סרטוט).

מהנדֶסֶת מתכננת סכר ישר, שיֵצא מן הנקודה A שבדופן התעלה הראשית,

יעבור דרך הנקודה C ויגיע עד הנקודה B שבדופן התעלה המשנית.

הסכר ייצוֹר זווית שגודלה x עם הדופן CD של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.



א. הבע באמצעות a , b ו־ x את אורך הסכר AB .

נתון כי $a = 2b$.

ב. מצא את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8 . מצא את b .

בהצלחה!