



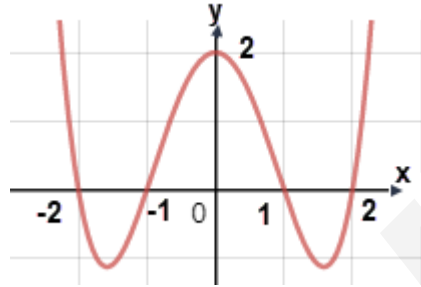
מבחן לדוגמה 5, שאלון 35571 מועד קיץ תש"פ

מורים יקרים,
להלן פתרון בחינת בגרות לדוגמה מהתוכנית החדשה.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

נתונה $f(x)$, המוגדרת לכל x .

- (1) אם הפונקציה זוגית, כלומר $f(-x) = f(x)$ והגרף סימטרי לציר ה- y , אז זה השרטוט המתאים (נקודות המינימום צריכות להיות קצת גבוהות יותר...)



- (2) אם הפונקציה אי-זוגית, אז $f(-x) = -f(x)$ והגרף סימטרי לראשית הצירים. בנוסף, כיוון ש- $f(x)$ מוגדרת לכל x , הרי שהיא חותכת את ציר ה- y בראשית $(0, 0)$, וזאת בניגוד לשרטוט הנתון, בו היא חותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, 2)$. תשובה: לא ייתכן שהפונקציה אי-זוגית.

(1) בסדרה הנדסית, המנה בין כל שני איברים עוקבים קבועה.

נתון $n > k > 0$. נסמן ב- q את מנת הסדרה.

$$a_{n+k} \cdot a_{n-k} = a_n \cdot q^k \cdot \frac{a_n}{q^k}$$

$$\boxed{a_{n+k} \cdot a_{n-k} = a_n^2}$$

תשובה: הוכחנו ש- $a_n^2 = a_{n+k} \cdot a_{n-k}$

(2) בסדרה הנדסית יש $2n+1$ איברים, מספר אי-זוגי של איברים.

ולכן $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n+1}$ הוא האיבר האמצעי בסדרה.

בסדרה הנדסית, שבה מספר אי-זוגי של איברים,

שווה מכפלת איבריה (מסומנת באות \prod) לאיבר האמצעי בחזקת מספר האיברים.

$$\prod_{n=1}^{2n+1} a_n = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \dots \cdot a_{2n+1} =$$

$$\cdot \prod_{n=1}^{2n+1} a_n = \frac{a_{n+1}}{q^n} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n+1}}{q^2} \cdot \frac{a_{n+1}}{q} \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+1} \cdot q \cdot a_{n+1} \cdot q^2 \cdot \dots \cdot a_{n+1} \cdot q^n$$

$$\boxed{\prod_{n=1}^{2n+1} a_n = (a_{n+1})^{2n+1}}$$

$$\cdot \prod_{n=1}^{2n+1} a_n = (a_{n+1})^{2n+1} \text{ , לכן}$$

דרך חלופית:

בתת-סעיף (1) הראינו כי $a_n^2 = a_{n+k} \cdot a_{n-k}$

מכאן שמכפלת כל שני איברים, הממוקמים במרחק זהה מהאיבר האמצעי, היא a_n^2 .

יש n זוגות כאלו, ואם נכפול אותם, וגם את האיבר האמצעי,

$$\cdot \prod_{n=1}^{2n+1} a_n = [(a_{n+1})^2]^n \cdot a_{n+1} = (a_{n+1})^{2n} \cdot a_{n+1} = (a_{n+1})^{2n+1} \text{ נקבל}$$

$$a_{n+1} = 9, \quad \prod_{n=1}^{2n+1} a_n = 387,420,489$$

$$387,420,489 = 9^{2n+1}$$

$$9^9 = 9^{2n+1}$$

$$\boxed{9 = 2n + 1}$$

תשובה: מספר האיברים בסדרה הוא 9.

נתונה הסדרה $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \dots$, שסכומה האינסופי הוא $\frac{1}{3}$.

ברור שהסדרה היא הנדסית, כאשר: $a_1 = \cos x$, $q = -\cos x$.

כיוון שסכומה האינסופי מתכנס, אז גם $-1 < -\cos x < 1$,

וניתן להשתמש בנוסחה לסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$$

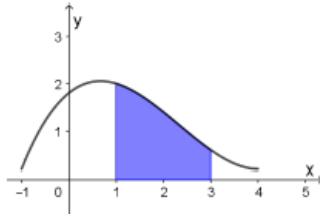
$$1 + \cos x = 3 \cos x$$

$$1 = 2 \cos x$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

תשובה: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.



נתון: $\int_1^3 f(x)dx = s$, ואם הגרף הנתון הוא הגרף של $f(x)$ אז זה גודלו של השטח המסומן.
נסמן ב- $F(x)$ את הפונקציה הקדומה של $f(x)$.

$$\int_1^3 f(x)dx = F(x) \Big|_1^3 \rightarrow \int_1^3 f(x)dx = F(3) - F(1) \rightarrow \boxed{F(3) - F(1) = s}$$

$$\int_4^6 f(x-3)dx = F(x-3) \Big|_4^6 = F(6-3) - F(4-3) = F(3) - F(1) = s \quad .1$$

ניתן גם להסביר זאת בכך ש- $f(x-3)$ היא הזזה 3 יחידות ימינה של $f(x)$, ומכיוון שגם הגבולות זזו 3 יחידות ימינה – גודל השטח לא השתנה.

$$\int_4^6 f(x-3)dx = s \quad \text{תשובה:}$$

$$\int_{-1}^1 f(x+3)dx = F(x+3) \Big|_{-1}^1 = F(1+3) - F(-1+3) = F(4) - F(2) = ? \quad .2$$

ניתן גם להסביר זאת בכך ש- $f(x+3)$ היא הזזה 3 יחידות שמאלה של $f(x)$, הגבולות זזו רק 2 יחידות שמאלה – לא ניתן לחשב את גודל השטח, שכן הפונקציה אינה אחידה. תשובה: לא ניתן לחשב את ערך האינטגרל.

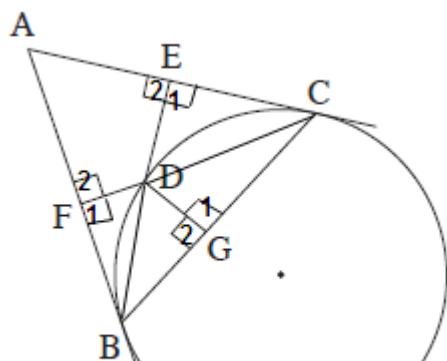
$$\int_3^6 f(x-2)dx = F(x-2) \Big|_3^6 = F(6-2) - F(3-2) = F(4) - F(1) = ? \quad .3$$

ניתן גם להסביר זאת בכך ש- $f(x-2)$ היא הזזה 2 יחידות ימינה של $f(x)$, כאשר הגבול התחתון גדל ב- 2, אולם הגבול העליון גדל ב- 3. תשובה: לא ניתן לחשב את ערך האינטגרל.

$$\int_2^4 f(x-1)dx = F(x-1) \Big|_2^4 = F(4-1) - F(2-1) = F(3) - F(1) = s \quad .4$$

ניתן גם להסביר זאת בכך ש- $f(x-1)$ היא הזזה 1 יחידות ימינה של $f(x)$, ומכיוון שגם הגבולות זזו 1 יחידות ימינה – גודל השטח לא השתנה.

$$\int_2^4 f(x-1)dx = s \quad \text{תשובה:}$$



נתונים

1. AB משיק למעגל בנקודה B .2 AC משיק למעגל בנקודה C
 3. $\angle F_1 = \angle F_2 = 90^\circ$.4. $\angle E_1 = \angle E_2 = 90^\circ$.5. $\angle G_1 = \angle G_2 = 90^\circ$
 צ"ל: א. $\triangle DFB \sim \triangle DGC$ ג. $DF \cdot DE = DG^2$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	6	AB משיק למעגל בנקודה B	נתון
6	7	$\angle FBD = \angle DCG$ (ז)	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על המיתר מצידו השני
3	8	$\angle F_1 = 90^\circ$	נתון
5	9	$\angle G_1 = 90^\circ$	נתון
9, 8	10	$\angle F_1 = \angle G_1$ (ז)	כלל המעבר
10, 7	11	$\triangle DFB \sim \triangle DGC$	משפט דמיון זווית זווית
מ.ש.ל. א			
2	12	AC משיק למעגל בנקודה C	נתון
4	13	$\angle E_1 = 90^\circ$	נתון
5	14	$\angle G_2 = 90^\circ$	נתון
	15	$\angle EDC = \alpha$	סימון
15, 13	16	$\angle ECD = 90^\circ - \alpha$	סכום זוויות $\triangle EDC$ 180°
16, 12	17	$\angle DBG = 90^\circ - \alpha$	זווית בין משיק למיתר
17, 14	18	$\angle BDG = \alpha$	סכום זוויות $\triangle BDG$ 180°
15, 12	19	$\angle BDG = \angle EDC$ (ז)	כלל המעבר
לא ניתן להסיק שזוויות אלו קודקודיות, כי אין להן שוקיים משותפות			
מ.ש.ל. ב			
14, 8	20	$\angle E_1 = \angle G_2$ (ז)	כלל המעבר
20, 19	21	$\triangle CED \sim \triangle BGD$	משפט דמיון זווית זווית
21	22	$\frac{CE}{BG} = \frac{CD}{BD} = \frac{ED}{GD}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
11	23	$\frac{DG}{DF} = \frac{DC}{DB} = \frac{GC}{FB}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
23, 22	24	$\frac{ED}{GD} = \frac{DG}{DF}$	כלל המעבר
20	21	$DF \cdot DE = DG^2$	חישוב

הסבר	מס'	טענה	נימוק
מ.ש.ל. ג			
<p>אם DG ממוצע גיאומטרי, של הקטעים שהוא מקצה על המיתר, אז $\triangle BDC$ ישר זווית ($\sphericalangle BDC = 90^\circ$), ומכאן ש-BC הוא קוטר (כי נשען על זווית היקפית ישרה). כתוצאה מכך, מתקבל ש-$\sphericalangle BCA = \sphericalangle CBA = 90^\circ$ (קוטר מאונך למשיק בנקודת ההשקה). והגענו לסתירה, כי מתקבל שב-$\triangle ABC$ יש שתי זוויות ישרות מסקנה – לא יתכן ש-DG ממוצע גיאומטרי, של הקטעים שהוא מקצה על המיתר.</p>			
מ.ש.ל. ד			

א. $\sphericalangle BDC = \alpha$ (נתון)ב. $\sphericalangle BCD = 90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר)

$$\sphericalangle COA = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\sphericalangle OCA = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha + 60^\circ) = 2\alpha - 60^\circ$$

נמצא את BC ב- $\triangle DBC$

$$\sin \alpha = \frac{BC}{BO}$$

$$\boxed{2R \sin \alpha = BC}$$

תשובה: $BC = 2R \sin \alpha$ ב. נמצא את AO ב- $\triangle AOC$ באמצעות משפט הסינוסים

$$\frac{AO}{\sin(2\alpha - 60^\circ)} = \frac{OC}{\sin 60^\circ}$$

$$\boxed{AO = \frac{2R\sqrt{3} \sin(2\alpha - 60^\circ)}{3}}$$

תשובה: $AO = \frac{2R\sqrt{3} \sin(2\alpha - 60^\circ)}{3}$ ג. $\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle AOC}} = \sqrt{3} \leftarrow \frac{BO}{AO} = \sqrt{3}$ (גובה משותף, לקודקוד C, מצלעות האלו)(1) נחשב את גודל הזווית α

$$\frac{3R}{2R\sqrt{3} \sin(2\alpha - 60^\circ)} = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} = \sin(2\alpha - 60^\circ)$$

$$2\alpha - 60^\circ = 30^\circ + 360^\circ k \quad 2\alpha - 60^\circ = 150^\circ + 360^\circ k$$

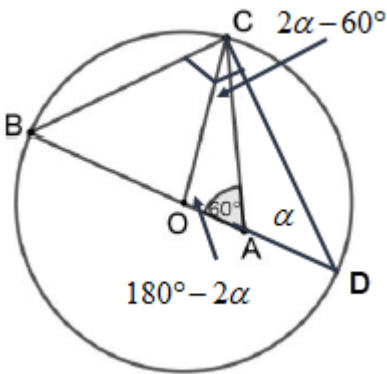
$$\alpha = 45^\circ + 180^\circ k$$

$$\alpha = 105^\circ + 180^\circ k$$

$$\boxed{\alpha = 45^\circ}$$

תשובה: $\alpha = 45^\circ$ (2) נחשב את $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ACO}} = \frac{AD}{AO}$ (גובה משותף, לקודקוד C, מצלעות האלו)

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ACO}} = \frac{AD}{AO} = \frac{OD - AO}{AO} = \frac{OD}{AO} - \frac{AO}{AO} = \boxed{\sqrt{3} - 1}$$

תשובה: $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ACO}} = \sqrt{3} - 1$ 

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - עברו מבחן ראשון \bar{A} - לא עברו מבחן ראשון
 B - עברו מבחן שני \bar{B} - לא עברו מבחן שני

נתונים ומשמעויות מיידיותעל-מנת למלא טבלה של 2×2 נדרשות שלוש משוואות.

(1) $P(A) = 0.7 \rightarrow P(\bar{A}) = 0.3$

(2) $4P(A \cap \bar{B}) = P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{5} \cdot P(A) = \frac{4}{5} \cdot 0.7 = 0.56$

(3) $P(\bar{B} / \bar{A}) = 0.4 \rightarrow P(\bar{B} \cap \bar{A}) = 0.6$

פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית

$$P(\bar{B} / \bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$0.4 = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{0.3}$$

$$0.12 = P(\bar{B} \cap \bar{A})$$

	\bar{A} לא עברו מבחן ראשון	A עברו מבחן ראשון	
0.74	0.18	0.56	B עברו מבחן שני
0.26	0.12	0.14	\bar{B} לא עברו מבחן שני
1	0.3	0.7	

$$P(\bar{A} / B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0.18}{0.74} = \frac{9}{37}$$

תשובה: ההסתברות שהנבחר באקראי לא עבר בהצלחה את המבחן הראשון,

אם ידוע שעבר את המבחן השני, היא $\frac{9}{37}$.

ב. בוחרים ששה מכלל תלמידי בית הספר.

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n = 6$, $p(\text{passed both exams}) = P(A \cap B) = 0.56$, $k = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$P_6(2) = \binom{6}{2} \cdot 0.56^2 \cdot (1-0.56)^{6-2} = 15 \cdot 0.56^2 \cdot 0.44^4 = 0.1763$$

תשובה: ההסתברות, ששליש מששת הנבחרים עברו את שני המבחנים, היא 0.1763.

א. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$m(x=1) = g'(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3}} = \frac{1}{2}$$

תשובה: שיפוע המשיק לגרף הפונקציה, בנקודה שבה $x=1$, הוא $\frac{1}{2}$.

ב. נתון גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$. נשים לב ש- $f(x) = g'(x)$.

תחום ההגדרה הוא כל x , ולכן אין אסימפטוטות המקבילות לציר ה- y .
סימן ערכי פונקציית הנגזרת נקבע בהתאם למונה.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} = \pm 1.$$

כאשר $x > 0$ הפונקציה חיובית, וכאשר $x < 0$ הפונקציה שלילית.

תשובה: ל- $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות מקבילות לציר ה- x : $(x \rightarrow +\infty) y = 1$, $(x \rightarrow -\infty) y = -1$.

ג. לגרף הפונקציה $f(x)$ העבירו משיק, ברביע הראשון, ששיפועו $\frac{3}{8}$.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}}{x^2 + 3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 3 - x^2}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{(x^2 + 3)^3}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{(x^2 + 3)^3}} = \frac{3}{8}$$

$$64 = (x^2 + 3)^3$$

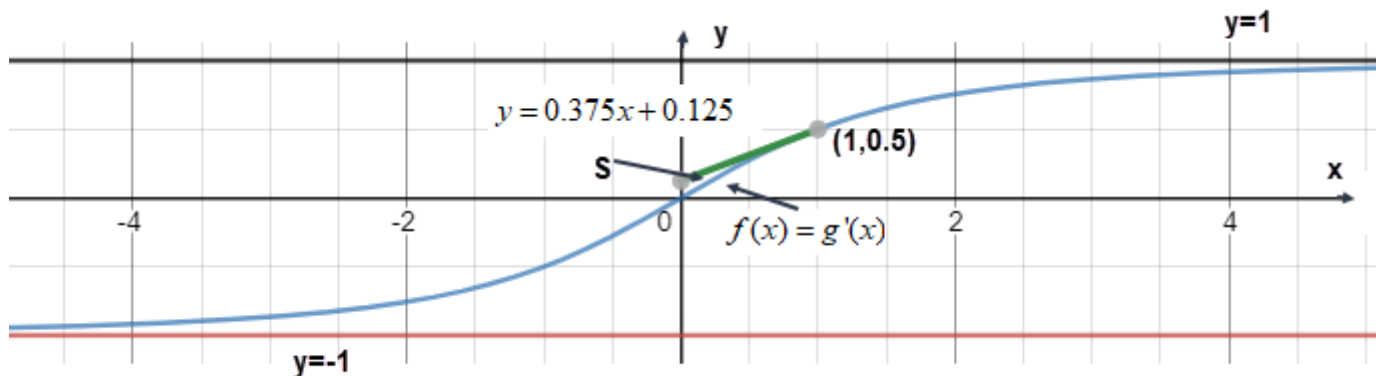
$$4 = x^2 + 3$$

$$x=1 \leftarrow x > 0$$

מכאן שנקודת ההשקה, ברביע הראשון, היא $(1, 0.5)$.

$$y - 0.5 = \frac{3}{8}(x - 1) \rightarrow y = 0.375x + 0.125$$

ומשוואת המשיק היא $y = 0.375x + 0.125$



כמו, שציינו קודם, ולכן $f(x) = g'(x)$ ו $f(x) dx = g(x) + c$

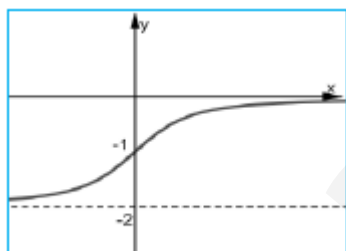
$$S = \int_0^1 (0.375x + 0.125 - f(x)) dx$$

$$S = \left[\frac{0.375x^2}{2} + 0.125x - g(x) \right]_0^1$$

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \quad 0.3125 - g(1) = 0.3125 - 2 = -1.6875 \\ x=0 \quad 0 - g(0) = -\sqrt{3} \end{array} \right\} S = 0.0446$$

תשובה: גודל השטח המוגבל הוא 0.0446.

ד. נרשום הצגה אלגברית אפשרית, לארבעת הגרפים, בהתבסס על הפונקציה $f(x)$.

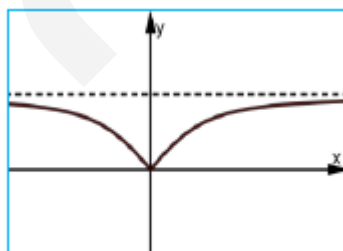


גרף ב

$$l(x) = f(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1$$

הזזה 1 יחידות כלפי מטה

$y = -2$, $y = 0$ אסימפטוטות אופקיות

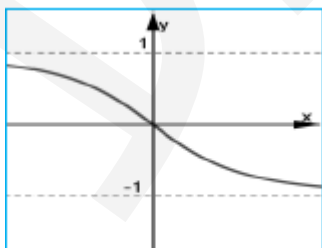


גרף א

$$k(x) = |f(x)| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \right|$$

שיקוף, סביב ציר ה- x של $f(x)$,

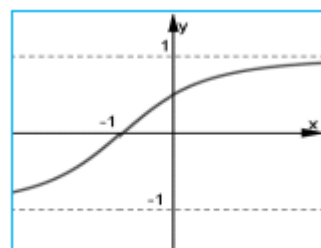
עבור $f(x) < 0$. $y = 1$ אסימפטוטה יחידה



גרף ד

$$q(x) = -f(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

שיקוף סביב ציר ה- x
הפונקציה יורדת לכל x



גרף ג

$$m(x) = f(x+1) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 3}}$$

הזזה 1 יחידות שמאלה
אין שינוי באסימפטוטות ותחומי עלייה וירידה

א. נתונה סדרה חשבונית שבה $a_1 = 4, d = 5$.

$$S_n = \frac{n[2 \cdot 4 + 5(n-1)]}{2} = \frac{n(3+5n)}{2} = 2.5n^2 + 1.5n$$

תשובה: $S_n = 2.5n^2 + 1.5n$.

ב. צ"ל: $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_k = \frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 1$

אגף ימין: $\frac{1 \cdot (1+1)(5 \cdot 1 + 7)}{6} = 4$ אגף שמאל: $S_1 = a_1 = 4$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n = 1$.

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n = k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_k = \frac{k(k+1)(5k+7)}{6}$,

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_k}{\downarrow \text{induction}} + \frac{S_{k+1}}{\downarrow \text{טענת } n} &= \frac{(k+1)(k+2)(5(k+1)+7)}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{k(k+1)(5k+7)}{6} + 2.5(k+1)^2 + 1.5(k+1) &= \frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{(k+1)[k(5k+7)+15(k+1)+9]}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{(k+1)(5k^2+22k+24)^*}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6} \end{aligned}$$

* פרוק הביטוי $5k^2 + 22k + 24$ ע"י משוואה ריבועית:

$$5k^2 + 22k + 24 = 0 \rightarrow k = -2, -\frac{12}{5} \rightarrow 5(k+2)(k+\frac{12}{5}) \rightarrow (k+2)(5k+12)$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_k = \frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$ נכון לכל n טבעי.

ג. $S_4 + S_5 + \dots + S_{16} = (S_1 + S_2 + \dots + S_{16}) - (S_1 + S_2 + S_3)$

$$S_4 + S_5 + \dots + S_{16} = \left(\frac{16 \cdot (16+1)(5 \cdot 16 + 7)}{6} \right) - \left(\frac{3 \cdot (3+1)(5 \cdot 3 + 7)}{6} \right) = 3944 - 44 = 3900$$

תשובה: $S_4 + S_5 + \dots + S_{16} = 3,900$.

א. בשרטוט מתואר הגרף של $f(x) = \frac{(x-a)^3}{bx^3 - 3x^2}$.

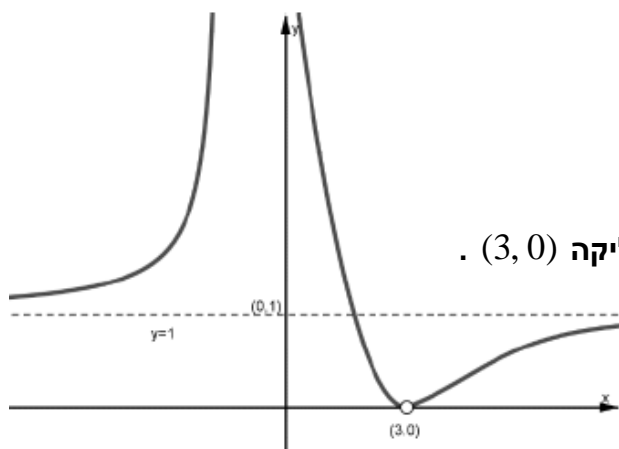
תחום ההגדרה הוא $x \neq 0, 3$.

$x=3$ מאפס את המכנה: $b \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 = 0 \rightarrow \boxed{b=1}$

$x=3$ מאפס גם את המונה, כי קיימת נקודת אי רציפות סליקה $(3, 0)$.

$(3-a)^3 = 0 \rightarrow \boxed{a=3}$

תשובה: $a=3, b=1$.



ב. $f(x) = \frac{(x-3)^3}{x^3 - 3x^2} = \frac{(x-3)^3}{x^2(x-3)} \rightarrow \boxed{f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2}, x \neq 0, 3}$

$$\frac{(x-3)^2}{x^2} = 1$$

$$(x-3)^2 = x^2$$

$$-6x + 9 = 0$$

$$x = 1.5 \rightarrow (1.5, 1)$$

$(1.5, 1)$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם האסימפטוטה האופקית שלה.

$$f'(x) = \frac{2(x-3)x^2 - 2x(x-3)^2}{x^4} \rightarrow m_{(x=1.5)} = f'(1.5) = -\frac{8}{3}$$

$$y-1 = -\frac{8}{3}(x-1.5) \rightarrow \boxed{y = -\frac{8}{3}x + 5}$$

תשובה: משוואת המשיק היא $y = -\frac{8}{3}x + 5$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x-k) + k > 0$ ($k > 0$).

שהיא הזזה k יחידות ימינה ו- k יחידות מעלה של $f(x)$.

כיוון שהאסימפטוטות של $f(x)$ נחתכות בנקודה $(0, 1)$,

אז האסימפטוטות של $g(x)$ נחתכות בנקודה $(k, 1+k)$.

הנקודה $(5, 5)$ אינה בתבנית $(k, 1+k)$, ולכן אינה אפשרית.

תשובה: לא ייתכן ששתי האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ נחתכות בנקודה $(5, 5)$.