

פרק ראשון - שאלה מס' 1 – שאלת חובה

ענו על שלוש מתוך ארבע הסעיפים הבאים :

1. לפניך טענה:

אם ל- n טבעי מסוים $n^3 - n$ מתחלק ב- 3 ללא שארית, אז גם $(n + 1)^3 - (n + 1)$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

דן אומר :

הטענה שלמעלה מספיקה כדי להוכיח שהביטוי $n^3 - n$ מתחלק ב-3 ללא שארית לכל n טבעי. האם דן צודק? נמק את תשובתך.

2. נתונה פונקציה זוגית <https://www.desmos.com/calculator> שגזירה בכל נקודה.

לפניך טענה: "פונקציית הנגזרת של הפונקציה הנתונה היא אי-זוגית".

קבע אם הטענה נכונה או לא נכונה. אם הטענה נכונה – הוכח אותה, אם לא – הצג דוגמה נגדית.

3. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-1.1 \leq x \leq 4.4$.

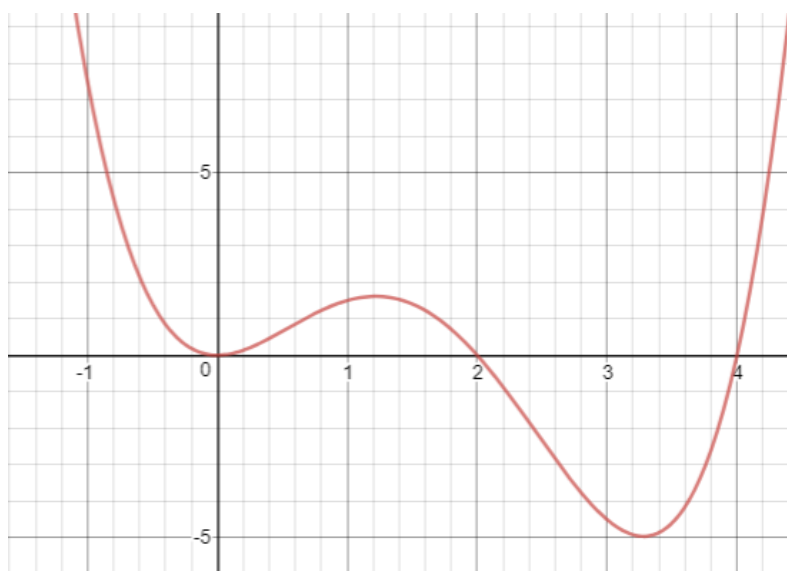
נגדיר: $F(a) = \int_{-1}^a f(x) dx$, $a > -1$.

1. האם $F(0)$ חיובי או שלילי? נמק.

2. תן דוגמה לערך של a שבו הפונקציה $F(a)$ יורדת.

3. באיזה ערך של a יש לפונקציה $F(a)$ מקסימום? נמק.

ייתכן שיינתנו רק שני סעיפים.



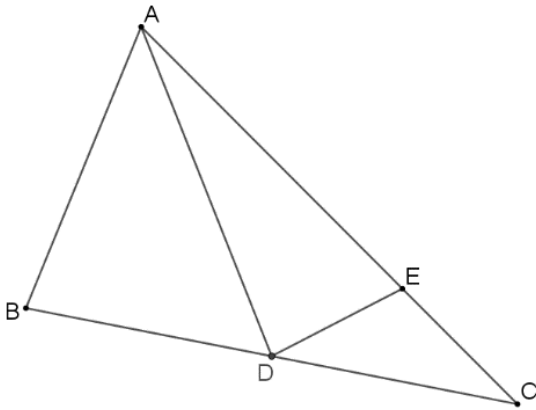
4. נתונה סדרה חשבונית ובה $2n+1$ איברים. הפרש הסדרה הוא d .

- (1) הוכח כי האיבר הראשון, האיבר האמצעי והאיבר האחרון של הסדרה הנתונה מהווים סדרה חשבונית.
- (2) הבע את הפרש הסדרה של שלושת האיברים מסעיף א באמצעות n ו- d .

פרק שני - גיאומטריה, טריגונומטריה במישור, הסתברות וסטטיסטיקה.
יש לענות על 2 מתוך 3 שאלות. משקל כל שאלה 19 נקודות

שאלה מס' 2

במשולש $\triangle ABC$ הקטע AD הוא תיכון לצלע BC . הנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שהמרובע $ABDE$ הוא בר חסימה במעגל.



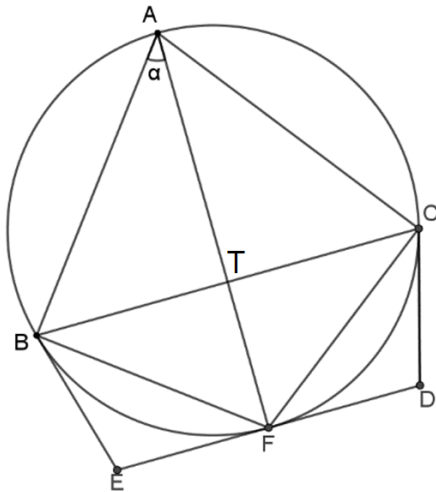
1. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

2. נתון גם: $\frac{AE}{EC} = \frac{17}{8}$ חשב את היחס: $\frac{BC}{AC}$.

3. נתון כי שטח המשולש $\triangle DEC$ הוא S . הבע באמצעות S את

שטח המרובע $ABDE$.

שאלה מס' 3



במעגל שרדיוסו R חסום משולש ABC .
ידוע כי:

AF הוא קוטר במעגל. המשיק למעגל בנקודה F מקביל למיתר BC .
הנקודה E היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל ב- F עם המשיק למעגל ב- B .
הנקודה D היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל ב- F עם המשיק למעגל ב-

AF ו- BC נפגשים בנקודה T .

נתונה הזווית: $\angle BAF = \alpha$.

1. בטא באמצעות α את $\angle BEF$. הסבר שיקוליך בקצרה.

2. הוכח כי: $BE = R \tan \alpha$.

3. חשב את מידת הזווית α עבורה שטח המשולש BFC גדול פי 3 משטח המשולש

BEF .

4. עבור $\alpha = 30^\circ$, בטא באמצעות R את אורכו של הקטע BD .

שאלה מס 4

- ערכו סקר בין משתתפי כינוס בחירות ומצאו: 20% מהנשים קוראות עיתון בוקר. מספר הגברים גדול פי a ממספר הנשים שקוראות עיתון בוקר.
- א. בטא באמצעות a את ההסתברות לבחור גבר מבין כלל תושבי העיר.
- ב. מהי ההסתברות לבחור משתתף/משתתפת שקורא/קוראת עיתון בוקר, אם ידוע שהמאורעות: "נבחרה אישה" ו-"נבחר מישהו שקורא/קוראת עיתון בוקר" בלתי תלויים? הסבר.
- ג. עבור הסעיפים הבאים: ידוע כי $a = 6$.
- נבחר באקראי משתתף/משתתפת מבין באי הכינוס. ידוע שהוא קורא/קוראת עיתון בוקר. מה סביר יותר, שהוא גבר או אישה?
- ד. הנח כי מספר המשתתפים בכינוס גדול מאד. בוחרים באקראי 6 ממשתתפי הסקר (גברים או נשים). מהי ההסתברות לבחור לפחות חמש נשים שקוראות עיתון בוקר?

פרק שלישי - סדרות, אינדוקציה וחדו"א.

יש לענות על 2 מתוך 3 שאלות. משקל כל שאלה 19 נקודות
שאלה מס' 5

הסדרה a_1, a_2, a_3, \dots מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה :

$$\{S_1 = 9 \quad S_{n+1} = S_n - 7n + 9$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad \text{כאשר :}$$

א. הוכח שהסדרה a_1, a_2, a_3, \dots היא חשבונית.

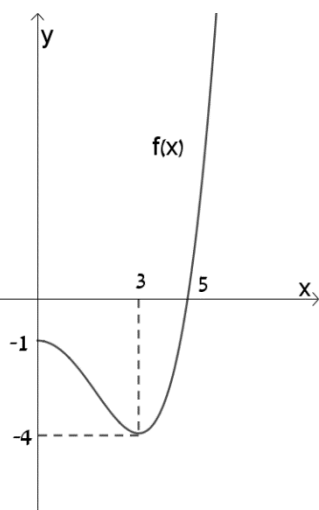
$$b_{n+1} - b_n = a_n \quad \text{מגדירים סדרה נוספת :}$$

ב. חשב את הסכום הבא (רשום תשובתך באמצעות שברים, או בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית) :

$$\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + \frac{b_3 - b_2}{a_2 - a_3} + \frac{b_4 - b_3}{a_3 - a_4} + \dots + \frac{b_{20} - b_{19}}{a_{19} - a_{20}}$$

שאלה מס' 6

לפניך חלק מגרף של פונקציה זוגית: $f(x)$, המוגדרת לכל x :



1. שרטט את הגרף השלם של הפונקציה: $\frac{1}{f(x)}$. פרט בקצרה שיקולידך.

עבור הסעיפים הבאים ידוע בנוסף כי עבור פונקציה נוספת $g(x)$ מתקיים:
 $-f(x) = g'(x)$

2. שרטט את הגרף השלם של הפונקציה $g'(x)$. פרט בקצרה שיקולידך.

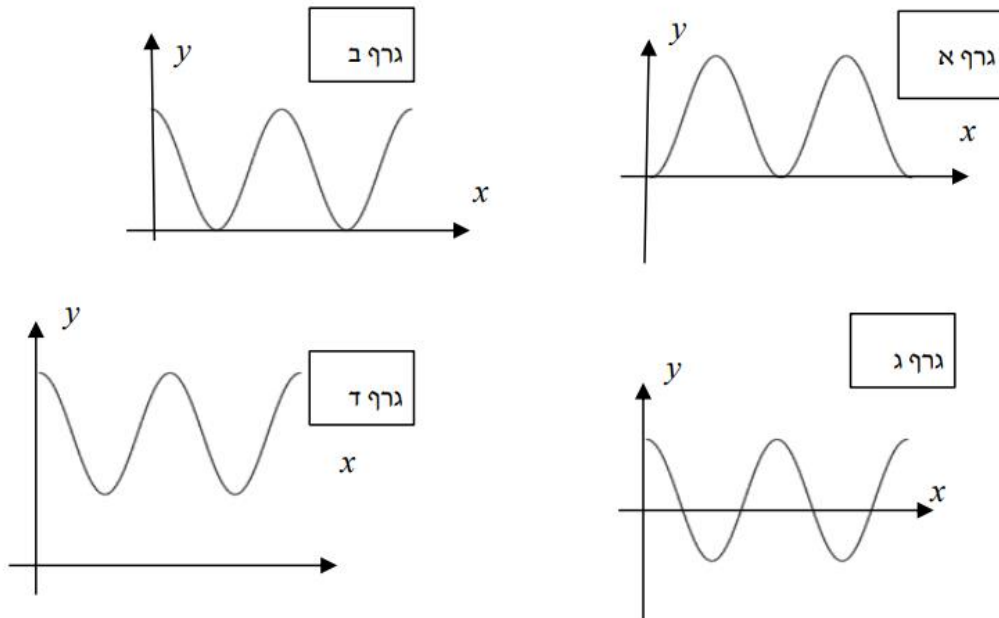
3. היעזר בנתונים שבשרטוט ורשום את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן. נמק בקצרה.

4. היעזר בנתונים שבשרטוט ורשום את תחומי הקעירות מעלה של $g(x)$. נמק בקצרה.

5. שרטט גרף עבור $g''(x)$ (הנגזרת השנייה של $g(x)$). נמק בקצרה.

6. מהו גודל השטח הכלוא בין הגרף של $g''(x)$ לבין ציר ה- x ברביע השלישי? נמק.

נתונות הפונקציות: $f(x) = 2\cos^2 2x$, $g(x) = \cos 4x + 2$.
 א. מצא לכל אחת מהפונקציות את הגרף המתאים מבין ארבעת הגרפים הבאים, נמק קביעתך.



ב. הוכח: $g(x) = f(x) + c$ מה ערכו של c ?

ג. בכמה גדול $\int_0^\pi g(x) dx$ מ- $\int_0^\pi f(x) dx$. נמק תשובתך. (אין חובה לחשב במפורש את שני האינטגרלים).

ד. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר מסיבוב סביב ציר ה- x של גרף הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

בהצלחה!!!