יואל גבע
לא מתפשרים.

שאלון 35571 מועד
קיץ תש״פ

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35571 מועד קיץ תש״פ.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. יש להוכיח כי 5^n-1 מתחלק ב- 4 ללא שארית, לכל n טבעי.

כלומר, נדרש להוכיח ש- $\frac{5^n-1}{4}$ שלם, לכל n טבעי.

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$: $\frac{5^1-1}{4}=\frac{4}{4}=1$.

לכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה), כלומר: $\frac{5^k-1}{4}$ שלם,

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, לכן צ"ל $\frac{5^{k+1}-1}{4}$ שלם.

$$\frac{5^{k+1}-1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{5\cdot 5^k-1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4\cdot 5^k+5^k-1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4\cdot 5^k}{4}+\frac{5^k-1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 5^k+\frac{5^k-1}{4}$$

המחובר השמאלי שלם כי 5 מספר שלם, ו- k טבעי.

המחובר הימני שלם על פי הנחת האינדוקציה.

מתקבל שהוכחנו את נכונות הטענה עבור $n=k+1$.

3. לכן, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו כי 5^n-1 מתחלק ב- 4 ללא שארית, לכל n טבעי.

<u>נתונים</u>

1. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ **(המשולשים רשומים על פי סדר קודקודים)**

2. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DEF}$

צ"ל: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	3	$\Delta ABC \sim \Delta DEF$	
3	4	$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
3, 4	5	$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEF}} = (\frac{AB}{DE})^2$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
2	6	$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DEF}$	
5, 6	7	$(\frac{AB}{DE})^2 = 1$	הצבה
4, 7	8	$\frac{AB}{DE} = 1$	
4, 8	9	$AB = DE, AC = DF, BC = EF$	
9	10	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	משפט חפיפה צ.צ.צ.
מ.ש.ל.			

הטענה אינה נכונה – נסביר זאת.

$f(x)=\frac{x\cdot(x-3)}{(x-3)^2}$.

תחום ההגדרה של $f(x)$ **הוא** $x\neq 3$.

המספר $x=3$ **מאפס מכנה וגם מונה, ולכן יש חשד לנקודת אי רציפות סליקה ("חור").**

נצמצם ונקבל $f(x)=\frac{x}{x-3}$.

המספר $x=3$ **עדיין מאפס מכנה וכבר לא מונה, ולכן נקבל אסימפטוטה אנכית, הישר** $x=3$.

הרחבת ההסבר: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{0^{\pm}}=\pm\infty$,

כלומר, כאשר מתקרבים ל- $x=3$ **, ערכי הפונקציה שואפים לאינסוף ומתקבלת אסימפטוטה אנכית.**

אסימפטוטה אופקית, אכן קיימת, $y=1$ **(חזקות המונה והמכנה שווים, והפונקציה שואפת למנת המקדמים).**

הרחבת ההסבר: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=1$

תשובה: הטענה אינה נכונה, קיימות גם אסימפטוטה אנכית אחת וגם אסימפטוטה אופקית אחת.

אם נזיז את גרף הפונקציה $f(x)=\sin x$ **ב-** $\frac{\pi}{2}$ **יחידות שמאלה (הזזה אופקית לשמאל),**

התבנית של הפונקציה המתקבלת היא: $f(x+\frac{\pi}{2})$.

ניעזר בזהות טריגונומטרית: $f(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$.

מכאן, שאכן נקבל את הגרף של $\cos x$.

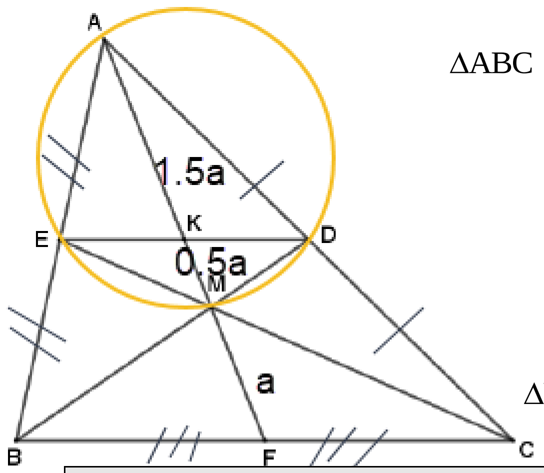
(ניתן גם להוכיח את הזהות, בעזרת הזהות הבסיסית: $\sin(x)=\sin(\pi-x)$.

$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\sin\left[\pi-(x+\frac{\pi}{2})\right]=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$ **, לא חובה בבגרות.)**

תשובה: הטענה נכונה, אם נזיז את גרף הפונקציה $\sin x$,

$\frac{\pi}{2}$ **יחידות שמאלה נקבל את הגרף של** $\cos x$.

בגרות פ יוני 20 מועד קיץ א שאלון 35581



נתונים

1. BD תיכון ב- ΔABC .2 CE תיכון ב- ΔABC .3 AF תיכון ב- ΔABC
4. M מפגש תיכונים ב- ΔABC .5 $MF = a$
6. עבור ה. דרך הנקודות A, E, M, D עובר מעגל

צ"ל: א. EK קטע אמצעים ב- ΔABF ב. AK , KM

ג. $\frac{S_{\Delta AKD}}{S_{\Delta DKM}}$ ד. $EK = KD$

ה. (1) $\Delta AKD \sim \Delta EKM$ (2) יחס הדמיון בין ΔAKD ו- ΔEKM

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	7	BD תיכון ב- ΔABC .	
2	8	CE תיכון ב- ΔABC	
8 ,7	9	ED קטע אמצעים ב- ΔABC	
9	10	$ED \parallel BC$	קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית
10 ,8	11	EK קטע אמצעים ב- ΔABF	יוצא מאמצע צלע ומקביל לצלע השלישית
		מ.ש.ל. א	
4	12	M מפגש תיכונים ב- ΔABC	
5	13	$MF = a$	
13 ,12	14	$AM = 2a$	תיכונים חותכים זה את זה ביחס $2:1$ מהקודקוד
14 ,13	15	$AF = 3a$	
15 ,9	16	$AK = 1.5a$	קטע אמצעים חוצה צלעות
16 ,14	17	$KM = 0.5a$	
		מ.ש.ל. ב	
17 ,16	18	$\frac{AK}{KM} = 3$	
18	19	$\frac{S_{\Delta AKD}}{S_{\Delta DKM}} = 3$	גובה משותף לקודקוד D, מצלעות ביחס זה
		מ.ש.ל. ג	
10	20	$\frac{EK}{BF} = \frac{AK}{AF}$	משפט תאלס הרחבה 1
10	21	$\frac{KD}{FC} = \frac{AK}{AF}$	משפט תאלס הרחבה 1
3	22	AF תיכון ב- ΔABC	

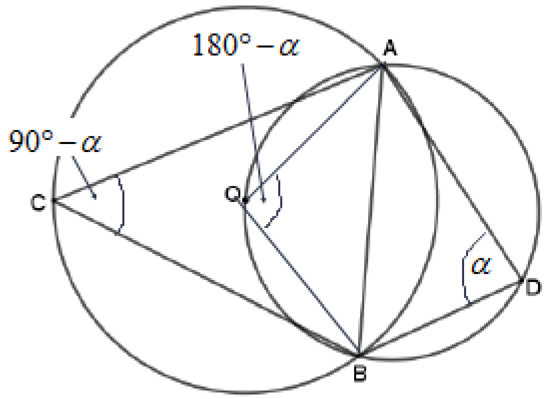
נימוק	טענה	מס'	הסבר
כלל המעבר	$\frac{EK}{BF}=\frac{KD}{BF}$	23	20, 21, 22
	$EK=KD$	24	23
מ.ש.ל. ד			
	$EMDA$ בר חסימה	25	6
זוויות היקפיות שנשענות על קשת משותפת (DM)	(ז) $\sphericalangle DAM=\sphericalangle DEM$	26	25
זוויות היקפיות שנשענות על קשת משותפת (AE)	(ז) $\sphericalangle ADE=\sphericalangle AME$	27	25
משפט דמיון זווית זווית	$\Delta AKD\sim\Delta EKM$	28	26, 27
מ.ש.ל. ה (1)			
שני מיתרים נחתכים במעגל כך שמכפלת הקטעים שווה	$EK\cdot KD=AK\cdot KM=0.75a^2$	29	16, 17, 25
	$EK=\sqrt{0.75a^2}=a\frac{\sqrt{3}}{2}$	30	24, 29
	$\frac{AK}{EK}=\sqrt{3}$	31	16, 30
יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים	יחס הדמיון בין ΔAKD ו- ΔEKM הוא $\sqrt{3}:1$	32	28, 31
מ.ש.ל. ה (2)			

א. $\sphericalangle ADB=\alpha$ **(נתון)**

$\sphericalangle AOB=180°-\alpha$ **(סכום זוויות נגדיות** $180°$ **במרובע** AOBD **החסום במעגל הימני)**

$\sphericalangle ACB=90°-\alpha$ **(זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית, הנשענת על אותה קשת, במעגל השמאלי)**

תשובה: $\sphericalangle ACB=90°-\alpha$ **.**



ב. נביע את AB **בעזרת** R, r, α **- באמצעות משפט הסינוסים**

$\underline{\Delta ABD}$

$$\frac{AB}{\sin 2\alpha}=2r$$

$$\boxed{AB=2r\sin 2\alpha}$$

$\underline{\Delta ABC}$

$$\frac{AB}{\sin(90°-\alpha)}=2R$$

$$\boxed{AB=2R\cos\alpha}$$

$$2R\cos\alpha=2r\sin 2\alpha \quad /:2$$

$$R\cos\alpha=2r\sin\alpha\cos\alpha \quad /:\cos\alpha>0$$

$$\boxed{R=2r\sin\alpha}$$

תשובה: הוכחנו שמתקיים $R=2r\sin\alpha$ **.**

ג. נתונים, חישובים, וסימונים:

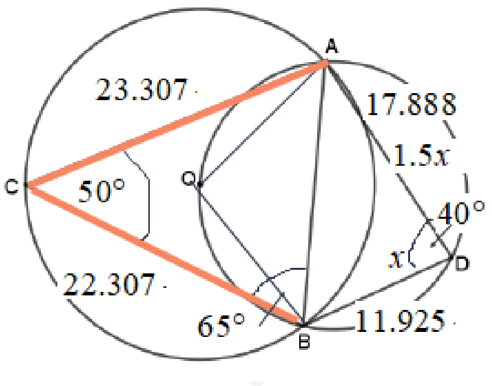
$r=10cm, \alpha=40° \quad \to AB=2\cdot 10\sin 80° \quad \to AB=19.7cm$

$\alpha=40° \quad \to \sphericalangle ACB=50°$

$CA=CB \quad \to \sphericalangle CBA=\sphericalangle CAB=65°$

$AD=1.5BD \quad \to BD=x\ , AD=1.5x$

נמצא את BD **ו-** AD **ב-** ΔABD **באמצעות משפט הקוסינוסים**



$$(AB)^2=(AD)^2+(DB)^2-2AD\cdot DB\cdot\cos\sphericalangle D$$

$$19.7^2=(1.5x)^2+x^2-2\cdot 1.5x\cdot x\cdot\cos 80°$$

$$19.7^2=2.729x^2$$

$$x=11.925 \quad \to \boxed{BD=11.925cm} \quad \boxed{AD=17.888cm}$$

נמצא את CA **ו-** CB **ב-** ΔABC **באמצעות משפט הסינוסים**

$$\frac{CA}{\sin 65°}=\frac{AB}{\sin 50°}$$

$$CA=\frac{19.7\sin 65°}{\sin 50°}$$

$$\boxed{CA=23.307} \quad \to \boxed{CB=23.307}$$

נחשב את היקף המרובע ACBD **:** 76.427 **ס"מ** $=23.307+22.307+11.925+17.888$

תשובה: היקף המרובע ACBD **הוא** 76.427 **ס"מ.**

א. נגדיר את המאורעות (ההסתברויות, מבין הסטודנטים בשנת הלימודים הראשונה במכללה **גדולה**):

A - בוחרים קורס א' B - בוחרים קורס ב' C - בוחרים קורס ג'

D - גרים בעיר $\overline{D}$ - לא גרים בעיר

נתונים ומשמעויות מידיות

(1) $P(A)=0.5\,,\, P(B)=0.25 \quad \rightarrow P(C)=0.25$

(2) $P(D)=0.5 \quad \rightarrow P(\overline{D})=0.5$

אין תלות בין המגורים בעיר לבין הבחירה בקורס א': **(3)** $P(A\cap D)=P(A)\cdot P(D)=0.5\cdot 0.5=0.25$

	A קורס א	B קורס ב	C קורס ג	
D - גרים בעיר	0.25			0.5
$\overline{D}$ - לא גרים בעיר	0.25			0.5
	0.5	0.25	0.25	1

תשובה: ההסתברות, שסטודנט בחר בקורס א' וגר בעיר, היא 0.25.

ב. <u>נתון</u>: יש תלות בין המגורים בעיר לבין הבחירה בקורס ב'.

על פי הטבלה הקיימת: $P(B)\cdot P(D)=0.5\cdot 0.25=\frac{1}{8}$.

אם $\frac{1}{8}$ מהסטודנטים הם כאלו שבחרו בקורס ב' וגרים בעיר, נקבל ש- $P(B\cap D)=P(B)\cdot P(D)$,

ומכאן שאין תלות וזאת בסתירה לנתון.

תשובה: לא ייתכן ש- $\frac{1}{8}$ מהסטודנטים הם כאלו שבחרו בקורס ב' וגרים בעיר.

ג. (1) נתון: בקורס ב', מספר הסטודנטים שלא גרים בעיר הינו כפול ממספר הסטודנטים שגרים בעיר.

$$N(B\cap\overline{D}) = 2N(B\cap D) \quad \rightarrow P(B\cap\overline{D}) = 2P(B\cap D)$$
$$P(B\cap D) + 2P(B\cap D) = 0.25$$
$$3P(B\cap D) = 0.25$$
$$P(B\cap D) = \frac{1}{12}$$

נציב בטבלה ונשלים אותה.

	A **קורס א**	B **קורס ב**	C **קורס ג**	
D **- גרים בעיר**	0.25	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0.5
$\overline{D}$ **- לא גרים בעיר**	0.25	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0.5
	0.5	0.25	0.25	1

$$P(D/C) = \frac{P(D\cap C)}{P(C)} = \frac{1/6}{0.25} = \frac{2}{3}$$

תשובה: ההסתברות לבחור סטודנט שגר בעיר, מבין הסטודנטים שבחרו <u>בקורס ג'</u>, היא $\frac{2}{3}$.

(2) בוחרים שלושה תלמידים, מתוך כיתת הלימוד של קורס ג', עד שיוצאים 2 סטודנטים שגרים בעיר.
אם הוצאו 3 סטודנטים, זאת אומרת שהשלישי גר בעיר, ו<u>בדיוק</u> אחד משני הראשונים גר בעיר.

נחשב תחילה את ההסתברות, שבדיוק אחד משני הראשונים שהוצאו מקורס ג'
גר בעיר.

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n=2$, $p = P(D/C) = \frac{2}{3}$, $k=1$ **.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$P_2(1) = \binom{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^{2-1} = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{4}{9}$$

ולכן, ההסתברות שהוצאו 3 סטודנטים, לצורך כך, היא : $p = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

תשובה: ההסתברות, ההסתברות שהוצאו 3 סטודנטים מקורס ג' כך שבדיוק שניים גרים בעיר,
היא $\frac{8}{27}$**.**

א. נתון כי בסדרה הנדסית: $2n$ איברים.

סכום הסדרה גדול פי 5 מסכום האיברים במקומות האי זוגיים, כלומר : $S_{2n} = 5S_{n\,odd}$.

	כל הסדרה	מקומות אי-זוגיים
A_1	a_1	a_1
Q	q	$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_n q^2}{a_n} = q^2$
N	$2n$	n

$$S_{2n} = 5S_{n\,odd}$$

$$\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1} = \frac{5a_1\left[(q^2)^n - 1\right]}{q^2-1} \quad / : a_1 \neq 0$$

$$\frac{q^{2n}-1}{q-1} = \frac{5(q^{2n}-1)}{(q-1)(q+1)} \quad / : \frac{q^{2n}-1}{q-1} \neq 0$$

$$1 = \frac{5}{q+1} \quad / \cdot (q+1)$$

$$q+1 = 5$$

$$\boxed{q = 4}$$

תשובה: מנת הסדרה היא 4 .

ב. נתון כי בסדרה 3 איברים עוקבים, שמכפלתם שווה ל- 1 .

(1) נראה כי בסדרה קיים איבר שערכו שווה ל- 1 .

$$a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 1$$
$$\frac{a_{n+1}}{q} \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+1}\, q = 1$$
$$(a_{n+1})^3 = 1$$
$$a_{n+1} = 1$$

או

$$a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 1$$
$$a_n \cdot a_n q \cdot a_n q^2 = 1$$
$$a_n^{\,3} \cdot q^3 = 1$$
$$(a_n q)^3 = 1$$
$$a_{n+1} = 1$$

תשובה: קיים איבר בסדרה השווה ל- 1 .

(2) נסביר למה לא ייתכן שהאיבר הראשון הוא 1 .

- **הראינו ש- $a_{n+1} = 1$, כלומר עבור n טבעי, זה איבר במקום השני ומעלה.**
- **כיוון שקיים איבר חיובי בסדרה ומנת הסדרה היא 4, הרי שהסדרה עולה, ולא ייתכן שיהיו שני איברים בסדרה השווים ל- 1 .**

תשובה: לא ייתכן כי האיבר הראשון בסדרה שווה ל- 1 .

ג. נתון כי $a_4 = 4$.

$$a_4 = 4$$
$$a_1 q^3 = 4$$
$$a_1 \cdot 4^3 = 4 \quad / : 64$$
$$\boxed{a_1 = \frac{1}{16}}$$

נתון כי סכום 2 **האיברים האחרונים בסדרה הוא** $1,280$.

$$a_{2n-1} + a_{2n} = 1280$$
$$\frac{a_{2n}}{q} + a_{2n} = 1280$$
$$\frac{a_{2n}}{4} + a_{2n} = 1280$$
$$1\frac{1}{4} a_{2n} = 1280 \quad / : 1\frac{1}{4}$$
$$\boxed{a_{2n} = 1024}$$

נמצא את מספר האיברים בסדרה $(2n)$.

$$a_1 q^{2n-1} = 1024$$
$$\frac{1}{16} \cdot 4^{2n-1} = 1024$$
$$\frac{4^{2n-1}}{4^2} = 1024$$
$$4^{2n-3} = 4^5$$
$$2n - 3 = 5$$
$$\boxed{2n = 8}$$

תשובה: מספר האיברים בסדרה הוא 8.

א. נסביר למה הגרף המנוקד (גרף II) הוא הגרף של $f'(x)$.

ובהתאם למה הגרף המלא (גרף III) הוא הגרף של $f(x)$,

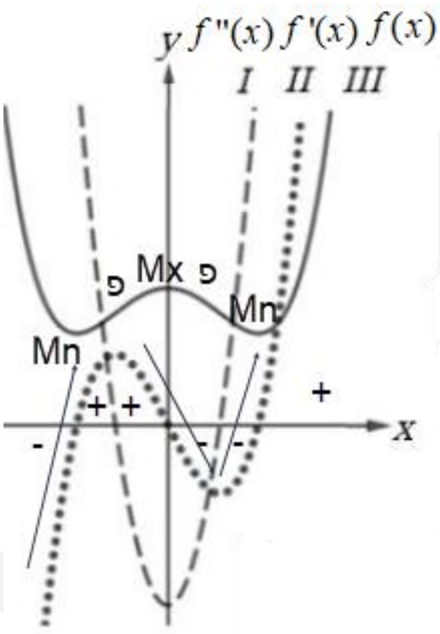
ולמה הגרף המקווקו (גרף I) הוא הגרף של $f''(x)$.

תחילה נתבונן בסימני גרף II - $f'(x)$, והתאימות בינם לבין תחומי עלייה וירידה של גרף III - $f(x)$.

$f'(x)$ עובר משליליות חיוביות, כאשר $f(x)$ עובר מירידה לעלייה (נקודת מינימום ראשונה של $f(x)$),

$f'(x)$ עובר מחיוביות לשליליות, כאשר $f(x)$ עובר מעלייה לירידה (ומקבלים נקודת מקסימום של $f(x)$),

$f'(x)$ עובר משליליות חיוביות, כאשר $f(x)$ עובר מירידה לעלייה (נקודת מינימום שנייה של $f(x)$).



ונתבונן על תחומי העלייה והירידה של II - $f'(x)$,

והתאימות בינם לסימני גרף I - $f''(x)$,

ובהתאם לתחומי קעירות כלפי מעלה, וכלפי מטה של גרף III - $f(x)$.

$f'(x)$ עובר מעלייה לירידה, כאשר $f''(x)$ עובר מחיוביות לשליליות ,

ו- $f(x)$ מקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ לקעירות כלפי מטה $(\cap)$ (נקודת פיתול ראשונה של $f(x)$).

$f'(x)$ עובר מירידה לעלייה, כאשר $f''(x)$ עובר משליליות לחיוביות ,

ו- $f(x)$ מקעירות כלפי מטה $(\cap)$ לקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ (נקודת פיתול שנייה של $f(x)$).

תשובה: גרף I - $f''(x)$, גרף II - $f'(x)$, גרף III - $f(x)$.

ב. $f'(x)=2x\cdot(x^2-1)^n$, n **פרמטר טבעי.**

ניתן לחשוב על-פי הגרף של $f'(x)$ **, הסימטרי לראשית הצירים, ש-** $f'(x)$ **אי-זוגית. נוכיח זאת.**

$$f'(x)=2x\cdot(x^2-1)^n$$
$$f'(-x)=2\cdot(-x)\cdot\left[(-x)^2-1\right]^n$$
$$f'(-x)=-2\cdot x\cdot(x^2-1)^n$$
$$\boxed{f'(-x)=-f'(x)}$$

תשובה: $f'(x)$ **פונקציה אי זוגית.**

ג. $f'(x)=2x\cdot(x^2-1)^n$, n **פרמטר טבעי.**

הגורם $2x$ **בפונקציית הנגזרת מחליף סימנים עבור** $x=0$.

אם n **מספר אי-זוגי, אז הגורם** $(x^2-1)^n$ **בפונקציית הנגזרת מחליף סימנים עבור** $x=\pm1$,

וניתן לראות, שגרף הנגזרת (גרף II **) מחליף סימנים עבור** $x=\pm1$ **, וכמובן גם עבור** $x=0$.

לעומת זאת, כאשר n **מספר זוגי,** $(x^2-1)^n$ **לא יחליף סימנים (הוא תמיד אי-שלילי).**

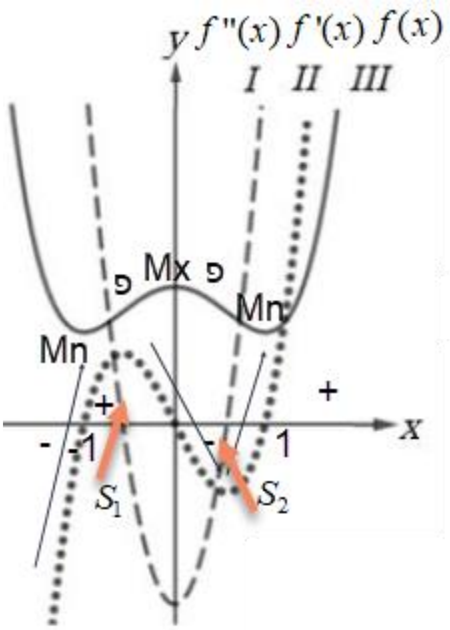
תשובה: n **מספר אי זוגי.**

ד. נסמן את השטחים המבוקשים, שסכומם שווה ל- 1 .

כיוון ש- $f'(x)$ **פונקציה אי זוגית, הרי ש-** $S_1=S_2=\frac{1}{2}$

נחשב את השטח המבוקש,

עם אינטגרל המבוסס על זיהוי הנגזרת הפנימית.



$$S_1=\int_{-1}^{0}(f'(x)-0)\,dx$$
$$S_1=\int_{-1}^{0}\left[(x^2-1)^n\cdot 2x\right]dx$$
$$S_1=\left[\frac{(x^2-1)^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{0}$$
$$\left.\begin{array}{l} x=0:\quad \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1} \quad \leftarrow n+1\ is\ even \\ x=-1:\quad 0 \end{array}\right\}\boxed{S_1=\frac{1}{n+1}}$$
$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}$$
$$\boxed{n=1}$$

תשובה: $n=1$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x$ **בתחום** $0\le x\le\pi$.

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, כלומר** $\boxed{(0,0)} \leftarrow \quad f(0)=\sin 0\cdot\cos^2 0=0$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$:

$$0=\sin x\cdot\cos^2 x$$

$$\sin x=0 \quad \cos x=0$$

$$x=\pi k \quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$\boxed{(0,0)},\ \boxed{(\pi,0)},\ \boxed{(\frac{\pi}{2},0)}$$

תשובה: $(\pi,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(0,0)$.

(2) נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן:

ניתן לראות, שבתחום הנתון $0\le x\le\pi$, $f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x\ge 0$,

ולכן נקודות הקצה: $(\pi,0)$ **ו-** $(0,0)$ **הן נקודות מינימום.**

$$f'(x)=\cos x\cdot\cos^2 x+\sin x\cdot 2\cos x(-\sin x)$$

$$\boxed{f'(x)=\cos x\,(\cos^2 x-2\sin^2 x)}$$

$$\cos x=0 \quad \rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2}+\pi k} \quad k=0\rightarrow(\frac{\pi}{2},0)$$

$$2\sin^2 x=\cos^2 x \quad /:2\cos^2 x\ne 0$$

$$\tan^2 x=0.5 \quad \rightarrow \tan x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{x=0.615+\pi k} \quad k=0\rightarrow \boxed{(0.615,\,0.385)}$$

$$\boxed{x=-0.615+\pi k} \quad k=1\rightarrow \boxed{(2.526,\,0.385)}$$

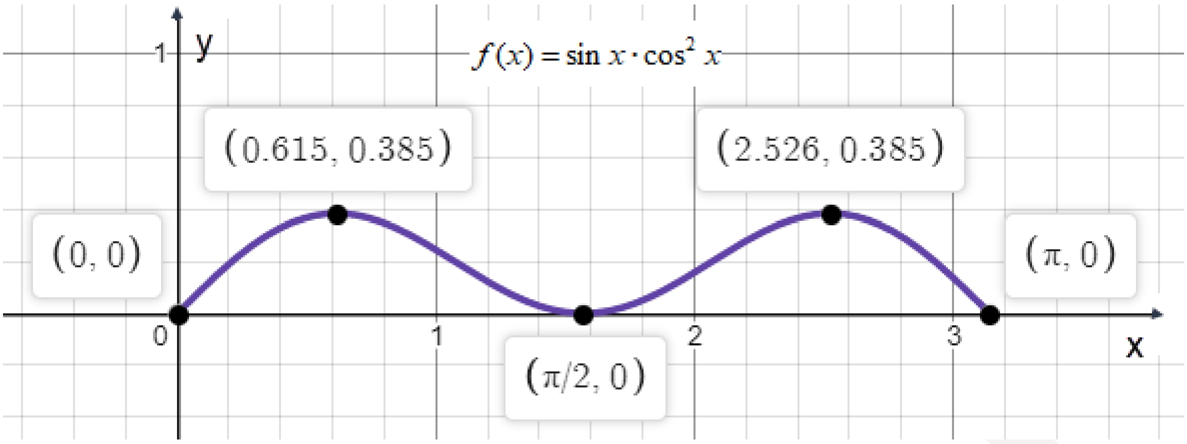
נמצא את ערכי הפונקציה בנקודות החשודות כקיצון.

נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה.

x	2π		2.526		π		0.615		0
$f(x)$	0		0.385		0		0.385		0
$f'(x)$									
מסקנה	**Min**	↘	**Max**	↗	**Min**	↘	**Max**	↗	**Min**

תשובה: $(\pi,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(0,0)$ **מינימום,** $(2.526,\,0.385)$, $(0.615,\,0.385)$ **מקסימום.**

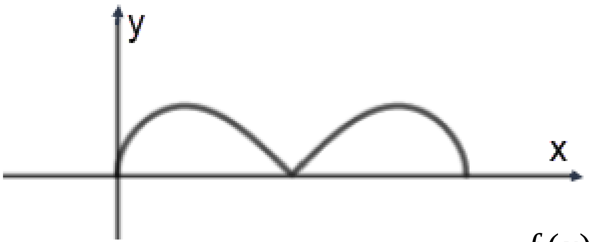
ב. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.



ג. נתאים את הגרפים לפונקציות.

$h(x)=\sqrt{\sin x\cdot\cos^2 x}$ בתחום $0\le x\le\pi$, גם פונקציה אי-שלילית, ולכן הגרף המתאים הוא גרף ג.

גרף ג $h(x)=\sqrt{\sin x\cdot\cos^2 x}$



נשים לב: $h(x)=\sqrt{f(x)} \quad \to h'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

כלומר, תחומי עלייה וירידה לא משתנים,

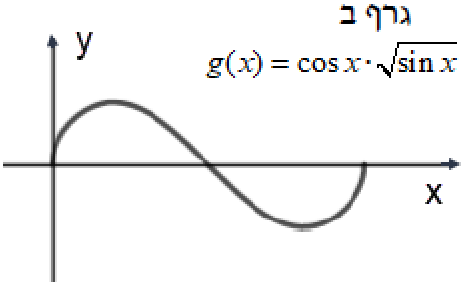
אבל המיוחד הוא שהנגזרת אינה מוגדרת בנקודות האפס של $f(x)$,

וכפי שניתן לראות בגרף ג – יש בשלוש נקודות אלו "שפיץ".

$g(x)=\cos x\cdot\sqrt{\sin x}$ חיובית כאשר $\cos x>0$ בתחום $0<x<\dfrac{\pi}{2}$,

ושלילית כאשר $\cos x<0$ בתחום $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$, ולכן הגרף המתאים הוא גרף ב.

גרף ב
$g(x)=\cos x\cdot\sqrt{\sin x}$



נשים לב: $g(x)=\begin{cases}\sqrt{f(x)} & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ -\sqrt{f(x)} & \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$.

$$g'(x)=-\sin x\cdot\sqrt{\sin x}+\frac{\cos^2 x}{2\sqrt{\sin x}}=\frac{-2\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sqrt{\sin x}}$$

והפעם הנגזרת אינה מוגדרת בנקודות $(\pi,0)$, $(0,0)$,

וכפי שניתן לראות בגרף ב – יש בשתי נקודות אלו "שפיץ".

הערה: $h(x)=|g(x)|$.

תשובה: $h(x)=\sqrt{\sin x\cdot\cos^2 x}$ גרף ג , $g(x)=\cos x\cdot\sqrt{\sin x}$ גרף ב.