יואל גבע
לא מתפשרים.

שאלון 35472 מועד
חורף תשפ״ב

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35472 מועד חורף תשפ״ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. אורך כל המקצועות הצדדים הוא 3 , שכן הפירמידה ישרה ומקצועותיה הצדדיים שווים זה לזה.
זוויות הראש של כל הפאות, על פי הנתון, שוות 30° ומכאן ש- כל הפאות חופפות,
כלומר: $\Delta ASB \cong \Delta ASC \cong \Delta BSC$ ומכאן ש- בסיס הפירמידה הישרה $SABC$
הוא משולש שווה צלעות, שכל זוויותיו שוות 60°.
נזכיר, כבר עתה, שהגובה בפירמידה ישרה יורד למרכז המעגל החוסם את הבסיס.

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\sphericalangle ASB=3\cdot3\cdot\cos30^\circ=4.5\sqrt{3}$$
$$\underline{u}\cdot\underline{w}=|\underline{u}|\cdot|\underline{w}|\cdot\cos\sphericalangle ASC=3\cdot3\cdot\cos30^\circ=4.5\sqrt{3}$$
$$\underline{v}\cdot\underline{w}=|\underline{v}|\cdot|\underline{w}|\cdot\cos\sphericalangle BSC=3\cdot3\cdot\cos30^\circ=4.5\sqrt{3}$$

תשובה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=4.5\sqrt{3}$, $\underline{u}\cdot\underline{w}=4.5\sqrt{3}$, $\underline{v}\cdot\underline{w}=4.5\sqrt{3}$.

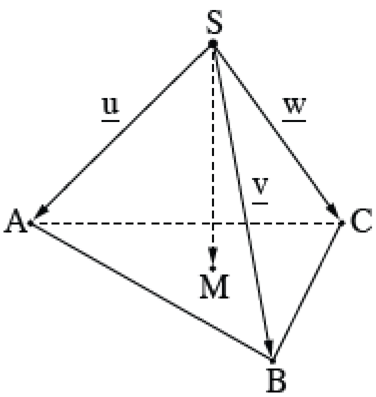
ב. מה עוד ניתן ללמוד מהנתונים ? (מומלץ תמיד, בתרגילים מסוג זה, לרכז את הנתונים.)

$\boxed{\overrightarrow{SA}=\underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}|=3}$ $\boxed{\underline{u}^2=9}$

$\boxed{\overrightarrow{SB}=\underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}|=3}$ $\boxed{\underline{v}^2=9}$

$\boxed{\overrightarrow{SC}=\underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}|=3}$ $\boxed{\underline{w}^2=9}$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=4.5\sqrt{3}$
$\underline{u}\cdot\underline{w}=4.5\sqrt{3}$
$\underline{v}\cdot\underline{w}=4.5\sqrt{3}$



(1) נביע את הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$, באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB} \qquad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AB}=-\underline{u}+\underline{v}} \qquad \boxed{\overrightarrow{AC}=-\underline{u}+\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{AB}=-\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{AC}=-\underline{u}+\underline{w}$.

(2) נחשב את אורכי הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}=-\underline{u}+\underline{v}$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\underline{u}^2-2\cdot\underline{u}\cdot\underline{v}+\underline{v}^2}$$
$$\overrightarrow{AB}=\sqrt{9-2\cdot4.5\sqrt{3}+9}$$
$$\boxed{|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{18-9\sqrt{3}}\approx1.553}$$

כיוון, שבסיס הפירמידה הוא משולש שווה צלעות, אז גם $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{18-9\sqrt{3}}\approx1.553$.

תשובה: $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{18-9\sqrt{3}}\approx1.553$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{18-9\sqrt{3}}\approx1.553$.

(3) כפי שאמרנו, מכיוון ובסיס הפירמידה הוא משולש שווה צלעות, אז כל זוויותיו שוות 60° .

תשובה: $\sphericalangle BAC=60^\circ$.

ג. נתון גם, כי הנקודה M נמצאת במישור ABC, וידוע כי $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}$.

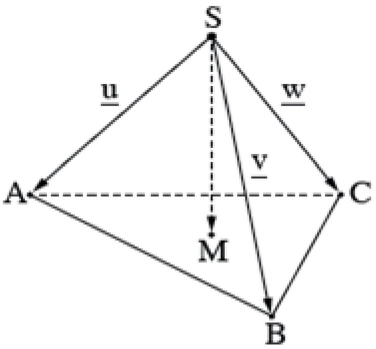
נראה כי $\overrightarrow{SM}$ **מאונך לבסיס, על ידי שנראה שהוא מאונך לשני וקטורים בבסיס שאינם תלויים זה בזה.**

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w})\cdot(-\underline{u}+\underline{v})$$

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\underline{u}^2+\cancel{\frac{1}{3}\underline{u}\cdot\underline{v}}-\cancel{\frac{1}{3}\underline{u}\cdot\underline{v}}+\frac{1}{3}\underline{v}^2-\frac{1}{3}\underline{u}\cdot\underline{w}+\frac{1}{3}\underline{v}\cdot\underline{w}$$

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\cdot 9+\frac{1}{3}\cdot 9-\frac{1}{3}\cdot 4.5\sqrt{3}+\frac{1}{3}\cdot 4.5\sqrt{3}$$

$$\boxed{\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}=0}\quad\rightarrow\overrightarrow{SM}\perp\overrightarrow{AB}$$



$\boxed{\overrightarrow{SA}=\underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}|=3}$ $\boxed{\underline{u}^2=9}$

$\boxed{\overrightarrow{SB}=\underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}|=3}$ $\boxed{\underline{v}^2=9}$

$\boxed{\overrightarrow{SC}=\underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}|=3}$ $\boxed{\underline{w}^2=9}$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=4.5\sqrt{3}$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=4.5\sqrt{3}$

$\underline{v}\cdot\underline{w}=4.5\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AC}=(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w})\cdot(-\underline{u}+\underline{w})$$

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\underline{u}^2+\cancel{\frac{1}{3}\underline{u}\cdot\underline{w}}-\frac{1}{3}\underline{u}\cdot\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{v}\cdot\underline{w}-\cancel{\frac{1}{3}\underline{u}\cdot\underline{w}}+\frac{1}{3}\underline{w}^2$$

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\cdot 9-\frac{1}{3}\cdot 4.5\sqrt{3}+\frac{1}{3}\cdot 4.5\sqrt{3}+\frac{1}{3}\cdot 9$$

$$\boxed{\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AC}=0}\quad\rightarrow\overrightarrow{SM}\perp\overrightarrow{AC}$$

הראינו ש- $\overrightarrow{SM}$ **מאונך לבסיס, כי הוא מאונך לשני וקטורים בבסיס שאינם תלויים זה בזה.**

תשובה: הראינו כי $\overrightarrow{SM}$ **מאונך למישור** ABC .

ד. נסמן $|\overrightarrow{SM}|=m$**, ובהתאם על פי סעיף ג – אורכו של גובה הפירמידה הוא** $SM=m$.

נביע את נפח הפירמידה SABC**, באמצעות** m .

$$V_{SABC}=\frac{S_{\Delta ABC}\cdot SM}{3}$$

$$V_{SABC}=\frac{0.5\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\sphericalangle BAC\cdot SM}{3}$$

$$V_{SABC}=\frac{0.5\cdot\sqrt{18-9\sqrt{3}}\cdot\sqrt{18-9\sqrt{3}}\cdot\sin 60^\circ\cdot m}{3}$$

$$\boxed{V_{SABC}=\frac{-9+6\sqrt{3}}{4}\cdot m\approx 0.3481m}$$

תשובה: נפח הפירמידה SABC **הוא** $\frac{-9+6\sqrt{3}}{4}\cdot m\approx 0.3481m$.

א. נתוני המחקר שבדק את הקשר בין קו הרוחב שבו נמצא אזור מסוים (x),

ובין שיעור מקרי סרטן העור (מלנומה) באוכלוסייה באותו אזור (y) מוצגים בטבלה שלפנינו,

האוכלוסייה שנבדקה היא אזורים שונים בארצות הברית, במשך שלוש שנים.

בתוספת עמודות שתעזורנה בחישוב סטיית התקן של שיעור מקרי המלנומה.

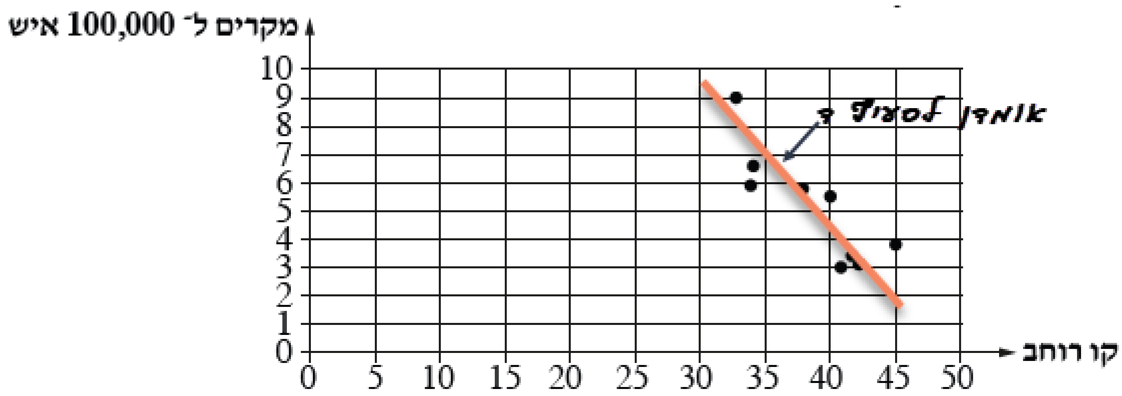
x	y	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$
32.8	9	3.88	15.0544
33.9	5.9	0.78	0.6084
34.1	6.6	1.48	2.1904
37.9	5.8	0.68	0.4624
40.0	5.5	0.38	0.1444
40.8	3.0	−2.12	4.4944
41.7	3.4	−1.72	2.9584
42.2	3.1	−2.02	4.0804
45.0	3.8	−1.32	1.7424
$\bar{x}=38.71$	$\bar{y}=5.12$		31.7356
$s_x=4.04$	s_y		

$$S_y=\sqrt{\frac{31.7356}{9}}=\sqrt{3.5262}$$

$$\boxed{S_y=1.8778\approx 1.88}$$

תשובה: הראינו כי סטיית התקן של שיעור מקרי המלנומה היא $S_y=1.88$.

ב. דיאגרמת הפיזור הבאה, מראה את y כתלות של x.



ניתן לראות, די בבירור, שקיים קשר ליניארי די חזק ויורד בין קו הרוחב, לבין שיעור מקרי הסרטן.
הקו האדום שהוסף, מעין אומדן לקו הרגרסיה, יורד משמאל לימין.

בהתאם רק מקדם מתאם, r **, שלילי – אפשרי, ונראה שיהיה סביב** $-0.9 < r < -0.8$ **(הערכה בלבד !).**

כיוון שהנקודות בדיאגרמת הפיזור, בבירור, אינן ממוקמות על קו ישר ,

אזי לא אפשרי $r = -1$ **, שהוא מקדם מתאר דטרמיניסטי.**

עדיין, ניתן לראות שקיים קשר ליניארי די חזק, ולכן מקדם מתאם של $r = -0.857$ **בהחלט מתאים.**

תשובה: מקדם המתאם $r = -0.857$ **מייצג את הקשר שבין הנתונים.**

ג. נמצא את משוואת קו הרגרסיה לניבוי מקרי המלנומה y **על פי קו הרוחב** x **.**

נמצא תחילה את שיפוע קו הרגרסיה: $m = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = -0.857 \cdot \frac{1.88}{4.04} = -0.3988 \approx -0.399$ **.**

נמצא את משוואת קו הרגרסיה, שעובר בנקודת הממוצעים:

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$$
$$y - 5.12 = -0.399(x - 38.71)$$
$$y - 5.12 = -0.399x + 15.45$$
$$\boxed{y = -0.399x + 20.57}$$

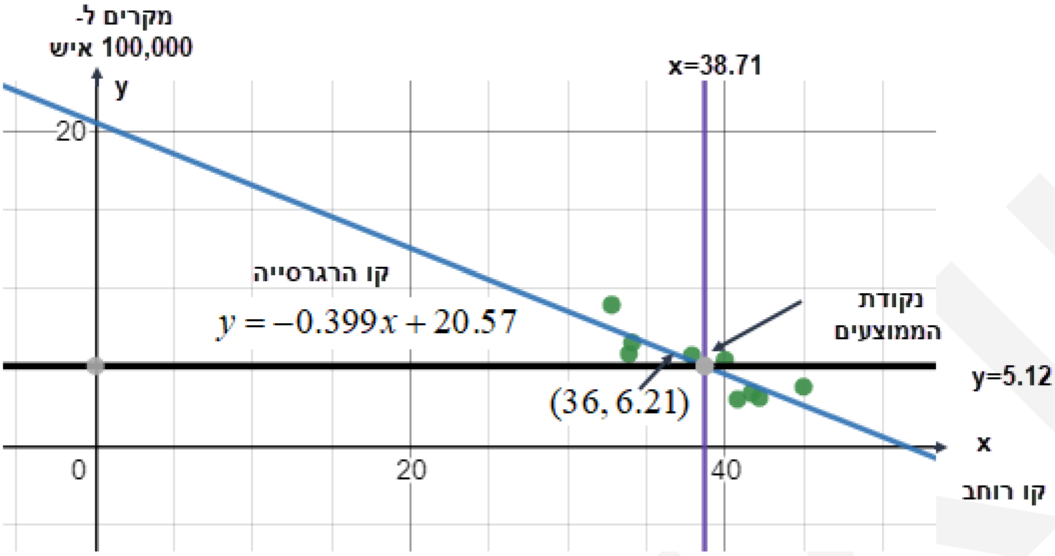
תשובה: משוואת קו הרגרסיה, לניבוי מקרי המלנומה y **על פי קו הרוחב** x **, היא** $y = -0.399x + 20.57$ **.**

ד. נמצא מהו הניבוי לשיעור מקרי המלנומה y **בקו רוחב** 36 **. (בשרטוט מעל, בחץ, אומדן ראשוני)**

נציב $x = 36$ **, במשוואת קו הרגרסיה:** $y = -0.399 \cdot 36 + 20.57 = 6.21$ **.**

<u>תשובה</u>: הניבוי לשיעור מקרי המלנומה, בקו רוחב 36 **, הוא בערך** 6.21 **מקרים ל-** $100,000$ **תושבים.**

העשרה



מקרים ל-
100,000 איש
y
x=38.71
20
קו הרגרסייה
$y=-0.399x+20.57$
נקודת
הממוצעים
y=5.12
(36, 6.21)
x
0
20
40
קו רוחב

נוסחת הגדילה והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$ **, כאשר** M_0 **- הכמות ההתחלתית**

q **הוא גורם הגדילה/דעיכה,** M_t **הכמות לאחר זמן** t.

א. נחשב פי כמה עלה מספר החולים בנגיף בכל חודש, עד למתן החיסון.

במשך 5 **חודשים גדל מספר חולים בנגיף מ-** 104 **ל-** 200.

$$200 = 104 \cdot q^5 \quad / :104$$

$$\frac{25}{13} = q^5$$

$$\sqrt[5]{\frac{25}{13}} = q$$

$$\boxed{q = 1.1397 \approx 1.14}$$

תשובה מספר החולים בנגיף, מזן גילוי הנגיף ועד למתן החיסון, גדל פי $1.1397 \approx 1.14$ **בכל חודש.**

ב. נחשב את האחוז הקבוע, שבו ירד מספר החולים מדי חודש, מאז מתן החיסון.

לאחר 3 **חודשים, היה מספר החולים בנגיף** 40% **ממספרם לפני מתן החיסון.**

(ניתן למצוא את אחוז הדעיכה, ללא קשר למספר החולים לפני מתן החיסון.)

$$0.4M_0 = M_0 \cdot q^3 \quad / :M_0$$

$$0.4 = q^3$$

$$\sqrt[3]{0.4} = q$$

$$\boxed{q = 0.7368}$$

נמצא את אחוז הדעיכה החודשי.

$$0.7368 = \frac{100 - P}{100} \quad / \cdot 100$$

$$73.68 = 100 - P$$

$$\boxed{P = 26.32\%}$$

תשובה: האחוז הקבוע, שבו ירד מספר החולים בנגיף ביישוב בכל חודש מאז מתן החיסון, הוא 26.32%.

ג. (1) נמצא תחילה כמה חודשים עברו, מזמן מתן החיסון ועד היום שבו אובחנו 20 חולים בלבד בנגיף .

$$200 \cdot 0.7368^t = 20 \quad / :200$$
$$0.7368^t = 0.1$$
$$\ell n\, 0.7368^t = \ell n\, 0.1$$
$$t \ell n\, 0.7368 = \ell n\, 0.1$$
$$t = \frac{\ell n\, 0.1}{\ell n\, 0.7368} = t$$
$$\boxed{t \approx 7.54}$$

ואם נתחשב בחמשת החודשים שעברו עד למתן החיסון, נקבל שהזמן הוא $7.54 + 5 = 12.54$ חודשים.

תשובה: עברו 12.54 חודשים בערך, מזמן גילוי הנגיף ועד היום שבו אובחנו 20 חולים בלבד בנגיף.

(2) נחשב מה צפוי להיות מספר החולים בנגיף בישוב, אם האוכלוסייה ביישוב לא הייתה מתחסנת.

מספר החולים ההתחלתי היה 104 , גורם הגדילה היה 1.1397, והתקופה הייתה 12.54 חודשים.

$M_{12.54} = 104 \cdot 1.1397^{12.54} \approx$ **תושבים** 536 .

תשובה: מספר החולים ביישוב, לאחר פרק הזמן שמצאנו בתת סעיף ג(1) היה בערך 536,

אם האוכלוסייה ביישוב לא הייתה מתחסנת, וקצב העלייה במספר החולים לא היה משתנה.

א. נתונה פונקציה $f(x)=\frac{8}{e^x}+\frac{e^x}{2}+c$ **, כאשר** c **הוא פרמטר.**

$e^x>0$ **לכל** x**, לכן המכנה חיובי ותחום ההגדרה הוא כל** x**.**

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא כל** x.

ב. גרף הפונקציה $f(x)$ **עובר בראשית הצירים, בנקודה** $(0,0)$**.**

$$0=\frac{8}{e^0}+\frac{e^0}{2}+c$$
$$0=8+0.5+c$$
$$\boxed{-8.5=c}$$

תשובה: $c=-8.5$ **.**

נציב $c=-8.5$**, ובהתאם:** $\boxed{f(x)=\frac{8}{e^x}+\frac{e^x}{2}-8.5}$

ג. בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$**.**

$$\frac{8}{e^x}+\frac{e^x}{2}-8.5=0 \quad \boxed{e^x=t}$$
$$\frac{8}{t}+\frac{t}{2}-8.5=0$$
$$t^2-17t+16=0$$
$$t=1\,,\,t=16$$
$$e^x=16 \quad \rightarrow \boxed{(\ell n16,\,0)}$$
$$e^x=1 \quad \rightarrow \boxed{(0,\,0)}$$

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך הנוספת, של $f(x)$ **עם ציר ה-** x**, הם** $(\ell n16,\,0)$ **.**

ד. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגה.

$$\boxed{f(x)=\frac{8}{e^x}+\frac{e^x}{2}-8.5}$$

$$f'(x)=\frac{0-8e^x}{(e^x)^2}+\frac{e^x}{2}$$

$$f'(x)=\frac{-8}{e^x}+\frac{e^x}{2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-16+e^{2x}}{2e^x}}$$

$$0=-16+e^{2x}$$

$$16=e^{2x}$$

$$2x=\ell n16$$

$$x=\frac{1}{2}\ell n16$$

$$x=\ell n16^{0.5}$$

$$x=\ell n4 \quad \rightarrow f(x)=\frac{8}{e^{\ell n4}}+\frac{e^{\ell n4}}{2}-8.5=\frac{8}{4}+\frac{4}{2}-8.5=-4.5\boxed{(\ell n4,-4.5)}$$

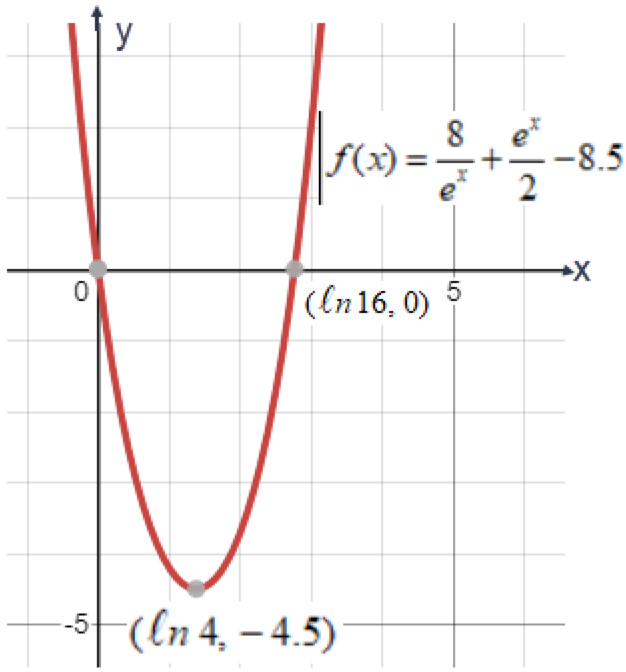
$$\left.\begin{aligned} f'(\ell n3)&=\frac{(-)}{(+)}<0 \\ f'(\ell n5)&=\frac{(+)}{(+)}>0 \end{aligned}\right\}\boxed{(\ell n4,-4.5),\quad \min}$$

תשובה: $(\ell n4,-4.5)$ **, מינימום.**

ה. שתי הצבות, מימין ומשמאל, למציאת אסימפטוטה אופקית.

כאשר $x\rightarrow+\infty$ **, למשל** $f(5)=11,005\rightarrow+\infty$ **, ואין אסימפטוטה אופקית לימין.**

כאשר $x\rightarrow-\infty$ **, למשל** $f(-10)=176,203\rightarrow+\infty$ **, ואין אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

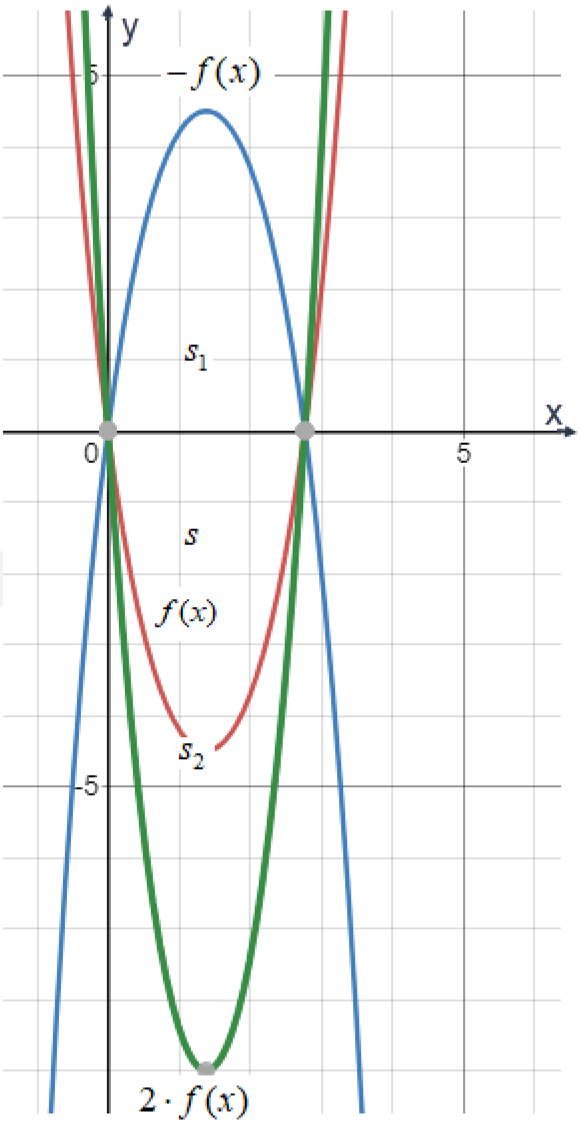


תשובה: הסרטוט מעל .

ו. $-f(x)$ **(גרף כחול) היא פונקציה הסימטרית ל-** $f(x)$ **, כאשר ציר ה-** x **הוא ציר הסימטריה, ולכן** $s_1=s$ **.**

$2\cdot f(x)$ **היא פונקציה שבה כל ערכי ה-** y **כפולים מאלו של** $f(x)$ **,**

והגרף שלה (הירוק) תופס שטח כפול משל מתחת לציר ה- x **ולכן , ולכן** $s_2>s$ **.**



תשובה: $s_1=s$ **,** $s_2>s$**.**

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=\frac{\ell n\,(x+1)}{x+1}}$.

(1) בתחום ההגדרה מכנה צ"ל שונה מאפס, והביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית צ"ל חיובי.

$x+1>0$ **, ולכן** $x>-1$.

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x>-1$.

(2) אם נציב $x=-0.9999$ **נקבל** $f(-0.9999)=-92{,}103\to-\infty$ **, ולכן הישר** $x=-1$ **הוא אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $x=-1$ **אסימפטוטה המאונכת לציר ה-** x .

ב. בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

$$0=\frac{\ell n\,(x+1)}{x+1}$$
$$\ell n\,(x+1)=0$$
$$x+1=e^0=1$$
$$x=0\quad\to\boxed{(0,0)}$$

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x **הם** $(0,0)$.

ג. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)-\ell n\,(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{1-\ell n\,(x+1)}{(x+1)^2}}$$
$$0=1-\ell n\,(x+1)$$
$$\ell n\,(x+1)=1$$
$$x+1=e^1$$
$$\boxed{x=e-1}\quad\to f(e-1)=\frac{\ell n\,(e-1+1)}{e-1+1}=\frac{1}{e}$$
$$\left.\begin{array}{l} f'(0)=\frac{(+)}{(+)}>0 \\ f'(e)=\frac{(-)}{(+)}<0 \end{array}\right\}\boxed{(e-1,\frac{1}{e})\max}$$

תשובה: $(e-1,\frac{1}{e})$ **, מקסימום.**

ד. נרשום את תחומי העלייה והירידה, בהתאם לתחום ההגדרה ונקודת המקסימום שמצאנו.

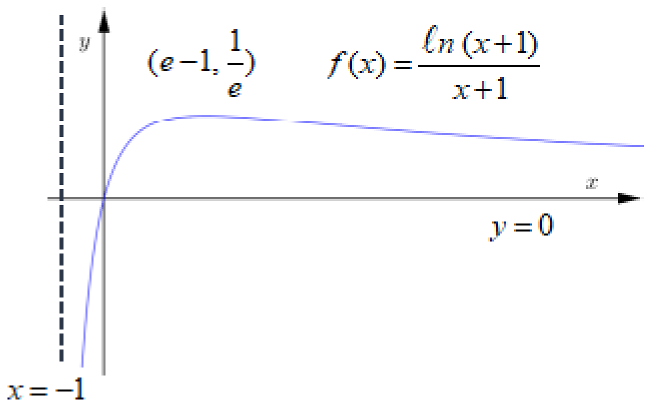
תשובה: עלייה - $-1<x<e-1$ **, ירידה -** $x>e-1$.

ה. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=\dfrac{\ell n(x+1)}{x+1}$ **, כולל תוספות לסעיף ו.**

שתי הצבות ליתר ביטחון, בתוך תחום ההגדרה, למציאת האסימפטוטות.

כאשר $x\to+\infty$ **, למשל** $f(1{,}000)=6.9\cdot10^{-3}\to+0$ **, והישר** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

כאשר $x\to-1^{+}$ **, למשל** $f(-0.9999)=-92{,}103\to-\infty$ **, והישר** $x=-1$ **אסימפטוטה אנכית.**



תשובה: הסרטוט מעל.

ו. $f(x)\cdot f'(x)>0$ **, כאשר** $f(x)$ **חיובית ובעלייה, עבור** $0<x<e-1$ **, כי אז** $f(x)>0$ **וגם** $f'(x)>0$.

אפשרות אחרת, כאשר $f(x)$ **שלילית וירידה, אבל זה לא מתקיים הפעם.**

תשובה: $f(x)\cdot f'(x)>0$ **עבור** $0<x<e-1$.