יואל גבע
לא מתפשרים.

שאלון 35571 מועד
חורף תשפ"א

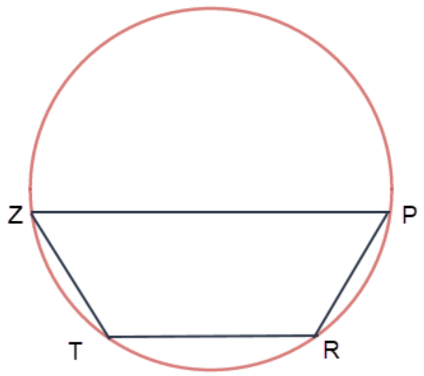
מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35571 מועד חורף תשפ"א.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

1א שאלות קצרות גיאומטריה

בגרות פא פברואר 21 מועד חורף שאלון 35571



<u>נתונים</u>

1. $TRPZ$ **טרפז חסום במעגל (** $ZP \parallel TR$ **)**

צ"ל: $TRPZ$ **טרפז שווה שוקיים**

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	2	$\measuredangle Z + \measuredangle R = 180°$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל $180°$
1	3	$\measuredangle Z + \measuredangle T = 180°$	סכום זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים $180°$
3 ,2	4	$\measuredangle T = \measuredangle R$	חישוב
4 ,1	5	$TRPZ$ טרפז שווה שוקיים	טרפז עם זוויות בסיס שוות הוא שווה שוקיים
		מ.ש.ל.	

דרך נוספת להוכחה:

- **נעביר אלכסון בטרפז, ונקבל זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים**
- **מכאן שאם זוויות היקפיות שוות אז הקשתות שוות והמיתרים שווים**
- **ולכן, שוקי הטרפז שוות והטרפז הוא שווה שוקיים**

1ב שאלות קצרות אינדוקציה

בגרות פא פברואר 21 מועד חורף שאלון 35571

<u>נוכיח "בדרך אחרת"</u>

$$n^3-n=n(n^2-1)=n(n+1)(n-1)$$

לכן, $n^3-n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$

כלומר: n^3-n **הוא מכפלה של שלושה מספרים טבעיים עוקבים,**

מהם כופל אחד הוא תמיד כפולה של 3**,**

וכופל אחד (לפחות) הוא כפולה של 2 **.**

לכן, המכפלה תתחלק תמיד ב- 6 **ללא שארית.**

<u>לחילופין, נוכיח באינדוקציה</u>

ב.1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

$$\frac{1^3-1}{6}=\frac{0}{6}=0$$

לכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה), כלומר:** $\frac{k^3-k}{6}$ **שלם,**

ונראה שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל** $\frac{(k+1)^3-(k+1)}{6}$ **שלם**

$$\frac{(k+1)^3-(k+1)}{6}=$$
$$=\frac{k^3+3k^2+3k+1-k-1}{6}=$$
$$=\frac{k^3-k+3k^2+3k}{6}=$$
$$=\frac{k^3-k}{6}+\frac{3k(k+1)}{6}=$$
$$=\frac{k^3-k}{6}+\frac{k(k+1)}{2}$$

המחובר השמאלי שלם , על-פי הנחת האינדוקציה,

המחובר הימני שלם , כי אחד משני המספרים הטבעיים העוקבים שבמונה הוא זוגי (והשני אי-זוגי).

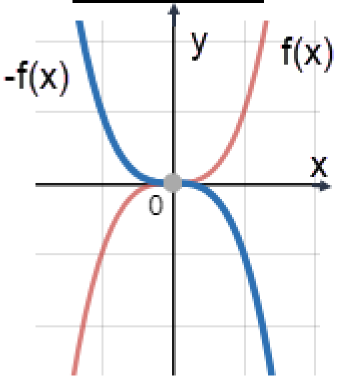
מכאן ש- $\frac{(k+1)^3-(k+1)}{6}$ **שלם.**

3. לכן, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו שמכפלה של שלושה מספרים טבעיים עוקבים תתחלק תמיד ב- 6 **ללא שארית.**

ג1 שאלות קצרות אנליזה

המחשה גרפית



I. **נתון כי** $f(x)$ **אינה קבועה, מוגדרת לכל** x **והיא אי-זוגית.**

פונקציה אי-זוגית מקיימת $f(-x)=-f(x)$,

ולכן היא סימטרית לראשית הצירים, לנקודה $(0,0)$.

נתונה הפונקציה $h(x)=-f(x)$

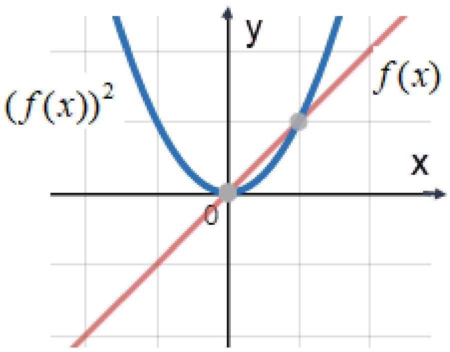
$$h(-x)=-f(-x)$$

$$h(-x)=f(x) \quad \leftarrow f(x)=-f(-x)$$

$$\boxed{h(-x)=-h(x)}$$

תשובה: $h(x)$ **פונקציה אי-זוגית.**

המחשה גרפית



II. **נתון כי** $f(x)$ **אינה קבועה, מוגדרת לכל** x **והיא אי-זוגית.**

נתונה הפונקציה $k(x)=(f(x))^2$

$$k(-x)=(f(-x))^2$$

$$k(-x)=(-f(x))^2$$

$$k(-x)=(f(x))^2$$

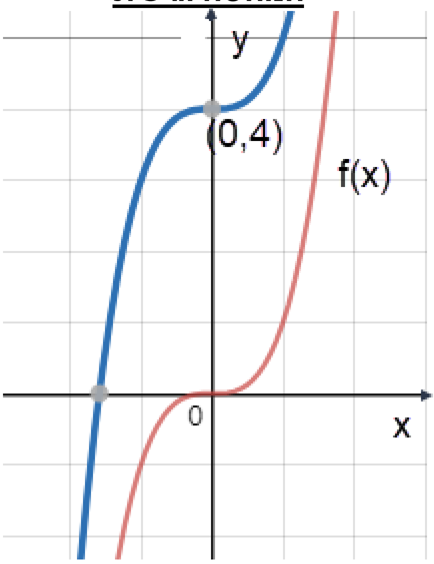
$$\boxed{k(-x)=k(x)}$$

נתון $f(x)$ **אינה קבועה, לכן** $f(x)$ **אינה המשוואה** $y=0$,

כי אחרת $k(x)$ **תהייה גם** $y=0$ **, כלומר פונקציה זוגית וגם אי-זוגית.**

תשובה: $k(x)$ **פונקציה זוגית.**

המחשה גרפית



III. **נתון כי** $f(x)$ **אינה קבועה, מוגדרת לכל** x **והיא אי-זוגית.**

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+4$ **הזזה אנכית כלפי מעלה.**

לכן, הפונקציה תהייה סימטרית לנקודה $(0,4)$,

לא לראשית הצירים (לא אי-זוגית) ולא לציר ה- y **(לא זוגית).**

נתון $f(x)$ **אינה קבועה, לכן** $f(x)$ **אינה המשוואה** $y=0$,

כי אחרת $g(x)$ **תהייה** $y=4$ **, כלומר פונקציה זוגית.**

$$g(-x)=f(-x)+4$$

$$\boxed{g(-x)=-f(x)+4}$$

תשובה: $g(x)$ **פונקציה לא זוגית ולא אי-זוגית.**

1ד שאלות קצרות – אנליזה

בגרות פא פברואר 21 מועד חורף שאלון 35571

הערה – ההסברים כאן מפורטים, במטרה להוסיף לידע התלמיד.

במגבלות זמן שניתן לשאלה כזו בבגרות, במסגרת שאלה מספר 1,

ניתן להרחיב פחות, ולא לנמק יתר על המידה, כמו למשל נימוקים לקיום/אי קיום אסימפטוטות.

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$ **, כאשר** $a>0$ **פרמטר.**

תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא כל** x**, כי הביטוי שבתוך השורש חיובי לכל** x.

המכנה חיובי, ולכן סימני הפונקציה נקבעים על פי המונה:

$f(x)\geq 0$ **עבור** $x\geq 0$ **, ו-** $f(x)<0$ **עבור** $x<0$ **- ולכן גרף ג, או גרף ד, מתאימים.**

ניתן לראות שגם $f(x)$ **היא פונקציה אי-זוגית - ולכן גרף ג, או גרף ד, מתאימים.**

$$f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+a}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}=-f(x)$$

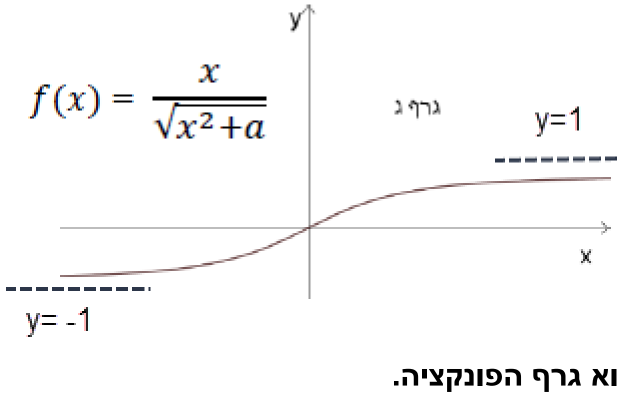
חזקת המונה (1) שווה לחזקת המכנה (1) , וכמו כן סימן המונה תלוי בסימנו של x **,**

ולכן ישנן שתי אסימפטוטות אופקיות: $x\to+\infty : y=1$ **, ו-** $x\to-\infty : y=-1$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}=\frac{x}{x}=1 \;\to \boxed{(x\to+\infty)\,y=1} \quad , \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\frac{x}{-x}=-1 \;\to \boxed{(x\to-\infty)\,y=-1}$$

מכאן שגרף ג הוא הגרף המתאים.



תשובה: גרף ג הוא גרף הפונקציה.

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- בנות** $\bar{A}$ **- בנים**

B **- עוסקים בספורט** $\bar{B}$ **- לא עוסקים בספורט**

נתונים ומשמעויות מידיות

(1) $P(\bar{B}/\bar{A})=0.2 \rightarrow P(B/\bar{A})=0.8$

(2) $P(A)=1.2P(\bar{A}\cap B) \rightarrow N(A)=1.2N(\bar{A}\cap B)$

	A **בנות**	$\bar{A}$ **בנים**	
B **- עוסקים בספורט**		x	
$\bar{B}$ **- לא עוסקים בספורט**			
	$1.2x$	$1-1.2x$	1

פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית

$$P(B/\bar{A})=0.8$$

$$P(B/\bar{A})=\frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$0.8=\frac{x}{1-1.2x} \quad /\cdot(1-1.2x)$$

$$0.8-0.96x=x$$

$$0.8=1.96x$$

$$x=\frac{20}{49} \quad \rightarrow 1-1.2\cdot\frac{20}{49}=\frac{25}{49}$$

$$\boxed{P(\bar{A})=\frac{25}{49}}$$

	A **בנות**	$\bar{A}$ **בנים**	
B **- עוסקים בספורט**		$\frac{20}{49}$	
$\bar{B}$ **- לא עוסקים בספורט**		$\frac{5}{49}$	
	$\frac{24}{49}$	$\frac{25}{49}$	1

תשובה: ההסתברות לבחור בן, מבין תלמידי בית הספר, היא $\frac{25}{49}$.

ב. נתון כי המאורעות "נבחר בן" ו- "נבחר תלמיד שעוסק בספורט" הם בלתי תלויים.

לכן: $P(B)\cdot P(\overline{A})=P(B\cap\overline{A})$

$$P(B)\cdot\frac{25}{49}=\frac{20}{49}$$

$$\boxed{P(B)=0.8}$$

	A **בנות**	$\overline{A}$ **בנים**	
B - עוסקים בספורט	$\frac{96}{245}$	$\frac{20}{49}$	0.8
$\overline{B}$ - לא עוסקים בספורט	$\frac{24}{245}$	$\frac{5}{49}$	0.2
	$\frac{24}{49}$	$\frac{25}{49}$	1

תשובה: ההסתברות לבחור תלמיד (בן או בת), שעוסק בספורט, היא 0.8 **.**

ג. נבחר באקראי תלמיד (בן או בת). ידוע שהוא עוסק בספורט. נבדוק מה סביר יותר, שהוא בן או בת.

$$\left.\begin{array}{l} P(\overline{A}/B)=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\dfrac{20/49}{0.8}=\dfrac{25}{49} \\ P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{96/245}{0.8}=\dfrac{24}{49} \end{array}\right\}\boxed{P(\overline{A}/B)>P(A/B)}$$

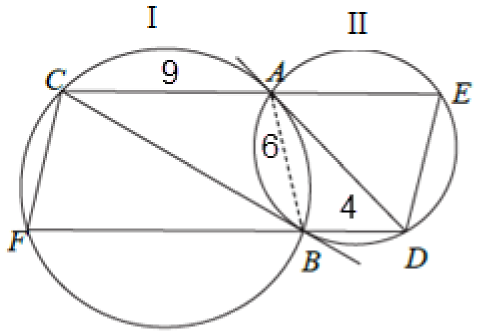
ניתן גם לראות, ללא חישובים ,

שיש יותר בנים שעוסקים בספורט מאשר בנות שעוסקות בספורט ($\frac{20}{49}>\frac{96}{245}$ **),**

ולכן סביר יותר שהנבחר הוא בן.

תשובה: אם נבחר תלמיד שעוסק בספורט, אז סביר יותר שהוא בן.

<u>נתונים</u>



1. AD **משיק למעגל** I **בנקודה** A.

2. CB **משיק למעגל** II **בנקודה** B.

עבור ב. 3. $BD = 4$ **.4** $AC = 9$

צ"ל: א. (1) $\Delta ABC \sim \Delta BDA$ **(2)** $\sphericalangle CED + \sphericalangle FCE = 180^\circ$

(3) $CEDF$ **מקבילית ב.** $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDA}}$

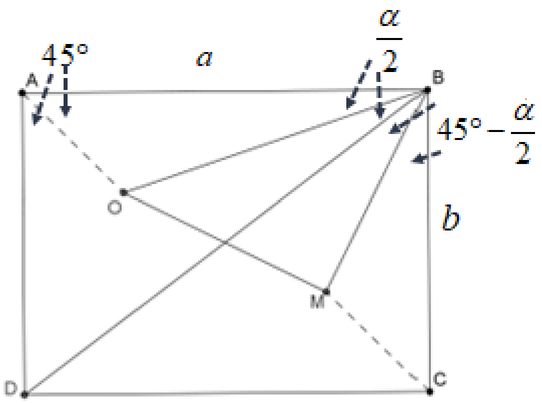
הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	5	$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ACB$ (ז)	זווית בין משיק למיתר
1	6	$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBA$ (ז)	זווית בין משיק למיתר
5, 6	7	$\Delta ABC \sim \Delta BDA$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. א (1)	
	8	$\sphericalangle CED + \sphericalangle DBA = 180^\circ$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא 180°
	9	$\sphericalangle FBA + \sphericalangle DBA = 180^\circ$	סכום זוויות צמודות הוא 180°
	10	$\sphericalangle FBA + \sphericalangle FCE = 180^\circ$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא 180°
8, 9, 10	11	$\sphericalangle CED + \sphericalangle FCE = 180^\circ$	
		מ.ש.ל. א (2)	
11	12	$FC \parallel DE$	זוויות חד צדדיות משלימות ל- 180°
5, 6	13	$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA$	סכום זוויות 180° במשולש
13	14	$CE \parallel FD$	זוויות מתחלפות שוות
12, 14	15	$CEDF$ מקבילית	שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות
		מ.ש.ל. א (3)	
7	16	$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BA} = \frac{BC}{DA}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
16	17	$AB^2 = AC \cdot BD$	
3, 4, 17	18	$AB = 6$	
3, 7, 16	18	$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDA}} = \frac{9}{4}$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
		מ.ש.ל. ב	

א. $ABCD$ **מלבן, שכול זוויותיו ישרות.**

O **מרכז מעגל חסום ב-** ΔABD, **ולכן מפגש חוצי זוויות.**

$\sphericalangle ABD = \alpha$ **ולכן** $\sphericalangle ABO = \sphericalangle DBO = \frac{\alpha}{2}$ **,** $\rightarrow \sphericalangle BAO = 45°$ **,** $\sphericalangle BAD = 90°$ **,** $\sphericalangle AOB = 180° - (45° + \frac{\alpha}{2})$ **.**

ΔABO **על פי משפט הסינוסים:**



$$\frac{AO}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{AB}{\sin(180° - (45° + \frac{\alpha}{2}))}$$

$$\boxed{AO = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(45° + \frac{\alpha}{2})}}$$

ΔABO **על פי משפט הסינוסים:**

$$\frac{BO}{\sin 45°} = \frac{AB}{\sin(180° - (45° + \frac{\alpha}{2}))}$$

$$\boxed{BO = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin(45° + \frac{\alpha}{2})}}$$

תשובה: $AO = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(45° + \frac{\alpha}{2})}$ **,** $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin(45° + \frac{\alpha}{2})}$ **.**

ב. M **מרכז מעגל חסום ב-** ΔBDC, **ולכן מפגש חוצי זוויות.**

$\sphericalangle CBD = 90° - \alpha$ **ולכן** $\sphericalangle MBD = \sphericalangle CBM = 45° - \frac{\alpha}{2}$ **.**

$$\sphericalangle OBM = \frac{\alpha}{2} + 45° - \frac{\alpha}{2}$$ **,**

$$\boxed{\sphericalangle OBM = 45°}$$

תשובה: הראינו כי $\sphericalangle OBM = 45°$ **.**

ג. נתון $AB = a = 8$, $BC = b = 6$.

$\underline{\Delta ABD}$

$$\tan\alpha = \frac{AD}{AB}$$

$$\tan\alpha = \frac{6}{8}$$

$$\boxed{\alpha = 36.87^\circ}$$

תשובה: $\alpha = 36.87^\circ$.

ד. נחשב את שטח ΔOMB.

$$\sphericalangle BCD = 90^\circ \quad \rightarrow \sphericalangle BCM = 45^\circ$$

$$\sphericalangle CBM = 45^\circ - \frac{36.87^\circ}{2} = 26.565^\circ$$

$$\sphericalangle BMC = 180^\circ - (26.565^\circ + 45^\circ) = 108.43^\circ$$

ΔABO **על פי משפט הסינוסים:**

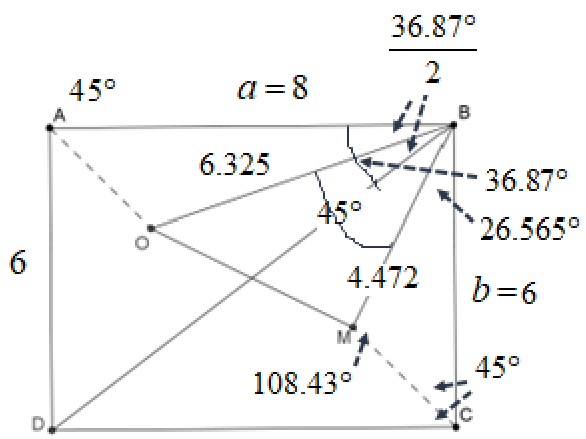
$$\frac{BM}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 108.43^\circ}$$

$$BM = \frac{6\sin 45^\circ}{\sin 108.43^\circ}$$

$$\boxed{BM = 4.472}$$

$$BO = \frac{8\sqrt{2}}{2\sin\left(45^\circ + \dfrac{36.87^\circ}{2}\right)} =$$

$$\boxed{BO = 6.325}$$



$$S_{\Delta OMB} = \frac{BO \cdot BM \cdot \sin\sphericalangle OBM}{2}$$

$$S_{\Delta OMB} = \frac{6.325 \cdot 4.472 \cdot \sin 45^\circ}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta OMB} = 10}$$

תשובה: שטח ΔOMB **הוא** 10.

א. נתון כי בסדרה הנדסית: $2n$ איברים.

נמצא את היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות הזוגיים, כלומר : $\frac{S_{2n}}{S_{n\,even}}$.

	כל הסדרה	מקומות זוגיים
A_1	a_1	$a_2=a_1q$
Q	q	$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_nq^2}{a_n}=q^2$
N	$2n$	n

$$S_{2n}=\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}$$

$$S_{n\,even}=\frac{a_1q\left[(q^2)^n-1\right]}{q^2-1}=\frac{a_1q(q^{2n}-1)}{q^2-1}=\frac{a_1q(q^{2n}-1)}{(q+1)(q-1)}$$

$$\frac{S_{2n}}{S_{n\,even}}=\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}\cdot\frac{(q+1)(q-1)}{a_1q(q^{2n}-1)}$$

$$\boxed{\frac{S_{2n}}{S_{n\,even}}=\frac{q+1}{q}}$$

תשובה: היחס, בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות הזוגיים, הוא $\frac{q+1}{q}$.

ב. היחס בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לסכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 5**, כלומר :** $\frac{S_{n\,even}}{S_{n\,odd}}=5$.

נמצא את q .

	מקומות אי-זוגיים	מקומות זוגיים
A_1	a_1	$a_2=a_1q$
Q	$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_nq^2}{a_n}=q^2$	$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_nq^2}{a_n}=q^2$
N	n	n

$$S_{n\,odd}=\frac{a_1\left[(q^2)^n-1\right]}{q^2-1}=\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q^2-1}$$

$$S_{n\,even}=\frac{a_1q\left[(q^2)^n-1\right]}{q^2-1}=\frac{a_1q(q^{2n}-1)}{q^2-1}$$

$$5=\frac{a_1q(q^{2n}-1)}{q^2-1}\cdot\frac{q^2-1}{a_1(q^{2n}-1)}$$

$$\boxed{5=q}$$

או:

$$\frac{S_{n\,even}}{S_{n\,odd}}=\frac{a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}}{a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}}$$

$$\frac{S_{n\,even}}{S_{n\,odd}}=\frac{a_1q+a_3q+a_5q+...+a_{2n-1}q}{a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}}$$

$$\frac{S_{n\,even}}{S_{n\,odd}}=\frac{q(a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1})}{a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}}$$

$$\frac{S_{n\,even}}{S_{n\,odd}}=q \quad \rightarrow \boxed{q=5}$$

תשובה: מנת הסדרה היא 5 .

ג. $\boxed{a_1=1} \leftarrow a_1\cdot 5=5 \leftarrow a_1q=5 \leftarrow a_2=5$.

$$T_n=a_2-a_1+a_4-a_3+a_6-a_5+...+a_{2n}-a_{2n1}$$

נביע את T **באמצעות** n .

$$T=a_2-a_1+a_4-a_3+a_6-a_5+...+a_{2n}-a_{2n1}$$

$$T=(a_2+a_4+a_6+...+a_{2n})-(a_1+a_3+a_5+...+a_{2n1})$$

$$T=S_{n\,even}-S_{n\,odd}$$

$$T=\frac{1\cdot5(5^{2n}-1)}{5^2-1}-\frac{1(5^{2n}-1)}{5^2-1}$$

$$T=\frac{4(5^{2n}-1)}{24}$$

$$\boxed{T=\frac{5^{2n}-1}{6}}$$

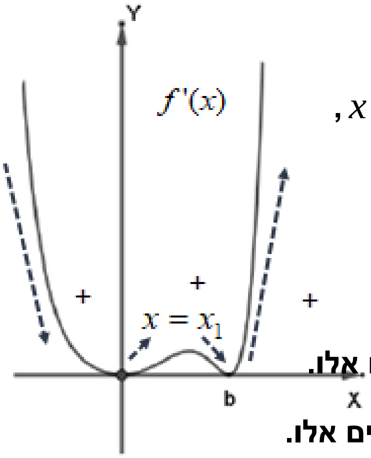
תשובה: $T=\frac{5^{2n}-1}{6}$.

א. נתון גרף הפונקציה $f'(x)$ **, ועל-פיו** $f'(0)=0$, $f'(b)=0$.

נשים לב -ש- $f'(x)\ge 0$ **, עם שתי נקודות אפס, ולכן** $f(x)$ **עולה לכל** x ,

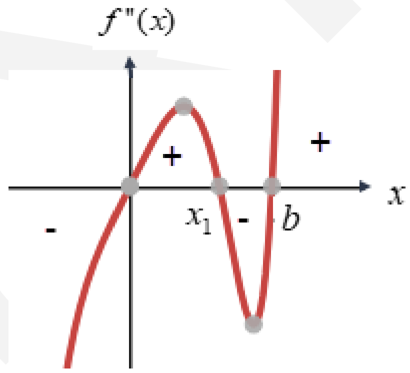
כאשר $x=0$ **ו-** $x=b$ **נקודות פיתול בעלייה, שבהן המשיק מקביל לציר ה--** x,

ונקודת פיתול נוספת תתקבל עבור $x=x_1$**, נקודת קיצון שלישית של** $f'(x)$.



<u>**שיקולים לשרטוט גרף**</u> $f''(x)$.

- **סימני הנגזרת השנייה, נקבעים על-פי תחומי העלייה והירידה של** $f'(x)$.
- $f'(x)$ **עולה עבור** $x>b$ **או** $0<x<x_1$**, ובהתאם** $f''(x)>0$ **בתחומים אלו.**
- $f'(x)$ **יורדת עבור** $x_1<x<b$ **או** $x<0$**, ובהתאם** $f''(x)<0$ **בתחומים אלו.**
- **כמו כן,** $f'(x)\to+\infty$ **עבור** $x\to\pm\infty$ **, ולכן** $f''(x)$ **לא שואפת לאפס, אלא ל -** $\pm\infty$.



תשובה: סקיצה של $f''(x)$ **מעל.**

ב. נתון $f(b)=0$.

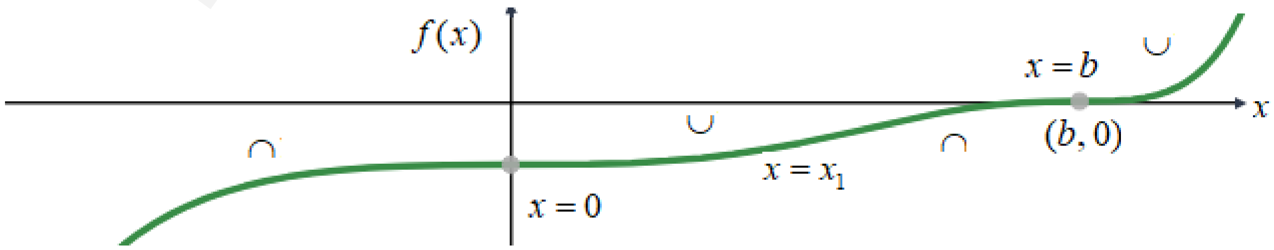
כפי שאמרנו, בסעיף א, $f(x)$ **עולה לכל** x ,

עם שלוש נקודות פיתול: $x=0$ $x=b$ **ו-** $x=x_1$.

<u>**שיקולים לשרטוט גרף**</u> $f(x)$.

$f(x)$ **עולה לכל** x **, עם שלוש נקודות פיתול:** $x=0$ $x=b$ **ו-** $x=x_1$.

- **תחומי הקעירות של** $f(x)$ **, נקבעים על-פי סימני** $f''(x)$.
- $f''(x)>0$ **עבור** $x>b$ **או** $0<x<x_1$**, ובהתאם** $f(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $(\cup)$ **בתחומים אלו.**
- $f''(x)<0$ **עבור** $x_1<x<b$ **או** $x<0$**, ובהתאם** $f(x)$ **קעורה כלפי מטה** $(\cap)$ **בתחומים אלו.**
- **כמו כן,** $f'(x)\to+\infty$ **עבור** $x\to\pm\infty$ **, ולכן אין אסימפטוטה אופקית ל-** $f(x)$.



תשובה: סקיצה של $f(x)$ **מעל.**

ג. $g(x)=(x^3-a)^2\cdot x^2$.

(1) נשים לב ש- $g(x)$ **היא מכפלה של גורם חיובי** (2) **, ושני גורמים אי-שליליים.**

מכאן ש- $g(x)\geq 0$ **לכל** x **, שתי נקודות אפס:** $(\sqrt[3]{a},0)$ **ו-** $(0,0)$.

הגרף של $f'(x)$ **מתאים לפונקציה זו,**

בניגוד לשני הגרפים האחרים, שלהם תחומי חיוביות ותחומי שליליות.

תשובה: $g(x)=f'(x)$.

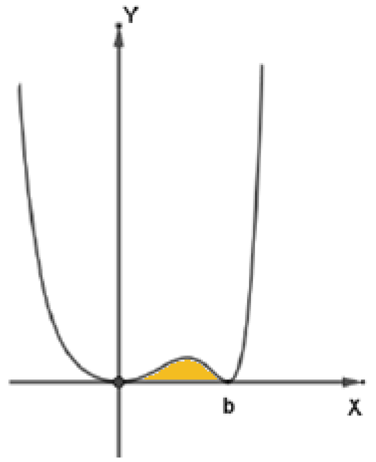
(2) עפי שהראינו בתת סעיף (1) ל- $g(x)$ **יש נקודת אפס** $(\sqrt[3]{a},0)$.

על פי הציור של $f'(x)$ **ידוע ש-** $f'(b)=0$ **, לכן** $\sqrt[3]{a}=b \quad \rightarrow \boxed{a=b^3}$

תשובה: $a=b^3$.

ד. נתון כי השטח המסומן שווה ל- $\frac{1}{9}$.

$g(x)=f'(x)=(x^3-a)^2\cdot x^2$



נחשב את השטח המבוקש,

עם אינטגרל המבוסס על זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$S=\int_0^b((x^3-a)^2\cdot x^2)\,dx$$

$$S=\int_0^b\left[\frac{1}{3}\cdot(x^3-a)^2\cdot 3x^2\right]dx$$

$$S=\frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3-a)^3}{3}\Big]_0^b$$

$$S=\frac{(x^3-a)^3}{9}\Big]_0^b$$

$$\left.\begin{aligned} x=b:&\quad \frac{(b^3-a)^3}{9}=0 \quad \leftarrow a=b^3 \\ x=0:&\quad \frac{(0^3-a)^3}{9}=-\frac{a^3}{9} \end{aligned}\right\}\ \boxed{S=\frac{a^3}{9}}$$

$$\frac{1}{9}=\frac{a^3}{9}$$

$$1=a^3$$

$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$.

א. נתונה הפונקציה: $\boxed{f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}}$ **והתחום** $0\le x\le 2\pi$.

נמצא את תחום ההגדרה, כאשר נזכור שפונקציית ה- $\sin$ **חיובית ברביע הראשון והשני.**

$$\sin x>0$$

$$\boxed{2\pi k<x<\pi+2\pi k}$$

תשובה: $0<x<\pi$.

ב. כמובן שאין נקודת חיתוך עם ציר ה- y **בגלל תחום ההגדרה.**

$$\cos x=0\ \rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ \rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{2},0)}$$

תשובה: נקודת חיתוך עם ציר ה- x **היא** $(\frac{\pi}{2},0)$.

ג. נמצא את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

$$f'(x)=\frac{-\sin x\sqrt{\sin x}-\frac{\cos x\cdot\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{\sin x}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{-2\sin^2 x-\cos^2 x}{2\sqrt{\sin x}}}{\sin x}$$

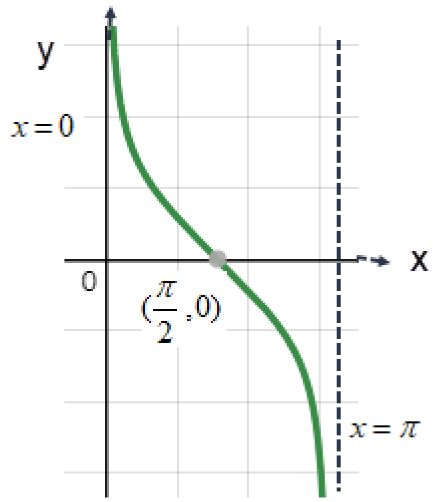
$$\boxed{f'(x)=\frac{-1-\sin^2 x}{2\sin x\sqrt{\sin x}}}\ \leftarrow \sin^2 x+\cos^2 x=1$$

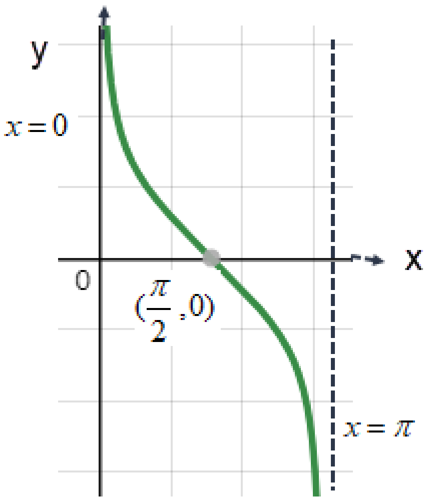
הנגזרת שלילית, בתחום ההגדרה, ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה.

תשובה: ירידה: $0<x<\pi$, **עלייה: אף** x.

ד. תשובה: האסימפטוטות של $f(x)$ **המאונכות לציר ה-** x **הן:** $x=\pi$, $x=0$.

ה. הסקיצה המתאימה של $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.





ו. (1) נתון האינטגרל המסוים $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx$ **.**

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx$$

אם נתבונן בגרף של $f(x)$ **,**

נראה שאינטגרל זה הוא סכום של שטח חיובי (מעל ציר ה- x **)**

ושטח שלילי (מתחת לציר ה- x **), סכומם של ביטוי (2) וביטוי (3).**

(2) נתון האינטגרל המסוים $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ **.**

אם נתבונן בגרף של $f(x)$ **, נראה שאינטגרל זה הוא של שטח חיובי (מעל ציר ה-** x **) .**

(3) נתון האינטגרל המסוים $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx$ **.**

אם נתבונן בגרף של $f(x)$ **, נראה שאינטגרל זה הוא של שטח שלילי (מתחת לציר ה-** x **) .**

תשובה: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx > \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx > \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx$ **.**

ז. נחשב את האינטגרל המסוים, לפי זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\cdot(\cos x)\,dx = 2\sqrt{\sin x}\,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=\frac{\pi}{2} & 2\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\sqrt{1} = 2 \\ x=\frac{\pi}{4} & 2\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}} = 2\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt[4]{2^3} \end{array}\right\} \boxed{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 2-\sqrt[4]{2^3} \approx 0.3182}$$

תשובה: ערך הביטוי $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ **הוא** $2-\sqrt[4]{2^3} \approx 0.3182$ **.**