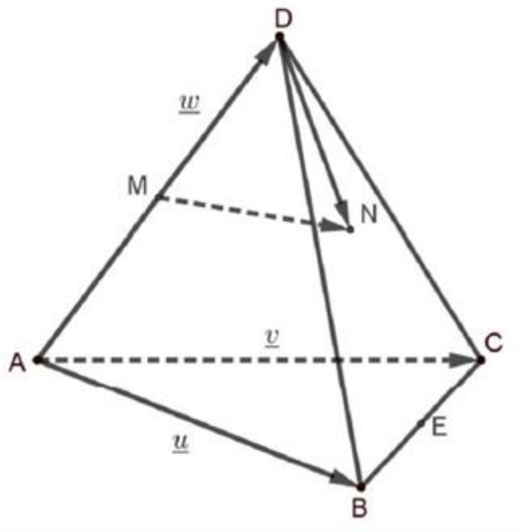
יואל גבע
לא מתפשרים.

מבחן לדוגמה 2, שאלון 35472
מועד קיץ תשפ״א

מורים יקרים,
להלן פתרון בחינת בגרות לדוגמה מהתוכנית החדשה.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. נתונה פירמידה משולשת ABC .



(1) הנקודה M **היא אמצע המקצוע** AD **, לכן:**

$$\boxed{\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\underline{w}} \quad \boxed{\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\underline{w}}$$

הנקודה N **על הפאה** BDC **, כך ש:**

$$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$$

$$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{4}(-\underline{w}+\underline{u}-\underline{w}+\underline{v})$$

$$\boxed{\overrightarrow{DN}=\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{w}}$$

נביע את הווקטור $\overrightarrow{MN}$ **, באמצעות** $\underline{u}$ **,** $\underline{v}$ **ו-** $\underline{w}$ **.**

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DN}$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\underline{w}+\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}}$$

תשובה: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}$ **.**

(2) $\overrightarrow{MN}$ **הוא קומבינציה ליניארית של שני וקטורים הפורשים את מישור** ABC **.**

הנקודה M **לא נמצאת במישור** ABC **, כי היא באמצע המקצוע** AD **.**

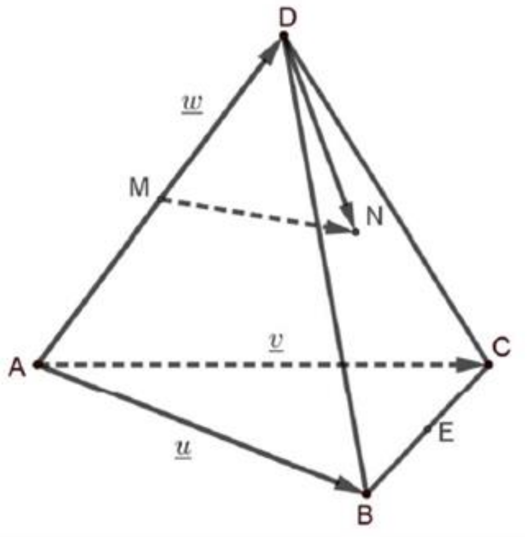
ולכן MN **מקביל למישור, ואינו מוכל בו.**

תשובה: הוכחנו ש- MN **מקביל למישור** ABC **.**

(3) לווקטור $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}$ **אין תלות לינארית עם** $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ **.**

תשובה: MN **אינו מקביל ל-** AB **.**

ב. הנקודה E **היא אמצע המקצוע** BC**, לכן** $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$.



(1) נראה ש- $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$ **גם בדרך הארוכה יותר:**

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AE}=\underline{u}+\frac{1}{2}(-\underline{u}+\underline{v})$$

$$\boxed{\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}}$$

מכאן שלשני הווקטורים המדוברים אותו כיוון:

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$ **ו-** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}(\underline{u}+\underline{v})$.

כיוון ש- AE **ו-** MN **אינם נמצאים באותו ממישור, וקיימת תלות לינארית, הרי שהם מקבילים.**

תשובה: הוכחנו ש- AE **ו-** MN **מקבילים.**

(2) על-פי תת סעיף ב(1) מתקבל ש- $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{MN}$ **ומכאן ש-** $\frac{AE}{MN}=2$.

תשובה: $\frac{AE}{MN}=2$.

ג. נתון: $|\underline{u}|=|\underline{v}|$.

נראה כי $\overrightarrow{BC}$ **ו-** $\overrightarrow{MN}$ **מאונכים.**

<u>משיקולים גיאומטריים</u>

$|\underline{u}|=|\underline{v}|$ **, ולכן** AE **הוא תיכון לבסיס** BC **, במשולש שווה שוקיים** ABC $(AB = AC)$.

מכאן ש- $AE \perp BC$ **(הגובה לבסיס מתלכד עם התיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים).**

כיוון ש- AE **ו-** MN **מקבילים, אז גם** $MN \perp BC$.

(אם אחד משני ישרים מקבילים, מאונך לישר שלישי, אז גם הישר השני מאונך לו).

<u>על-פי חישובי ווקטורים</u>

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}(\underline{u}+\underline{v})\cdot(-\underline{u}+\underline{v})$$

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}(\underline{v}^2-\underline{u}^2)$$

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=0\leftarrow\quad \underline{u}^2=\underline{v}^2\leftarrow\quad |\underline{u}|=|\underline{v}|$$

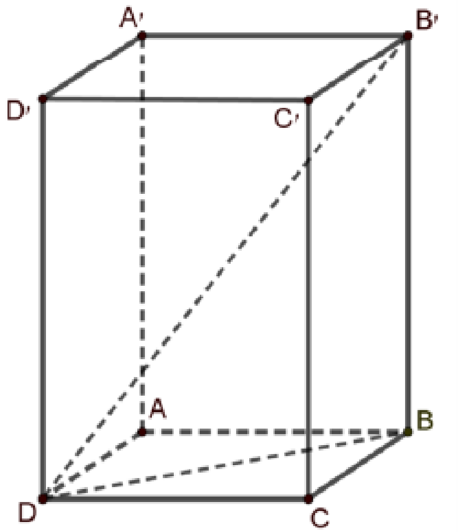
$$\boxed{\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{BC}}$$

תשובה: הראינו כי $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{BC}$.

א. נתונה מנסרה (לא נאמר שהיא ישרה), שבסיסה הוא מקבילית.

נתון: $B'(8,11,-9)$, $D(1,1,0)$, $C(3,-1,-2)$, $A(0,1,-1)$.

נמצא את שיעורי הנקודה B , בהתבסס על כך שצלעות נגדיות במקבילית שוות ומקבילות.



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{DC}=\underline{C}-\underline{D}=\underline{x}=(2,-2,-2)$$
$$\underline{B}-\underline{A}=\underline{x}=(2,-2,-2)$$
$$\underline{B}=\underline{A}+\underline{(2,-2,-2)}$$
$$\underline{B}=(2,-1,-3)\quad\rightarrow\boxed{B(2,-1,-3)}$$

תשובה: $B(2,-1,-3)$.

ב. (1) נראה כי בסיס המנסרה הוא מלבן.

$$\overrightarrow{AD}=\underline{D}-\underline{A}=\underline{x}=(1,0,1)$$
$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=(1,0,1)\cdot(2,-2,-2)$$
$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=1\cdot 2+0\cdot(-2)+1\cdot(-2)=2+0-2=0\quad\rightarrow\boxed{AD\perp DC}$$

ומכאן ש- $ABCD$ מלבן, כי מקבילית עם זווית ישרה היא מלבן.

תשובה: הוכחנו כי בסיס המנסרה הוא מלבן.

(2) נוכיח כי המנסרה היא תיבה, על-ידי שנראה שהווקטור $\overrightarrow{BB'}$ מאונך לבסיס $ABCD$.

נעשה זאת, על ידי כך שנראה שהוא מאונך לשני וקטורים במישור ABC , שאינם תלויים זה בזה.

$$\overrightarrow{BB'}=\underline{B}'-\underline{B}=\underline{x}=(6,12,-6)$$
$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BB'}=(1,0,1)\cdot(6,12,-6)=6+0-6=0\quad\rightarrow\boxed{AD\perp BB'}$$
$$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BB'}=(2,-2,-2)\cdot(6,12,-6)=12-24+12=0\quad\rightarrow\boxed{DC\perp BB'}$$
$$\left.\begin{array}{l}AD\perp BB'\\DC\perp BB'\end{array}\right\}\boxed{BB'\perp\pi_{ABCD}}$$

בסיס המנסרה הוא מלבן, כאשר המקצוע הצדדי מאונך לבסיס, ולכן המנסרה היא תיבה.

תשובה: הוכחנו כי המנסרה היא תיבה .

(2) נחשב את נפח התיבה

$V_{ABCD} = S_{ABCD} \cdot BB'$

$\left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2}$

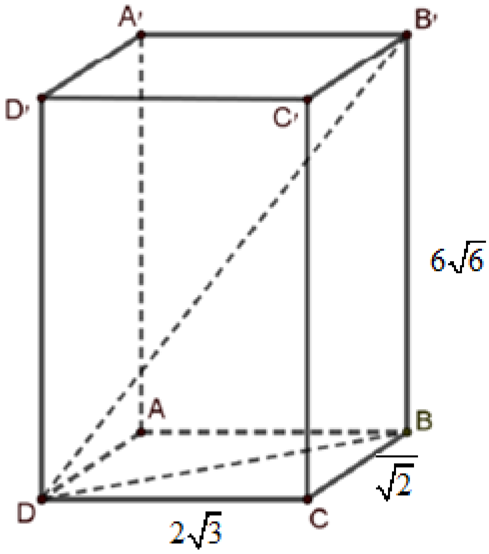
$\boxed{\left|\overrightarrow{DC}\right| = 2\sqrt{3}}$

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}$

$\boxed{\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{2}}$

$S_{ABCD} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$

$\boxed{S_{ABCD} = 2\sqrt{6}}$



$\overrightarrow{BB'} = \sqrt{6^2 + 12^2 + (-6)^2}$

$\boxed{\overrightarrow{BB'} = 6\sqrt{6}}$

$V = 2\sqrt{6} \cdot 6\sqrt{6}$

$\boxed{V = 72}$

תשובה: נפח התיבה הוא 72.

ב. (1) נחשב את הזווית בין אלכסון התיבה DB' ובין אלכסון הבסיס DB, בשתי דרכים.

<u>חישובי ווקטורים</u>

תכנון: $\cos\measuredangle BDB' = \dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{B'D}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B'D}\right|}$

$\overrightarrow{B'D} = \underline{D} - \underline{B'} = \underline{x} = (-7,-10,9)$

$\overrightarrow{BD} = \underline{D} - \underline{B} = \underline{x} = (-1,2,3)$

$\overrightarrow{B'D}\cdot\overrightarrow{BD} = (-7,-10,9)\cdot(-1,2,3)$

$\overrightarrow{B'D}\cdot\overrightarrow{BD} = (-7)\cdot(-1)+(-10)\cdot 2+9\cdot 3$

$\boxed{\overrightarrow{B'D}\cdot\overrightarrow{BD} = 14}$

$\left|\overrightarrow{B'D}\right| = \sqrt{(-7)^2+(-10)^2+9^2}$

$\boxed{\left|\overrightarrow{B'D}\right| = \sqrt{230}}$

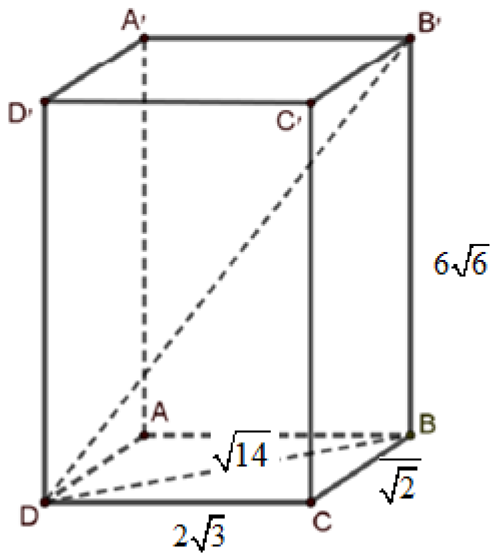
$\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}$

$\boxed{\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{14}}$

$\cos\measuredangle B'DB = \dfrac{\overrightarrow{B'D}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{B'D}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}$

$\cos\measuredangle B'DB = \dfrac{14}{\sqrt{230}\cdot\sqrt{14}}$

$\boxed{\measuredangle B'DB = 75.72°}$



<u>טריגונומטריה במרחב</u>

$\underline{\Delta BDC}$

$(DB)^2 = (DC)^2+(CB)^2$

$(DB)^2 = (2\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2$

$\boxed{DB = \sqrt{14}}$

$\underline{\Delta BDB'}$

$\tan\measuredangle B'DB = \dfrac{BB'}{DB}$

$\tan\measuredangle B'DB = \dfrac{6\sqrt{6}}{\sqrt{14}}$

$\boxed{\measuredangle B'DB = 75.72°}$

תשובה: $\measuredangle B'DB = 75.72°$.

נוסחת הגדילה והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$ **, כאשר** M_0 **- הכמות ההתחלתית**

q **הוא גורם הגדילה/דעיכה,** M_t **הכמות לאחר זמן** t.

א. לאחר 10 **ימים נותרו** 80% **מהכמות ההתחלתית של החומר.**

נמצא פי כמה קטנה כמות החומר בכל יום (גורם הדעיכה).

$$0.8M_0 = M_0 \cdot q^{10} \quad / : M_0$$
$$0.8 = q^{10}$$
$$\sqrt[10]{0.8} = q$$
$$\boxed{q = 0.9779}$$

נמצא את אחוז הדעיכה היומי.

$$0.9779 = \frac{100 - P}{100} \quad / \cdot 100$$
$$97.79 = 100 - P$$
$$\boxed{P = 2.21\%}$$

תשובה: כמות החומר קטנה ב- 2.21% **בכל יום.**

ב. נמצא אחרי כמה ימים, מתחילת המחקר, תרד כמות החומר ב- 40% **- כלומר יישאר ממנו כמות של** 60% .

$$0.6M_0 = M_0 \cdot 0.9779^t \quad / : M_0$$
$$0.6 = 0.9779^t$$
$$\ell n\, 0.6 = \ell n\, 0.9779^t$$
$$\ell n\, 0.6 = t \ell n\, 0.9779$$
$$\frac{\ell n\, 0.6}{\ell n\, 0.9779} = t$$
$$\boxed{t \approx 22.86}$$

ניתן גם:

$$0.6 = 0.9779^t$$
$$t = \ell og_{0.9779} 0.6$$
$$t = \frac{\ell og\, 0.6}{\ell og\, 0.9779} \approx 22.86$$

תשובה: לאחר 22.86 **ימים בערך, כמות החומר תרד ב-** 40% .

ג. 40 **ימים מתחילת המחקר נשארו למדען** 60 **גרם של חומר.**

נמצא את כמות החומר ההתחלתית.

$$60 = M_0 \cdot 0.9779^{40} \quad / : 0.9779^{40}$$

$$\frac{60}{0.9779^{40}} = M_0$$

$$\boxed{M_0 = 146.68}$$

לחילופין, ניתן לעבוד עם גורם דעיכה של 0.8 **לכל** 10 **ימים.**

$$60 = M_0 \cdot 0.8^{4} \quad / : 0.8^{4}$$

$$\frac{60}{0.8^{4}} = M_0$$

$$\boxed{M_0 = 146.48}$$

ההבדלים הקטנים נובעים מעיגולים שבוצעו בגורם הדעיכה.

תשובה: בתחילת המחקר היה למדען 146.48 **גרם.**

בגרות פא ינואר 21 דוגמה 2 שאלון 35472
גם בגרות עז מאי 17 מועד קיץ א שאלון
35805/35482

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{a}{e^{2x}-10e^{x}}$ **.** $a\neq 0$ **פרמטר.**

(1) בתחום ההגדרה מכנה אינו מתאפס.

$$e^{2x}-10e^{x}\neq 0$$
$$e^{x}(e^{x}-10)\neq 0$$
$$e^{x}=10 \qquad e^{x}>0$$
$$\boxed{x\neq \ell n10}$$

תשובה: $x\neq \ell n10$ **.**

(2) $x=\ell n10$ **מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר** $x=\ell n10$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $x=\ell n10$.

ב. הנקודה $(0,-\frac{1}{9})$ **נמצאת על גרף הפונקציה. נציב את שיעוריה בתבנית הפונקציה.**

$$-\frac{1}{9}=\frac{a}{e^{2\cdot 0}-10e^{0}}$$
$$-\frac{1}{9}=\frac{a}{1-10}$$
$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$ **.**

ג. (1) נציב $a=1$ **בתבנית הפונקציה ונקבל:** $f(x)=\frac{1}{e^{2x}-10e^{x}}$.

שתי הצבות זריזות במחשבון ומסקנות:

$f(-10)=-2202\to-\infty$, $f(5)=4.9\cdot10^{-5}\to+0$ **- לכן,** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

$$f'(x)=\frac{0-(2e^{2x}-10e^{x})}{(e^{2x}-10e^{x})^{2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2e^{2x}+10e^{x}}{(e^{2x}-10e^{x})^{2}}}$$

$$-2e^{2x}+10e^{x}=0$$

$$-2e^{x}(e^{x}-5)=0$$

$$e^{x}=5 \qquad -2e^{x}<0$$

$$x=\ell n5 \quad\to f(\ell n5)=\frac{1}{e^{2\ell n5}-10e^{\ell n5}}=-\frac{1}{25} \quad\to \boxed{(\ell n5,-\frac{1}{25})}$$

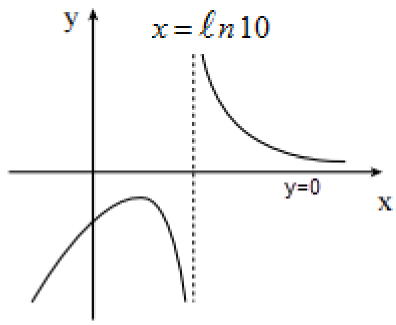
x		$\ell n5$		$\ell n10$	
$f'(x)$	+		-		-
מסקנה	↗	Max	↘		↘

תשובה: $(\ell n5,-\frac{1}{25})$ **מקסימום.**

(2) תשובה: עלייה: $x<\ell n5$ **, ירידה** $x>\ell n10$ **או** $\ell n5<x<\ell n10$.

(3) תשובה: אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x **(מונה הפונקציה חיובי).**

(4) סקיצה של גרף הפונקציה:



ד. $f(x)<0$ **כאשר, על פי הסקיצה** $x<\ell n10$.

$f'(x)<0$ **בירידה של** $f(x)$ **, על פי טבלת העלייה והירידה והסקיצה,**

כאשר $x>\ell n10$ **או** $\ell n5<x<\ell n10$.

התחום המשותף, כאשר $f(x)$ **שלילית ויורדת, הוא** $\ell n5<x<\ell n10$.

תשובה: $\ell n5<x<\ell n10$.

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=\ell n(-x^2+7x-6)}$.

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס, לכן $-x^2+7x-6>0$.

$-x^2+7x-6=0 \quad \to x=1,6$

מתקבלת פרבולה בעלת מקסימום ("בוכה"), שחיובית עבור $1<x<6$.

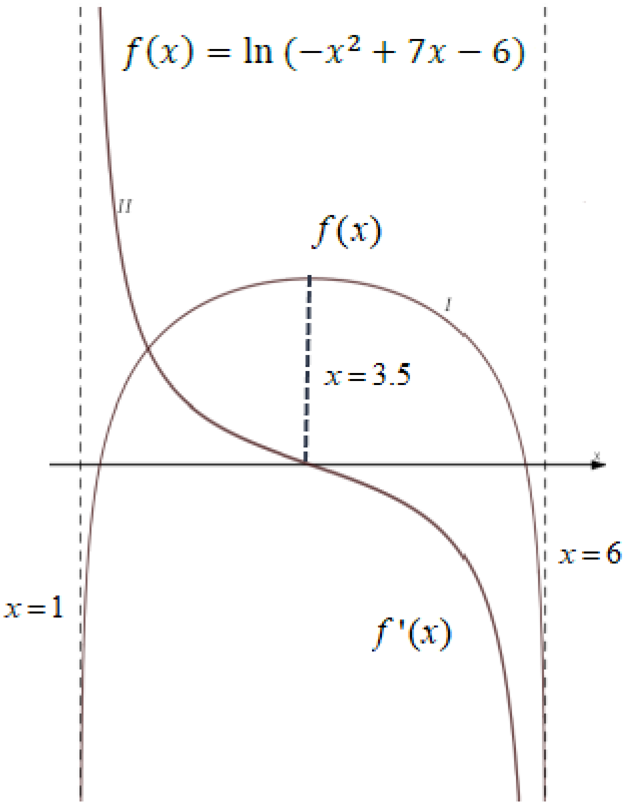
תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $1<x<6$.

(2) כאשר $x\to 1$ **, למשל** $f(1.0000001)=-14.5\to -\infty$ **, ו-** $x=1$ **אסימפטוטה אנכית.**

כאשר $x\to 6$ **, למשל** $f(5.999999)=-12.2\to -\infty$ **, ו-** $x=6$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$,

המקבילות לציר ה- y **, הן:** $x=6$ **ו-** $x=1$.



ב. (1) נמצא את פונקציית הנגזרת.

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x+7}{-x^2+7x-6}}$$

$-2x+7=0$

$\boxed{x=3.5}$

הביטוי $-2x+7$ **עובר מחיוביות לשליליות עבור** $x=3.5$,

ולכן גרף II **הוא של** $f'(x)$,

ובהתאם $x=3.5$ **הוא מקסימום של** $f(x)$

שהגרף שלה הוא I.

תשובה: גרף I **הוא של** $f(x)$ **, גרף** II **הוא של** $f'(x)$.

(2) על פי תת-סעיף ב(1) מתקיים $f'(3.5)=0$

תשובה: נקודת החיתוך של גרף II **עם ציר ה-** x **היא** $(3.5,0)$.

(3) על פי הגרף וגם על-פי תתי-סעיף א(1) ו- ב(1) מתקיים $f'(x)<0$ **עבור** $3.5<x<6$.

תשובה: תחום הירידה של $f(x)$ **הוא** $3.5<x<6$.

ג. נחשב את השטח המוגבל על ידי גרף II של $f'(x)$, ציר ה- x והישר $x=5$.

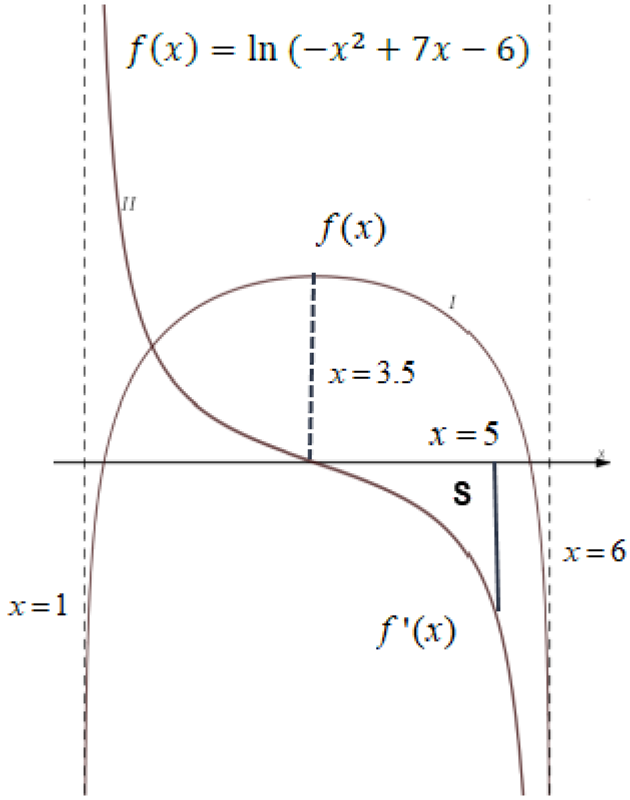
$$S=\int_{3.5}^{5}(0-f'(x))\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_{3.5}^{5}$$

$$S=-f(5)-(-f(3.5))=-\ell n\,4+\ell n\,6.25$$

$$S=\ell n\frac{6.25}{4}$$

$$\boxed{S=\ell n\,1.5625\approx 0.4463}$$



תשובה: השטח המבוקש הוא $\ell n\,1.5625\approx 0.4463$ **יח"ר.**