יואל גבע
לא מתפשרים.

מבחן לדוגמה 1,שאלון 35571
מועד קיץ תש"פ

מורים יקרים,
להלן פתרון בחינת בגרות לדוגמה מהתוכנית החדשה.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

בסדרה מתקיים $a_{n+1} = a_n + 3n + 3n^2$ **.**

(1) צריך להוכיח שאם ידוע כי עבור k **טבעי מסוים מתקיים:** $a_k = k^3 - k + 2$ **,**

אז $a_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) + 2$**.**

נשתמש, תחילה, בכלל הנסיגה, ולאחר מכן בנתון הידוע:

$$\Leftrightarrow \underbrace{a_k}_{\downarrow known} + 3k + 3k^2 = (k+1)^3 - (k+1) + 2$$

$$\Leftrightarrow k^3 - k + 2 \quad + 3k + 3k^2 = (k+1)^3 - (k+1) + 2$$

$$\Leftrightarrow k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 + 2 = (k+1)^3 - (k+1) + 2$$

$$\Leftrightarrow (k+1)^3 - (k+1) + 2 = (k+1)^3 - (k+1) + 2$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

תשובה: הוכחנו שאם ידוע כי עבור k **טבעי מסוים מתקיים:** $a_k = k^3 - k + 2$**,**

אז $a_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) + 2$**.**

(2) לא ניתן להסיק, מהתשובה לסעיף (1) כי לכל n **טבעי בסדרה, מתקיים** $a_n = n^3 - n + 2$,

כי לא עשינו את השלב הראשון והחשוב באינדוקציה, והוא בדיקה עבור $n = 1$ **.**

תשובה: לא ניתן לקבוע שבהכרח מתקיים הכלל, כי לא בדקנו את הנדרש עבור אקסיומת האינדוקציה.

נבדוק האם כאשר $\sim$ ו- הן זוויות במשולש, ומתקיים: $\sin 2\sim = \sin 2$ **-**

אכן, המשולש הוא, בהכרח, שווה שוקיים.

$$\sin 2\sim = \sin 2$$
$$2\sim = 2 \quad +360^\circ k \quad or \quad 2\sim = 180^\circ - 2 \quad +360^\circ k$$
$$\sim = \quad +180^\circ k \qquad \sim = 90^\circ - \quad +180^\circ k$$
$$\sim = \qquad \sim = 90^\circ -$$

מכאן שקיימות שתי אפשריות, במשולש.

או, שאכן המשולש שווה שוקיים, כאשר $\sim$ ו- הן זוויות הבסיס השוות זו לזו.

או, שהמשולש הוא ישר-זווית, כאשר $\sim$ ו- הן הזוויות החדות במשולש.

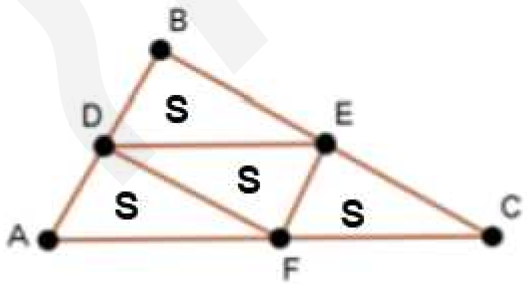
תשובה: הטענה אינה נכונה, לדוגמה משולש שזוויות הן: $= 70^\circ \quad \sim = 20^\circ, \quad ¥ = 90^\circ,$ **.**

ארבעת המשולשים הקטנים חופפים זה לזה, ושטחיהם שווים.
הסבר: שלושת קטעי האמצעים, המקבילים לצלעות המשולש,
יוצרים שלוש מקביליות: DEFA , DFCE , BDFE **,**
כאשר האלכסון של כל אחת מהן מחלק אותן לשני משולשים חופפים – ובהתאם שווי שטח.

מכאן, שאם שטח של כל משולש הוא s **, הרי ששטח המשטח כולו הוא** $4s$**,**
ושטח המקבילית DFCE **הוא** $2s$ **.**

$p(\text{DFCE})=\frac{2s}{4s}=\frac{1}{2}$ **.**

תשובה: ההסתברות, שהדמות תופיע בתוך המקבילית DFCE **, היא** $\frac{1}{2}$ **.**



- **נתונה הפונקציה** $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}$ **.**
  - **תחום ההגדרה שלה הוא** $x\neq -1\,,\,x\neq 2$ **.**
  - **נשים לב ש-** $x=-1$ **מאפס גם את המונה, ולכן ניתן לחפש צמצום מתאים.**

  $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x-1}{x+2}$ **, ולכן:** $x\neq -1\,,\,x\neq 2\,,\ f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ **.**

  עתה, ניתן גם לראות את נקודת אי הרציפות הסליקה ("חור"): $(-1,-2)\leftarrow -2=\frac{-1-1}{-1+2}$ **.**
  - **לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית אחת: הישר** $x=-2$ **, כי** $x=-2$ **מאפס מכנה ולא מונה.**
  - **לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית אחת: הישר** $y=1$ **, כי חזקות הפולינומים במונה ובמכנה שוות,**

  (2) **בצורה המקורית , או** (1) **בצורה המצומצמת, ומנת המקדמים היא** $1=\frac{1}{1}$ **.**

- **נתונה הפונקציה** $g(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ **.**
  - **תחום ההגדרה שלה הוא** $x\neq -2\,,\,x\neq 2$ **.**
  - **לפונקציה יש שתי אסימפטוטות אנכיות: הישרים** $x=\pm 2$ **, כי** $x=\pm 2$ **מאפסים מכנה ולא מונה.**
  - **לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית אחת: הישר** $y=1$ **,**

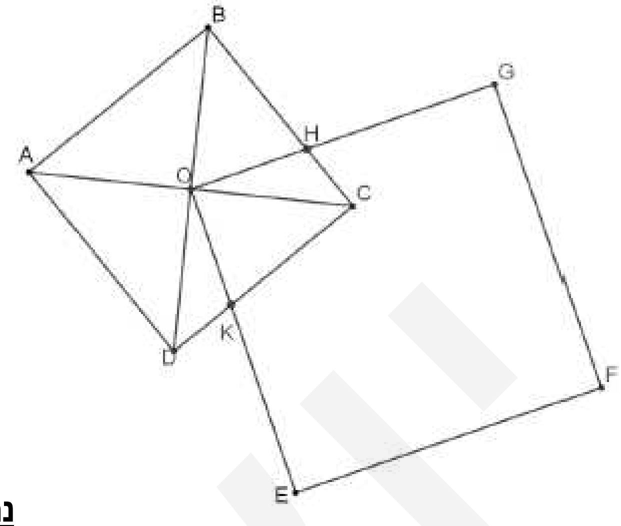
  כי חזקות הפולינומים במונה ובמכנה שוות, (2) **ומנת המקדמים היא** $1=\frac{1}{1}$ **.**

- **נתונה הפונקציה** $g(x)=\frac{x^3-1}{(x-2)(x+1)}$ **.**
  - **תחום ההגדרה שלה הוא** $x\neq -2\,,\,x\neq 2$ **.**
  - **לפונקציה יש שתי אסימפטוטות אנכיות: הישרים** $x=-1\,,\,x=2$ **,**

  כי $x=-1\,,\,x=2$ **מאפסים מכנה ולא מונה.**
  - **לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית, כי חזקות המונה** (3) **גדולה מחזקת המכנה** (2)**.**

תשובה: לפונקציה $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}$ **יש שני איקסים בהם היא אינה מוגדרת,**

אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת – ולכן היא מקיימת את התכונה המבוקשת.



<u>נתונים</u>

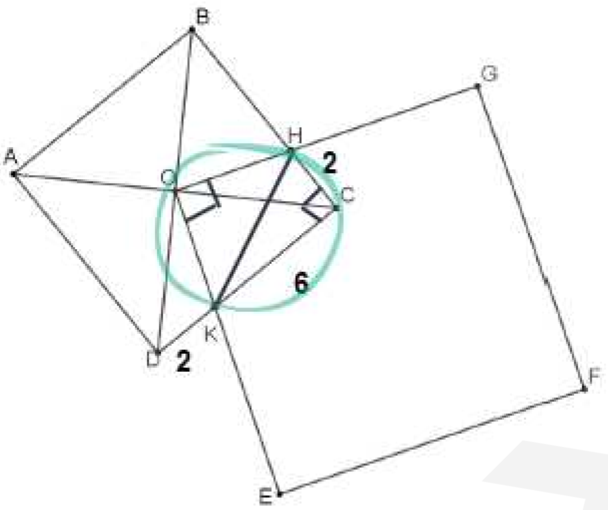
1. ABCD **ריבוע.** **2.** OEFG **ריבוע.**

3. עבור ד. $S_{ABCD} = 64$ **.4** $CH = 2$ **.**

צ"ל: א. $\Delta OKD \cong \Delta OHC$ **ב.** $\frac{S_{ABCD}}{S_{OHCK}}$ **ג.** OHCK **בר חסימה.** **ד. רדיוס מעגל חוסם** OHCK**.**

הסבר		טענה	נימוק
1	5	ABCD ריבוע	
2	6	OEFG ריבוע	
5	7	$\sphericalangle ODK = \sphericalangle BCH = 45°$ (ז)	אלכסוני הריבוע חוצים את זוויותיו הישרות
5	8	$OD = OC$ (צ)	אלכסוני הריבוע שווים וחוצים זה את זה
5, 6	9	$\sphericalangle DOC = \sphericalangle EOG = 90°$	אלכסוני הריבוע מאונכים זה לזה
9	10	$\sphericalangle KOC = 90° - \sphericalangle DOK$	
9, 10	11	$\sphericalangle DOK = \sphericalangle DOH$ (ז)	
7, 8, 11	12	$\Delta OKD \cong \Delta OHC$	משפט חפיפה ז.צ.ז.
מ.ש.ל. א			
12	13	$S_{\Delta OKD} = S_{\Delta OHC}$	שטחים שווים למשולשים חופפים
	14	$S_{\Delta OKC} = S_{\Delta OKC}$	
13, 14	15	$S_{\Delta ODC} = S_{OHCK}$	כלל החיבור
5	16	$\frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta DOC}} = 4$	אלכסוני הריבוע יוצרים ארבעה משולשים חופפים, עם שטחים שווים
15, 16	17	$\frac{S_{ABCD}}{S_{OHCK}} = 4$	הצבה
מ.ש.ל. ב			

הסבר		טענה	נימוק
5, 6	18	$\sphericalangle ODK + \sphericalangle HCK = 180°$	זוויות הריבוע ישרות
18	19	OHCK בר חסימה	סכום זוויות נגדיות $180°$
		מ.ש.ל. ג	



3	20	$S_{ABCD} = 64$	
20	21	$CD = 8$	שטח ריבוע שווה לריבוע צלעותיו
4	22	$CH = 2$	
12, 22	23	$DK = CH = 2$	צ.מ.ב.ח.
21, 23	24	$KC = 6$	
6	25	$\sphericalangle KOH = 90°$	זוויות הריבוע ישרות
25	26	KH קוטר המעגל החוסם את המרובע OHCK	נשען על זווית היקפית ישרה
9, 23, 24	27	$KH = \sqrt{40}$	משפט פיתגורס ΔDCH
27	28	$R_{OHCK} = \sqrt{10}$ חוסם	
		מ.ש.ל. ד	

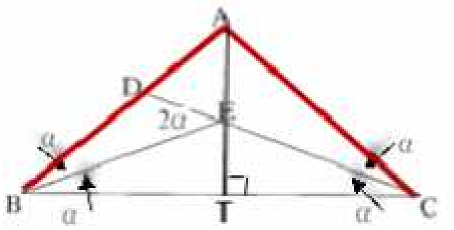
א. ΔABC **שווה שוקיים (** $AB = AC$), $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 2\sim$ **,** $\sphericalangle BAC > 90°$ **,** E **מפגש חוצי זוויות.**

$\sphericalangle ECD = \sphericalangle EBC = \sphericalangle DBE = \sim$ **.**

$\sphericalangle DEB = 2\sim$ **(זווית חיצונית ל-** ΔEBC **שווה לסכום שתי זווית פנימיות שלא צמודות לה).**

$EB = EC$ **(מול זוויות שוות צלעות שוות** ΔEBC**).**

נתון: $\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\sim}$



ΔDBE **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{EB}{\sin(180° - 3\sim)} = \frac{DE}{\sin\sim}$$

$$\frac{EC}{DE} = \frac{\sin 3\sim}{\sin\sim} \leftarrow EB = EC$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sin\sim} = \frac{\sin 3\sim}{\sin\sim}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 3\sim$$

$$3\sim = 60° + 360°k \quad 3\sim = 120° + 360°k$$

$$\boxed{\sim = 20°} \qquad \cancel{\sim = 40°} \rightarrow \sphericalangle BAC < 90° \; false$$

תשובה: $\sim = 20°$ **.**

ב. $ED = r$, **רדיוס מעגל חסום (** AD **עובר במפגש חוצה זוויות ולכן גם גובה לבסיס, וגם תיכון).**

$\underline{\Delta ETC}$

$$\tan 20° = \frac{ET}{TC}$$

$$TC = \frac{r}{\tan 20°}$$

$$\boxed{TC = 2.747r}$$

$$\boxed{BC = 5.495r} \leftarrow BT = TC$$

ΔABC **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{BC}{\sin 100°} = 2R$$

$$\frac{5.495r}{2\sin 100°} = R$$

$$R = 2.79r$$

$$\boxed{\frac{R}{r} = 2.79}$$

תשובה: היחס בין רדיוס המעגל החוסם לרדיוס המעגל החסום, ב- ΔABC **, הוא** 2.79 **.**

ג. נתון: $R-r=2$ **ס"מ** .

לפי סעיף ב: $R=2.79r$.

לכן:

$$R-r=2$$
$$2.79r-r=2$$
$$\boxed{r=1.117\,cm}$$

$\underline{\Delta ATC}$

$$\tan 40°=\frac{AT}{TC}$$
$$2.747r\tan 40°=AT$$
$$2.747\cdot 1.117\cdot \tan 40°=AT$$
$$\boxed{AT=2.575\,cm}$$
$$AE=AT-ET$$
$$AE=AT-r$$
$$AE=2.575-1.117$$
$$\boxed{AE=1.458\,cm}$$

תשובה: $AE=$ 1.458 **ס"מ** .

א. נסמן p - ההסתברות שחניך, שנבחר באקראי מתוך חניכי שבט הצופים, חובש כובע אדום.

מדובר בהתפלגות בינומית, כאשר $n=6$, $k=2$ או $k=3$.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$P_6(3)=\frac{8}{9}P_6(2)$$

$$\binom{6}{3}\cdot p^3\cdot(1-p)^3=\frac{8}{9}\cdot\binom{6}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^4 \quad /:\ p^2\cdot(1-p)^3>0$$

$$20p=15\cdot\frac{8}{9}(1-p)$$

$$1.5p=1-p$$

$$\boxed{p=0.4}$$

תשובה: ההסתברות, שחניך שנחר באקראי חובש כובע אדום, היא 0.4 .

ב. נבחרו באקראי 6 חניכים.

(1) רוב החניכים <u>אינם</u> חובשי כובעים אדומים, אם נבחרו 4, 5, או 6 חניכים שכאלו.

מדובר בהתפלגות בינומית, כאשר $n=6$, $k=4$ או $k=5$, או $k=6$.

$p(not\ red\ hat)=1-p(red\ hat)=1-0.4=0.6$ **.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$\left.\begin{aligned} P_6(4)&=\binom{6}{4}\cdot 0.6^4\cdot(1-0.6)^{6-4}=15\cdot 0.6^4\cdot 0.4^2=\frac{972}{3125}\\ P_6(5)&=\binom{6}{5}\cdot 0.6^5\cdot(1-0.6)^{6-5}=6\cdot 0.6^5\cdot 0.4^1=\frac{2916}{15625}\\ P_6(6)&=0.6^6=\frac{729}{15625}\end{aligned}\right\} p=\frac{972}{3125}+\frac{2916}{15625}+\frac{729}{15625}=\frac{1701}{3125}$$

תשובה: ההסתברות, שרוב החניכים שנבחרו <u>אינם</u> חובשים כובעים אדומים, היא $\frac{1701}{3125}$.

(2) מדובר בהסתברות מותנית: מה הסיכוי שהחניך שנבחר שני חובש כובע אדום,
אם ידוע שרוב החניכים שנבחרו אינם חובשים כובעים אדומים.
נבדוק שני מצבים אפשריים, כאשר נדרש בכל מקרה רוב של חניכים שאינם חובשי כובעים אדומים.

אם רק חניך זה חובש כובע אדום, אז הסיכוי הוא $P = 0.4 \cdot 0.6^5 = \frac{486}{15625}$.

אם בנוסף לחניך זה, יש עוד חניך שאינו חובש כובע אדום,
אז נדרש שגם אחד מחמשת האחרים יהיה עם כובע אדום –

$$p = 0.4 \cdot \binom{5}{1} \cdot 0.4^1 \cdot (1-0.4)^{5-1} = 0.4 \cdot 5 \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^4 = \frac{324}{3125}$$

$$p(2nd\ with\ red\ hat / most\ with\ out) = \frac{p(2nd\ with\ red\ hat \cap most\ with\ out)}{p(most\ with\ out)} = \frac{\frac{486}{15625} + \frac{324}{3125}}{\frac{1701}{3125}} = \frac{26}{105}$$

תשובה: ההסתברות, שהחניך שנבחר שני חובש כובע אדום (כשידוע שהרוב לא), היא $\frac{26}{105}$.

(3) כאשר ידוע שהחניך הראשון שנבחר חובש כובע אדום, נשארו עוד חמישה חניכים לבחירה.
במקרה זה, אפשרי שיהיה לבדו עם כובע אדום, או שיהיה עוד חניך אחד בלבד שכזה,
כדי להבטיח שרוב החניכים שנבחרו אינם חובשי כובעים אדומים.

$$\left.\begin{array}{l} P_5(1) = \binom{5}{1} \cdot 0.4^1 \cdot (1-0.4)^{5-1} = 5 \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^4 = \frac{162}{625} \\ P_6(0) = 0.6^5 = \frac{243}{3125} \end{array}\right\} p = \frac{162}{625} + \frac{243}{3125} = \frac{1053}{3125}$$

תשובה: ההסתברות, שרוב החניכים שנבחרו אינם חובשי כובעים אדומים (כשידוע שהראשון כן),
היא $\frac{1053}{3125}$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x-\sin x$ **.**

הפונקציה הזאת אינה זוגית ואינה אי זוגית, כי היא הפרש בין פונקציה זוגית לפונקציה אי-זוגית.

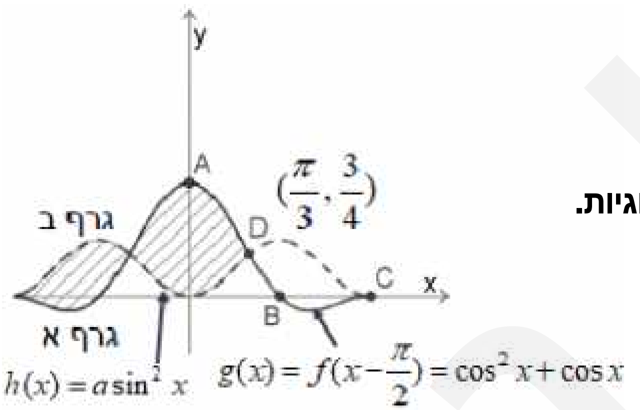
נראה גם אחרת.

$$f(-x)=\sin^2(-x)-\sin(-x)$$
$$f(-x)=(-\sin x)^2-(-\sin x)$$
$$f(-x)=\sin^2 x+\sin x$$

ולכן אינה זוגית , ואינה אי-זוגית.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x-\frac{\circledR}{2})$ **, שהיא הזזה** $\frac{\circledR}{2}$ **יחידות <u>ימינה</u> של** $f(x)$ **.**

$$g(x)=\sin^2(x-\frac{\circledR}{2})-\sin(x-\frac{\circledR}{2})$$
$$g(x)=(-\sin(\frac{\circledR}{2}-x))^2+\sin(\frac{\circledR}{2}-x)$$
$$g(x)=\cos^2 x+\cos x$$



וזאת פונקציה זוגית, כי היא סכום של שתי פונקציות זוגיות.

נראה גם אחרת.

$$g(-x)=\cos^2(-x)+\cos(-x)$$
$$g(-x)=\cos^2 x+\cos x$$
$$g(-x)=g(x)$$

תשובה: $f(x)=\sin^2 x-\sin x$ **אינה זוגית ואינה אי-זוגית,** $g(x)=f(x-\frac{\circledR}{2})=\cos^2 x+\cos x$ **זוגית.**

ב. (1) שני הגרפים שבציור סימטריים לציר ה- y **, ולכן מתאימים לפונקציות זוגיות (כמו** $h(x)$ **ו-** $k(x)$**).**

$g(x)=f(x-\frac{\circledR}{2})=\cos^2 x+\cos x$ **, ולכן** $g(0)=1+1=2$ **, ובהתאם הגרף המתאים לה הוא גרף א.**

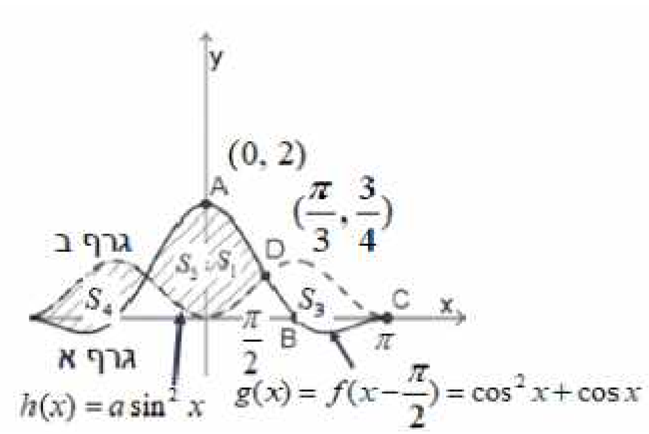
$h(x)=a\sin^2 x$ **, ולכן** $h(0)=a\cdot 0=0$ **, ובהתאם הגרף המתאים לה הוא גרף ב, שעובר בראשית.**

$k(x)=a\cos^2 x$ **, ולכן** $k(0)=a\cdot 1=a$ **. אולם** $a\neq 0$ **בהכרח, ולכן הגרף לא עובר בראשית הצירים.**

תשובה: $g(x)=f(x-\frac{\circledR}{2})=\cos^2 x+\cos x$ **- גרף א,** $h(x)=a\sin^2 x$ **- גרף ב.**

(2) $D(\frac{\circledR}{3},\frac{3}{4})$ **נמצאת על שני הגרפים, לכן** $\boxed{a=1}$ $\rightarrow \frac{3}{4}=\frac{3}{4}a$ $\rightarrow \frac{3}{4}=a\sin^2\frac{\circledR}{3}$ **.**

תשובה: $a=1$ **.**



(3) $A(0,2)$ **על פי תת סעיף ב(1).**

$$\cos^2 x+\cos x=0$$

$$\cos x(\cos x+1)=0$$

$$\left.\begin{array}{ll}\cos x=0 & \rightarrow x=\frac{®}{2}+®k\\ \cos x=-1 & \rightarrow x=®+®k\end{array}\right\}\boxed{B(\frac{®}{2},0)},\ \boxed{C(®,0)}$$

תשובה: $A(0,2)$ **,** $B(\frac{®}{2},0)$ **,** $C(®,0)$**.**

ג. נחשב את השטח המבוקש, כאשר נשים לב שעקב הזוגיות של שתי הפונקציות מתקיים: $s_1=s_2$ **ו-** $s_3=s_4$ **.**

$$S_1=\int_0^{\frac{®}{3}}(\cos^2 x+\cos x-\sin^2 x)\,dx$$

$$S_1=\int_0^{\frac{®}{3}}(\cos 2x+\cos x)\,dx \quad \leftarrow \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

$$S_1=\frac{\sin 2x}{2}+\sin x\Big]_0^{\frac{®}{3}}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=\frac{®}{3}:\quad \frac{\sin 2\cdot\frac{®}{3}}{2}+\sin\frac{®}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\\ x=0:\quad \frac{\sin 2\cdot 0}{2}+\sin 0=0\end{array}\right\}\boxed{S_1=\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

$$\boxed{S_1+S_2=2S_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$S_3=\int_{\frac{®}{3}}^{®}(\sin^2 x-(\cos^2 x+\cos x))\,dx$$

$$S_3=\int_{\frac{®}{3}}^{®}(-\cos 2x-\cos x)\,dx$$

$$S_3=-\frac{\sin 2x}{2}-\sin x\Big]_{\frac{®}{3}}^{®}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=®:\quad -\frac{\sin 2\cdot ®}{2}-\sin ®=0\\ x=\frac{®}{3}:\quad -\frac{\sin 2\cdot\frac{®}{3}}{2}-\sin\frac{®}{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}\end{array}\right\}\boxed{S_3=\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

$$\boxed{S_4=S_3=\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

ומכאן שגודל השטח המבוקש הוא: $S_1+S_2+S_4=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4}\approx 3.897$ **.**

תשובה: גודל השטח הוא $\frac{9\sqrt{3}}{4}\approx 3.897$ **.**

א. (1) בסדרה חשבונית יש $2n+3$ איברים, מספר אי-זוגי של איברים.

$a_1, ... a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, ... a_{2n+3}$, ולכן a_{n+2} הוא האיבר האמצעי בסדרה.

סכום הסדרה גדול פי 43 מהאיבר האמצעי (ששונה מאפס).

בסדרה חשבונית, שבה מספר אי-זוגי של איברים,

שווה סכומה למכפלת האיבר האמצעי במספר האיברים.

כי, $a_1, ... a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, ... a_{2n+3}$
$a_1, ...a_{n+2}-2d, a_{n+2}-d, a_{n+2}, a_{n+2}+d, a_{n+2}+2d ... a_{2n+3}$ **, וכן הלאה.**

לכן, $S_{2n+3}=(2n+3)a_{n+2}$, וזה מה שהתבקשנו להוכיח.

דרך חלופית:

$$S_{2n+3}=\frac{(2n+3)\left[2a_1+d(2n+3-1)\right]}{2}$$

$$S_{2n+3}=\frac{(2n+3)\left[2a_1+d(2n+2)\right]}{2}$$

$$S_{2n+3}=(2n+3)\left[a_1+d(n+1)\right]$$

$$\boxed{S_{2n+3}=(2n+3)\cdot a_{n+2}}$$

תשובה: הוּכַח.

(2)

$$S_{2n+3}=43a_{n+2}$$

$$(2n+3)a_{n+2}=43a_{n+2} \quad /:a_{n+2}\neq 0$$

$$\boxed{2n+3=43}$$

תשובה: בסדרה 43 איברים.

ב. (1) ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים במקומות האי-זוגיים (22 איברים),

גדול ב- 40 מסכום האיברים במקומות הזוגיים (21 איברים).

סכום האיברים במקומות האי-זוגיים שווה ל- $22a_{22}$,

וסכום האיברים במקומות הזוגיים שווה ל- $21a_{22}$, (הכול, בהתאם להסבר שהובא בסעיף א).

$$S_{22odd}=S_{21even}+40$$

$$22a_{22}=21a_{22}+40$$

$$\boxed{a_{22}=40}$$

דרך אחרת לפתור תת סעיף זה (הדרך השמרנית):

	האיברים במקומות הזוגיים	האיברים במקומות האי-זוגיים
A_1	$a_2 = a_1 + d$	a_1
D	$a_{n+2} - a_n = a_n + 2d - a_n = 2d$	$2d$
N	22	21

$$S_{22odd} = S_{21even} + 40$$
$$\frac{22\left[2a_1 + 2d(22-1)\right]}{2} = \frac{21\left[2(a_1+d) + 2d(21-1)\right]}{2} + 40$$
$$22(a_1 + 21d) = 21(a_1 + d + 20d) + 40$$
$$22(a_1 + 21d) = 21(a_1 + 21d) + 40$$
$$a_1 + 21d = 40$$
$$\boxed{a_{22} = 40}$$

תשובה: האיבר האמצעי הוא $a_{22} = 40$.

(2) נמצא את סכום הסדרה.

$$S_{43} = 43a_{22}$$
$$S_{43} = 43 \cdot 40$$
$$\boxed{S_{43} = 1720}$$

תשובה: סכום הסדרה הוא 1720.

ג. נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא $-a_1$.

$$a_{22} = 40$$
$$a_1 + 21d = 40$$
$$-d + 21d = 40 \quad \leftarrow a_1 = -d \leftarrow d = -a_1$$
$$20d = 40$$
$$\boxed{d = 2}$$

תשובה: הסדרה עולה.

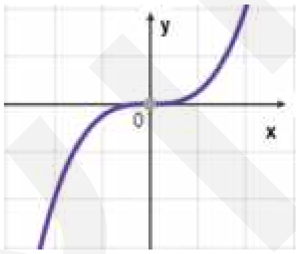
א. נתונה הפונקציה $h(x)=ax^3-1$, שתחום ההגדרה שלה הוא כל x.

הפונקציה $y=x^3$ היא פונקציה עולה, עם נקודת פיתול בראשית הצירים.

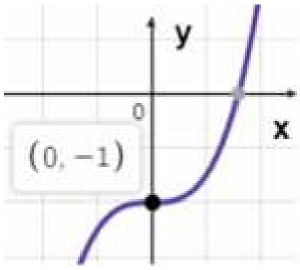
הפונקציה $y=ax^3-1$, עבור $a>0$, היא הכפלת שיעורי ה- y פי a והורדה אנכית 1 יחידות למטה.

הפונקציה $y=ax^3-1$, עבור $a<0$, היא הכפלת שיעורי ה- y פי a, שמביאה להיפוך ולירידה לכל x, ולאחר מכן הורדה אנכית 1 יחידות למטה (בגרף שלה מובאים סימונים חשובים לתת סעיף ב(3)).

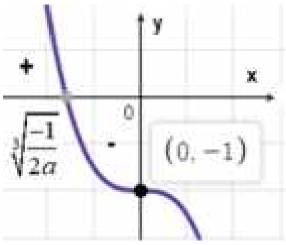
$y=x^3$



$y=ax^3-1$ **, עבור** $a>0$



$y=ax^3-1$ **, עבור** $a<0$



ב. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{ax^3-1}$, שתחום ההגדרה שלה הוא $x\neq\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$.

(1) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

עבור $x=0$, וגם עבור $y=0$, נקבל שהפונקציה חותכת את הצירים רק בראשית.

תשובה: $(0,0)$.

(2) נמצא את האסימפטוטות, המאונכות לצירים, של הפונקציה:

$x=\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$ מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר $x=\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$ אסימפטוטה מאונכות לציר ה- x.

עבור $x\to\pm\infty$ חזקת המכנה (3) גדולה מחזקת המונה (1) ולכן $y=0$ אסימפטוטה אופקית.

תשובה: אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x: $x=\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$, ולציר ה- y - $y=0$ עבור $x\to\pm\infty$.

(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה:

$$f'(x)=\frac{ax^3-1-x\cdot 3ax^2}{(ax^3-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2ax^3-1}{(ax^3-1)^2}}$$

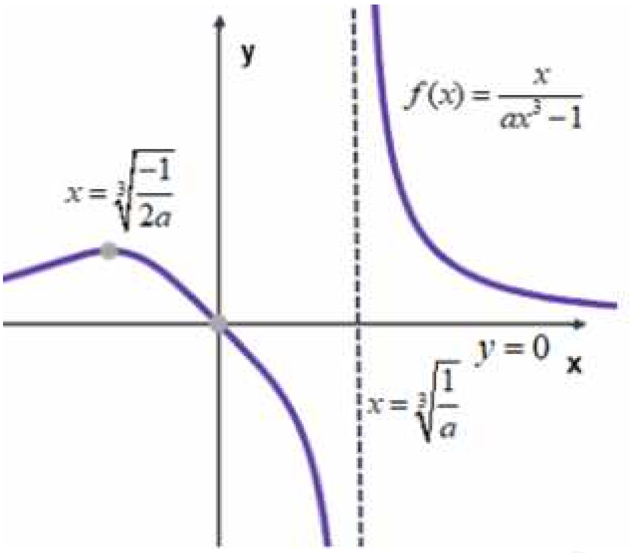
$$0=-2ax^3-1\ \to\ \boxed{x=\sqrt[3]{\frac{-1}{2a}}}$$

מכנה הנגזרת חיובי, בתחום ההגדרה,

ואת סימני מונה הנגזרת נקבע על פי הגרף של $y=ax^3-1$, עבור $a<0$ (סעיף א, גרף שמאלי).

תשובה: הפונקציה עולה עבור $x<\sqrt[3]{\frac{-1}{2a}}$, יורדת עבור $\sqrt[3]{\frac{-1}{2a}}<x<\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$, או $x>\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$.

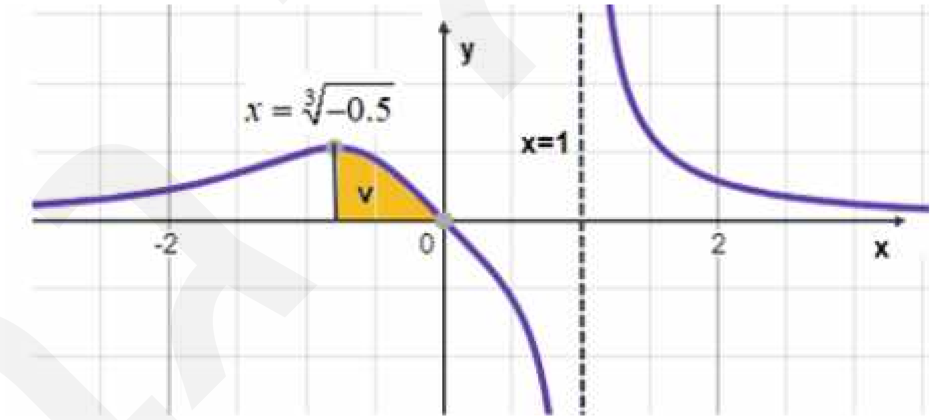
(4) נסרטט את הגרף הפונקציה, כאשר נשים לב להשפעה של $a > 0$ על מיקום האסימפטוטה האנכית, ועל מיקום נקודת המקסימום.



תשובה: הגרף שמעל.

ב. נתון $a = 1$ **, ובהתאם:** $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$ **,**

כאשר האסימפטוטה האנכית היא $x = 1$ **, ו-** $x = \sqrt[3]{-0.5}$ **הוא המקסימום.**



נחשב את הנפח המבוקש, על ידי אינטגרל הכולל זיהוי של הנגזרת הפנימית.

$$V = \circledR \int_{\sqrt[3]{-0.5}}^{0} \frac{x^2}{(x^3-1)^2}\,dx = \circledR \int_{\sqrt[3]{-0.5}}^{0} \frac{1}{3}(x^3-1)^{-2} \cdot 3x^2\,dx =$$

$$V = (\circledR \cdot \frac{1}{3} \frac{(x^3-1)^{-1}}{-1}) \Big]_{\sqrt[3]{-0.5}}^{0} = (-\frac{1}{3}\circledR \cdot \frac{1}{x^3-1}) \Big]_{\sqrt[3]{-0.5}}^{0}$$

$$x = 0: \quad -\frac{1}{3}\circledR \cdot \frac{1}{0^3-1} = \frac{\circledR}{3}$$

$$x = \sqrt[3]{-0.5}: \quad -\frac{1}{3}\circledR \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{-0.5})^3 - 1} = \frac{2\circledR}{9}$$

$$\boxed{V = \frac{\circledR}{9} \approx 0.3491}$$

תשובה: נפח גוף הסיבוב הוא $0.3491 \approx \frac{\circledR}{9}$**.**