יואל גבע
לא מתפשרים.

שאלון 35471 מועד
חורף תשפ״א

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35471 מועד חורף תשפ״א.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. הגובה הממוצע של המתגייסים באותו חודש הוא 170 ס"מ $\overline{x}=$, וסטיית התקן היא 10 ס"מ $s=$.

(1) נמצא את אחוז המתגייסים שגובהם מתחת ל- 180 ס"מ.

השטח החלקי משמאל לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,

מייצג את ההסתברות לקבלת ציון שמתחת לציון התקן המתאים.

$$z=\frac{x-\overline{x}}{s}$$

$$z=\frac{180-170}{10}$$

$$\boxed{z=1}$$

$$z=1 \quad \rightarrow p(x<180)=0.8413$$

$$0.8413\cdot 100\%=84.13\%$$

תשובה: גובהם של 84.13% מהמתגייסים הוא מתחת ל- 180 ס"מ.

(2) מספר המתגייסים בחודש המסוים הוא 2,000 .

$0.8413\cdot 2000\approx 1683$ **, ולכן גובהם של 1,683 מתגייסים הוא מתחת ל- 180 ס"מ.**

$2000-1683=317$ **, ולכן גובהם של 317 מתגייסים הוא מעל ל- 180 ס"מ.**

תשובה: גובהם של כ- 317 מתגייסים הוא מעל ל- 180 ס"מ.

ב. נמצא את הגובה ש- $\frac{1}{5}=0.2$ מהמתגייסים נמצאים מתחתיו.

$$p=0.2 \quad \rightarrow z=-0.84$$

$$z=\frac{x-\overline{x}}{s}$$

$$-0.84=\frac{x-170}{10}\ .$$

$$-8.4=x-170$$

$$\boxed{161.6=x}$$

תשובה: הגובה של $\frac{1}{5}$ מהמתגייסים נמצאים מתחתיו הוא 161.6 ס"מ.

ג. $h=161.6$.

(1) נחשב מהי ההסתברות שגובהו של מתגייס, בחודש מסוים זה, היא בין 161.6 **ס"מ ל-** 180 **ס"מ.**

גובהם של 84.13% **מהמתגייסים הוא מתחת ל-** 180 **ס"מ.**

גובהם של $\frac{1}{5}=20\%$ **מהמתגייסים הוא מתחת ל-** 161.6 **ס"מ.**

$$84.13\%-20\%=64.13\%$$

$$p(161.6<x<180)=\frac{64.13\%}{100}=0.6413$$

תשובה: ההסתברות היא 0.6413.

(2) ההסתברות שהגובה אינו בתחום הנדרש, היא $1-0.6413=0.3587$.

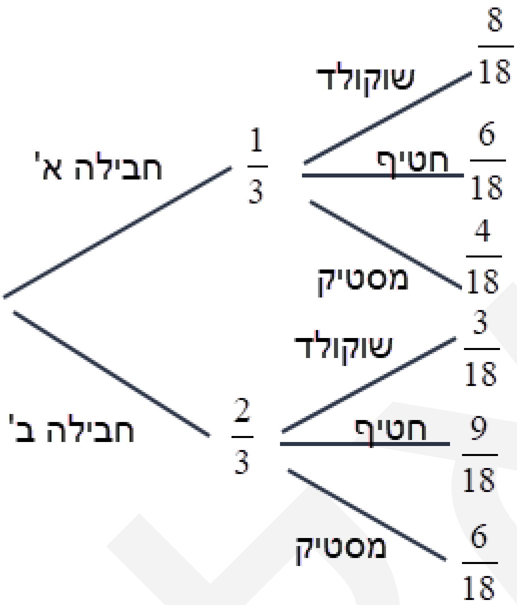
ההסתברות שלפחות אחד מהם יהיה בגובה המבוקש היא : $1-0.3587^2=0.8713$

תשובה: ההסתברות, שהגובה של לפחות אחד משני המתגייסים שנבחרו באקראי,
הוא בין 161.6 **ס"מ ל-** 180 **ס"מ, היא** 0.8713.

א. נבנה עץ אפשרויות מתאים.

בהטלת קוביה מאוזנת יש 2 **אפשרויות מתוך** 6 **לקבלת מספר גדול מ-** 4 ,

לכן ההסתברות לבחור בחבילה א' היא $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$.



נחשב את ההסתברות שהממתק שיוסי יוצא הוא שוקולד.

$$P(a\ chocolate)=\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{18}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{18}=\frac{7}{27}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{7}{27}$.

ב. נחשב את ההסתברות שיוסי בחר בחבילה א, אם ידוע שיוסי הוציא שוקולד.

$$\mathrm{P}(package\ a\ /\ chocolate)=\frac{\mathrm{P}(package\ a\cap a\ chocolate)}{\mathrm{P}(a\ chocolate)}$$

$$\mathrm{P}(package\ a\ /\ a\ chocolate)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{18}}{\frac{7}{27}}=\frac{\frac{4}{27}}{\frac{7}{27}}=\frac{4}{7}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{4}{7}$.

ג. נחשב את ההסתברות שיוסי הוציא מסטיק, אם ידוע שיוסי <u>לא הוציא</u> שוקולד

$$\mathrm{P}(\text{chewing gum}\ /\ not\ a\ chocolate)=\frac{\mathrm{P}(\text{chewing gum}\cap not\ a\ chocolate)}{\mathrm{P}(not\ a\ chocolate)}=$$

$$\mathrm{P}(\text{chewing gum}\ /\ not\ a\ chocolate)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{18}+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{18}}{1-\frac{7}{27}}=\frac{\frac{8}{27}}{\frac{20}{27}}=0.4$$

תשובה: ההסתברות היא 0.4 .

א. נתונה סדרה חשבונית: $86,82,78,...,-70$ **, ובהתאם:** $\boxed{d=-4}$ **.** $d=2$ **ו-** $\boxed{a_1=86}$ **.**

נמצא את מספר האיברים בסדרה.

$$a_n=-70$$
$$a_1+(n-1)d=-70$$
$$86-4(n-1)=-70$$
$$-4(n-1)=-156$$
$$n-1=39$$
$$\boxed{n=40}$$

תשובה: מספר האיברים בסדרה הוא 40 **.**

ב. נחקור את האיברים החיוביים בסדרה.

(1) נמצא כמה איברים חיוביים יש בסדרה.

$$a_n>0$$
$$86-4(n-1)>0$$
$$-4(n-1)>-86 \quad /:(-4<0)$$
$$n-1<21.5$$
$$n<22.5$$
$$\boxed{n=22}$$

תשובה: בסדרה יש 22 **איברים חיוביים.**

(2) נמצא את האיבר החיובי הקטן ביותר.

$$a_{22}=86-4(22-1)$$
$$\boxed{a_{22}=2}$$

תשובה: האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה הוא $a_{22}=2$ **.**

(3) נמצא סכום האיברים החיוביים.

$$S_n=\frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$$
$$S_{22}=\frac{22\cdot(86+2)}{2}$$
$$\boxed{S_{22}=968}$$

תשובה: סכום האיברים החיוביים בסדרה הוא 968**.**

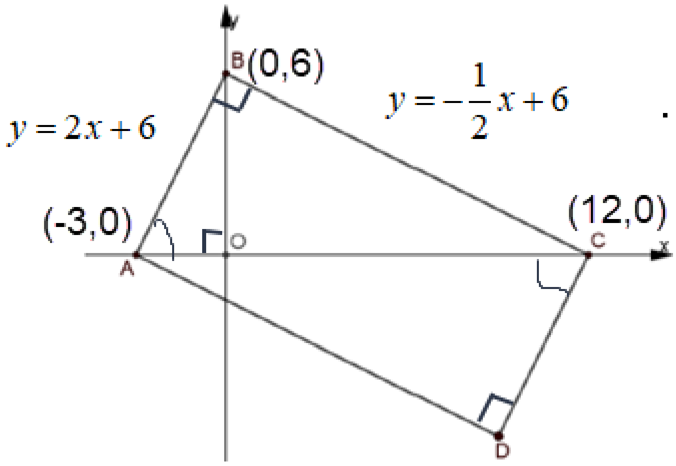
ג. בסדרה הנתונה החליפו את הסימנים של כל איברי הסדרה.

הסדרה שנוצרה היא: $-86, -82, -78, \dots, +70$.

נחשב את סכום איברי הסדרה, שמספר איבריה זהה לסדרה המקורית (כמובן).

$$-86 + (-82) + (-78) + \dots + 70 =$$
$$= -(86 - 82 - 78 + - \dots + (-70) =$$
$$= -S_{40} = -\frac{40 \cdot (86 + (-70))}{2} = \boxed{(-320)}$$

תשובה: סכום הסדרה החדשה הוא (-320).



א. $AO=3$ **ובהתאם** $A(-3,0)$.

$\tan\sphericalangle BAO=2$ **ובהתאם** $m_{AB}=2$ $(m=\tan\alpha)$.

נמצא את משוואת הישר AB **, על-פי** $A(-3,0)$ **ו-** $m_{AB}=2$.

$$y-0=2(x-(-3))$$

$$\boxed{y=2x+6}$$

תשובה: משוואת הישר AB **היא** $y=2x+6$.

ב. (1) צלעות המלבן $ABCD$ **מאונכות זו לזו, ולכן** $m_{BC}=-\frac{1}{2}\quad\leftarrow m_{AB}=2$ **(שיפועים הופכיים ונגדיים).**

הישר AB **חותך את ציר ה-** y **בנקודה** $B(0,6)$ **, ולכן משוואת הישר** BC **היא** $y=-\frac{1}{2}x+6$.

תשובה: משוואת הישר BC **היא** $y=-\frac{1}{2}x+6$.

(2) הקודקוד C **מונח על ציר ה-** x **, ולכן** $y_C=0$.

$$y=-\frac{1}{2}x+6$$

$$\frac{1}{2}x=6\quad /:(\frac{1}{2})$$

$$x=12\quad\rightarrow\boxed{C(12,0)}$$

תשובה: $C(12,0)$.

ג. נראה כי $\Delta AOB \sim \Delta CDA$ **ונמצא את יחס השטחים.**

(1) $AB \parallel DC$ **(צלעות המלבן מקבילות זו לזו),**

ולכן $\sphericalangle BAO = \sphericalangle ACD$ **(זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים).**

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ADC = 90°$ **(הצירים מאונכים זה לזה, וגם צלעות המלבן).**

$\Delta AOB \sim \Delta CDA$ **(משפט דמיון זווית זווית).**

תשובה: הוכנו ש- $\Delta AOB \sim \Delta CDA$.

(2) <u>על פי חישובי שטחים</u>

$y_B = -y_D$ **כי** AC **מונחת על ציר ה-** x**, והאלכסונים חוצים זה את זה במלבן.**

$CA = x_C - x_A = 12 - (-3) = 15$.

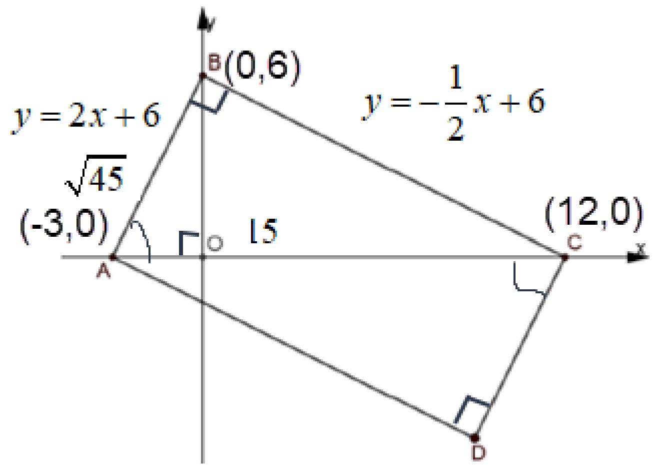
$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta CDA}} = \frac{AO \cdot h_{AO} \cdot \frac{1}{2}}{AC \cdot h_{AC} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3 \cdot y_B}{15 \cdot (-y_D)} = \frac{y_B}{5y_B} = \frac{1}{5} \rightarrow \boxed{\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{1}{5}}$$

<u>על פי הדמיון</u>

$\frac{AO}{CD} = \frac{AB}{CA} = \frac{OB}{DA}$ **(יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים).**

$$AB = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{45}$$

$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta CDA}} = \left(\frac{AB}{CA}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{45}}{15}\right)^2 = \frac{45}{225} = \frac{1}{5} \rightarrow \boxed{\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{1}{5}}$$



תשובה: $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta CDA}} = \frac{1}{5}$.

א. הצלע BC **מונחת על ציר ה-** x **, שמאונך לציר ה-** y .

הקוטר AD **גם מאונך לציר ה-** y **(משיק מאונך לקוטר בנקודת ההשקה).**

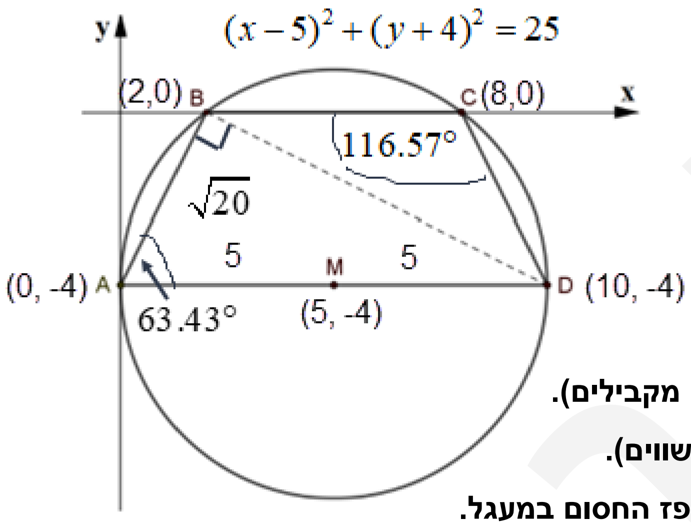
לכן, שתי הצלעות מאונכות לאותו ישר, ומכאן ש- $AD \| BC$.

תשובה: הסברנו למה $AD \| BC$.

ב. $A(0,-4)$ **ו-** $R=5$ **(נתון) , ולכן שיעורי מרכז המעגל הם** $M(5,-4)$.

תשובה: משוואת המעגל היא: $(x-5)^2+(y+4)^2=25$.

ג. (1) AD **מקביל לציר ה-** x **,** $\boxed{D(10,-4)} \rightarrow AD=2R=10$.



$y_B=y_C=0$

$(x-5)^2+(0+4)^2=25$

$(x-5)^2=9$.

$x-5=3 \rightarrow x=8 \rightarrow \boxed{C(8,0)}$

$x-5=-3 \rightarrow x=2 \rightarrow \boxed{B(2,0)}$

תשובה: $D(10,-4)$ **,** $C(8,0)$ **,** $B(2,0)$.

(2) $\measuredangle ADB=\measuredangle CBD$ **(זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים).**

$AB=CD$ **(על זוויות היקפיות שוות נשענים מיתרים שווים).**

כמובן ש- $ABCD$ **הוא טרפז שווה שוקיים, כמו כל טרפז החסום במעגל.**

תשובה: הראינו כי $AB=CD$.

ד (1) נחשב את $\measuredangle BAD$.

$\measuredangle ABD=90°$ **(זווית היקפית הנשענת על הקוטר)**

$\underline{\Delta ADB}$

$\cos\measuredangle BAD=\frac{AB}{AD}$

$AB=\sqrt{(0-2)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{20}$

$\cos\measuredangle BAD=\frac{\sqrt{20}}{10}$

$\boxed{\measuredangle BAD=63.43°}$

או

AD **מקביל לציר ה-** x **,**

ולכן $m_{AB}=\tan\measuredangle BAD$.

$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-(-4)}{2-0}=2$

$\tan\measuredangle BAD=2$

$\boxed{\measuredangle BAD=63.43°}$

תשובה: $\measuredangle BAD=63.43°$.

(2) $\measuredangle BCD=116.57°$ **(סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא** $180°$**).**

תשובה: $\measuredangle BCD=116.57°$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{(x+3)^2}$.

בתחום ההגדרה מכנה שונה מאפס. לכן, $(x+3)^2\neq 0 \quad \rightarrow x+3\neq 0 \quad \rightarrow \boxed{x\neq -3}$.

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\neq -3$.

ב. חזקת המונה (2) **שווה לחזקת המכנה** (2)**, ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

$x=-3$ **מאפס מכנה ולא מונה, לכן הישר** $x=2$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים הן $y=1$ **ו-** $x=-3$.

ג. נמצא נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ציר y **:** $x=0$ **-** $\boxed{(0,0)} \leftarrow f(0)=\frac{0^2}{(0+3)^2}=0$

ציר x **:** $y=0$ **-** $\boxed{(0,0)} \leftarrow x=0 \leftarrow 0=x^2 \leftarrow 0=\frac{x^2}{(x+3)^2}$.

תשובה: $(0,0)$.

ג. נמצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגה.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x+3)^2-x^2\cdot 2(x+3)}{(x+3)^4}$$

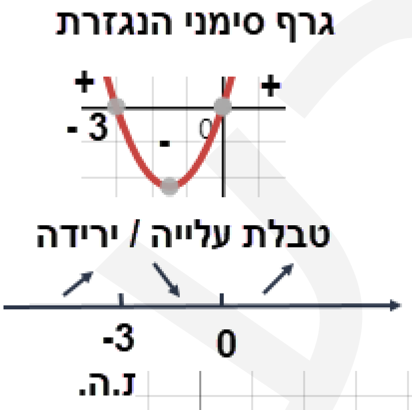
$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x+3)(x+3-x)}{(x+3)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{6x\cdot(x+3)}{(x+3)^4}}$$

$$0=6x\cdot(x+3)$$

$$x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$$

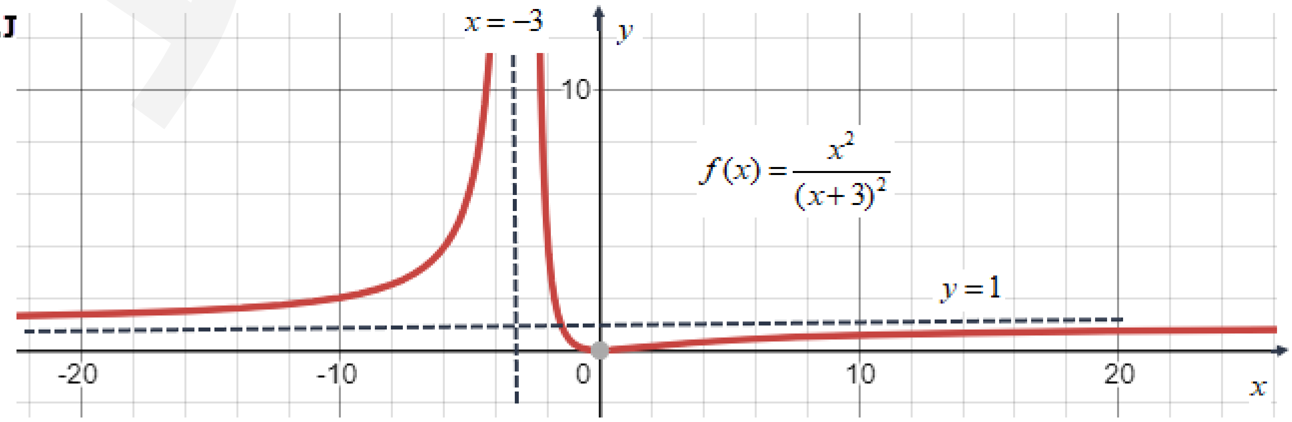
$$\cancel{x=-3}$$



מכנה הנגזר חיובי, והמונה מיוצג על ידי פרבולה בעלת מינימום ("מחייכת"),

תשובה: $(0,0)$ **, מינימום.**

ד. סקיצה מתאימה של גרף הפונקציה



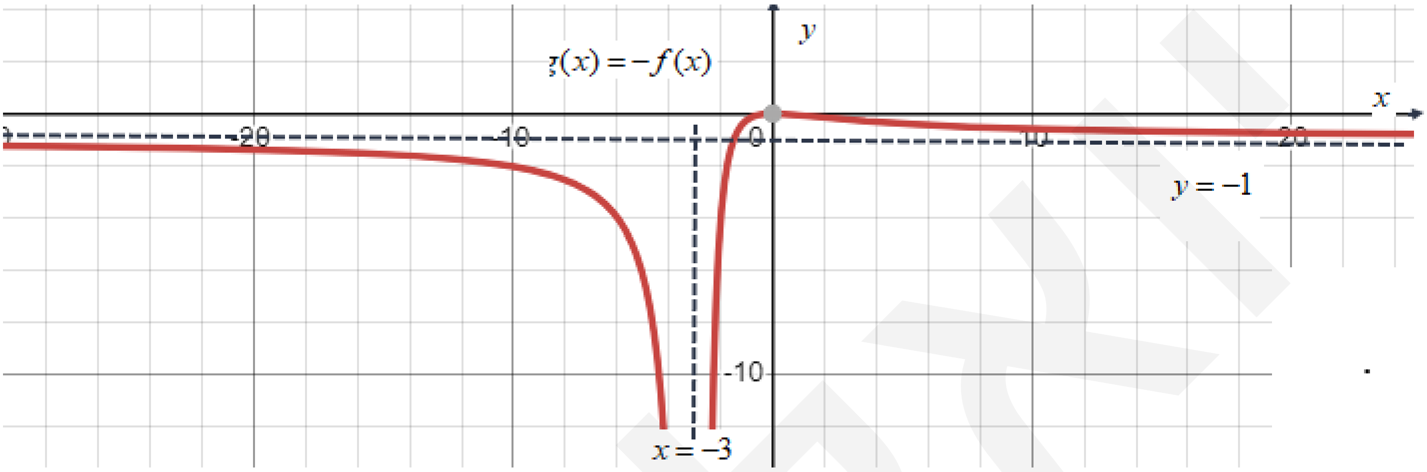
ה. נתונה הפונקציה $g(x)=-f(x)$. פונקציה סימטרית לפונקציה $f(x)$ ולציר ה- x .

נשים לב שנגזרת הפונקציה החדשה היא $g'(x)=-f'(x)$, כלומר שתחומי העלייה והירידה יתהפכו.

(1) תשובה: $y=-1$, ו- $x=-3$.

(2) בסרטוט הגרף של $g(x)=-f(x)$, נשים לב שתחומי העלייה והירידה מתהפכים,

ובעוד ש- $f(x)\geq 0$ לכל $x\neq -3$, הרי ש- $g(x)=-f(x)\leq 0$ לכל $x\neq -3$.



תשובה: הסרטוט מעל.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+b$ **(** b **פרמטר), בתחום** $x>0$ **.**

הישר $y=4$ **הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה.**

כיוון שהביטוי $\frac{2}{x^2}$ **שואף לאפס, כאשר** $x\to\pm\infty$ **, אז** $y=b$ **היא האסימפטוטה האופקית ולכן** $b=4$ **.**

תשובה: $b=4$ **.**

ב. $f(x)=\frac{2}{x^2}+4$ **, בתחום** $x>0$ **.**

בתחום ההגדרה, מכנה שונה מ- 0 **, לכן** $x\neq 0$ **.**

$x=0$ **מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

$y=4$ **אסימפטוטה אופקית.**

קל לראות שהביטוי $\frac{2}{x^2}+4$ **גדול מ-** 4 **לכל** $x\neq 0$ **, ובפרט כבור** $x>0$,

ולכן הגרף היחידי שמתאים, ואין צורך למצוא תחומי עלייה וירידה, הוא גרף (3).

תשובה: גרף (3) הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$ **.**

ג. $f'(x)=-4$ **, כי זה שיפוע המשיק בנקודה.**

$f'(x)=\frac{-4x}{x^4}$ **(ואכן, ניתן לראות שהנגזרת שלילית, עבור** $x>0$ **, ולכן הפונקציה יורדת) .**

$$\frac{-4}{x^3}=-4$$

$$1=x^3$$

$$x=1\quad\to(1,6)$$

נמצא את משוואת המשיק, עבור $(1,6), m=-4$

$$y-6=-4(x-1)$$

$$y-6=-4x+4$$

$$\boxed{y=-4x+10}$$

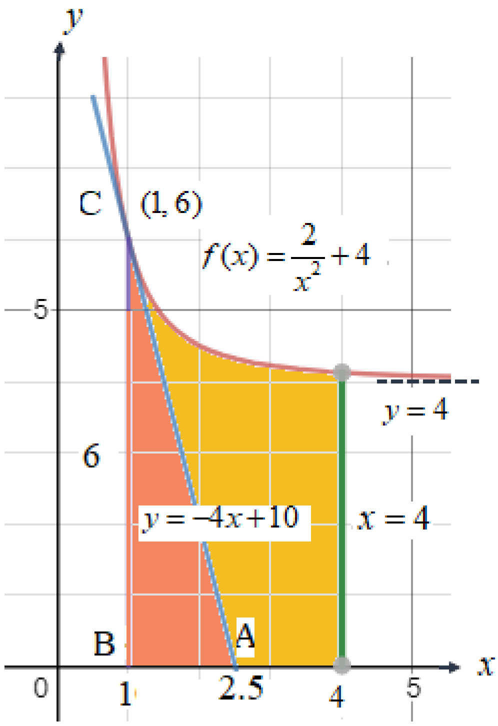
תשובה: משוואת המשיק היא $y=-4x+10$ **.**

ד. נחשב את השטח הצהוב, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק, ציר ה- x והישר $x=4$.

נחשב את השטח הצהוב והאדום יחדיו (על ידי אינטגרל),

ונחסר ממנו את שטח המשולש ישר הזווית (השטח האדום).

$$y_A = 0$$
$$0 = -4x + 10$$
$$4x = 10$$
$$\boxed{x_A = 2.5}$$
$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{1.5 \cdot 6}{2} = 4.5$$



$$S = \int_1^4 \left(\frac{2}{x^2} + 4 - 0\right) dx$$
$$S = \int_1^4 (2x^{-2} + 4)\, dx$$
$$S = \left(\frac{2 \cdot x^{-1}}{-1} + 4x\right)\Big]_1^4$$
$$S = \left(-\frac{2}{x} + 4x\right)\Big]_1^4$$
$$x = 4: \quad -\frac{2}{4} + 4 \cdot 4 = 15.5$$
$$x = 1: \quad -\frac{2}{1} + 4 \cdot 1 = 2$$
$$\boxed{S = 13.5}$$

וגודל השטח המבוקש הוא $13.5 - 4.5 = 9$.

תשובה: השטח המוגבל הוא 9 .

א. בציור מוצג גרף הפונקציה $f(x)=x^2\sqrt{10-4x}$.

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שבתוך השורש צ"ל אי שלילי.

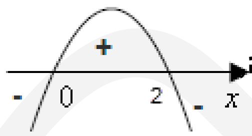
$$10-4x\ge 0$$
$$-4x\ge -10 \quad /:(-4<0)$$
$$\boxed{x\le 2.5}$$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x\le 2.5$.

(2) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של $f(x)$.

$(2.5,0)$ **היא נקודת קצה, מינימום, אולם אנחנו מחפשים את נקודות הקיצון הפנימיות.**

$$f'(x)=2x\sqrt{10-4x}+\frac{x^2\cdot(-\cancel{4}^{2})}{\cancel{2}\sqrt{10-4x}}$$
$$f'(x)=\frac{2x(10-4x)-2x^2}{\sqrt{10-4x}}$$
$$f'(x)=\frac{20x-8x^2-2x^2}{\sqrt{10-4x}}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{20x-10x^2}{\sqrt{10-4x}}}$$
$$0=20x-10x^2 \quad\to 0=10x(2-x) \quad\to x=0,\ x=2$$
$$f(2)=2^2\cdot\sqrt{10-4\cdot 2}=4\sqrt{2} \quad\to \boxed{(2,\ 4\sqrt{2})}$$
$$f(0)=0^2\cdot\sqrt{10-4\cdot 0}=0 \quad\to \boxed{(0,\ 0)}$$



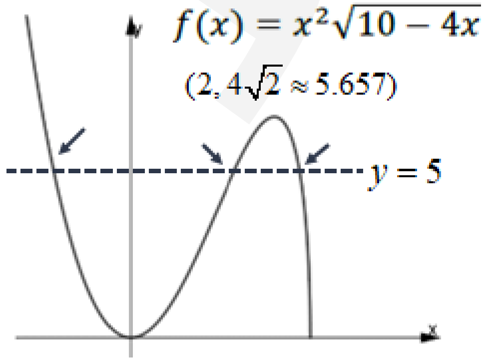
כיוון שמכנה הנגזרת חיובי, הרי שסימן הנגזרת נקבע ע"י המונה כאשר הפרבולה ההפוכה משמאל מראה כי את סימני הנגזרת.

x	2.5		2		0	
$f'(x)$		-		+		-
מקסום		↘	**Max**	↗	**Min**	↘

תשובה: נקודות הקיצון הפנימיות הן $(2,\ 4\sqrt{2})$ **מקסימום,** $(0,\ 0)$ **מינימום.**

(3) הישר $y=5$ **חותך את גרף הפונקציה בשלוש נקודות.**

תשובה: למשוואה $x^2\sqrt{10-4x}=5$ **יש שלושה פתרונות.**

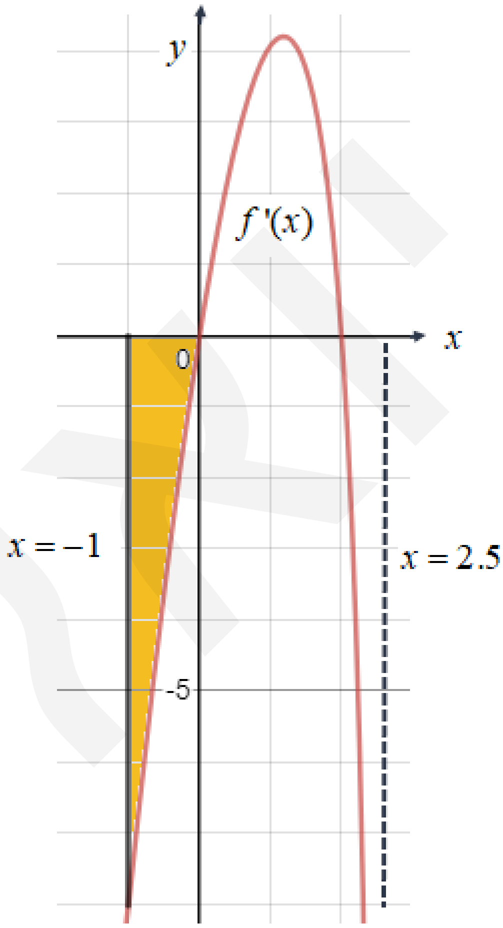


ב. $f'(x)$ **מוגדרת בתחום** $x<2.5$ **ויש לה אסימפטוטה אנכית** $x=2.5$.

(1) הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות, ולהיפך – בהתאם לטבלת העלייה והירידה שעשינו בתת-סעיף א(2).

תשובה: חיוביות - $0<x<2$ **, שליליות -** $2<x<2.5$ **או** $x<0$.

(2) נצייר את גרף הנגזרת, כולל סימון השטח עבור סעיף ג.



ג. נחשב את השטח המבוקש, המסומן בסקיצה שבתת-סעיף ב(2).

$$S=\int_{-1}^{0}(0-f'(x))\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_{-1}^{0}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=0 & -f(0)=0 \\ x=-1 & -f(-1)=-\sqrt{14} \end{array}\right\} S=0-(-\sqrt{14}) \quad \rightarrow \boxed{S=\sqrt{14}}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $\sqrt{14}$ **יח"ר.**