שאלון 35471 מועד
חורף נבצרים תשפ"ב

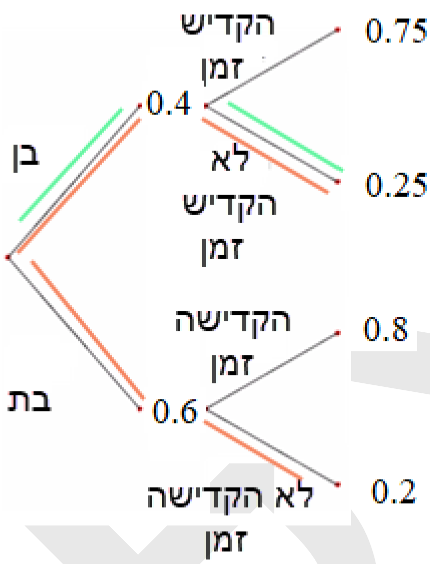
מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35471 מועד חורף נבצרים תשפ"ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. סה"כ השתתפו בסקר $2{,}000$ **בני נוער, ובהתאם ההסתברות של בן היא** $\frac{800}{2{,}000}=0.4$ **ושל בת** 0.6 .

נבנה עץ אפשרויות מתאים.



נחשב את ההסתברות שנבחר בן שהקדיש זמן ללימודים.

$P($**בן שהקדיש זמן ללימודים**$)=0.4\cdot 0.75=0.3$

תשובה: ההסתברות היא 0.3 .

ב. נחשב את ההסתברות שנבחר משתתף (בן או בת) שלא הקדיש זמן ללימודים.

$P($**משתתף שלא הקדיש זמן ללימודים**$)=0.4\cdot 0.25+0.6\cdot 0.2+=0.22$

תשובה: ההסתברות היא 0.22 .

ג. נחשב את ההסתברות שנבחר בן, אם ידוע שנבחר משתתף שלא הקדיש זמן ללימודים

(המסלול הירוק, מתוך המסלולים האדומים).

$P($**לא הקדיש זמן ללימודים / בן**$)=\frac{P(\text{בן} \cap \text{לא הקדיש זמן ללימודים})}{P(\text{משתתף שלא הקדיש זמן ללימודים})}=\frac{0.4\cdot 0.25}{0.22}=\frac{0.1}{0.22}=\frac{5}{11}$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{5}{11}$.

ד. נחשב את ההסתברות שנבחרה בת, אם ידוע שנבחר משתתף שלא הקדיש זמן ללימודים.

$P($**לא הקדישה זמן ללימודים / בת**$)=\frac{P(\text{בת} \cap \text{לא הקדישה זמן ללימודים})}{P(\text{משתתף שלא הקדיש זמן ללימודים})}=\frac{0.6\cdot 0.2}{0.22}=\frac{0.12}{0.22}=\frac{6}{11}$

כיוון ש- $\frac{6}{11}>\frac{5}{11}$ **, אז גם אחוז הבנים יהייה קטן מזה של הבנות, מבין בני הנוער שלא השקיעו זמן בלימודים.**

תשובה: על פי הסקר, האמירה בכתבה אינה נכונה.

א. זמן ההמתנה של אדם למענה אנושי מתפלג נורמלית.

זמן ההמתנה הממוצע של אדם למענה אנושי הוא 1.8 דקות $\overline{x}=$.

הגרף של התפלגות נורמלית סימטרי סביב הממוצע, כך שהחציון שווה לממוצע (וגם לשכיח).

תשובה: החציון של זמן ההמתנה הוא 1.8 דקות.

ב. ידוע כי 30.8% מהאנשים שפונים לשירות הטלפוני של החברה ממתינים למענה אנושי מעל 2 דקות.

מכאן ש- 69.2% ממתינים מתחת ל- 2 דקות, ו- $p(x<2)=0.692$.

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, ציון התקן המתאים הוא $z=0.5$ /

$$z=\frac{x-\overline{x}}{s}$$

$$0.5=\frac{2-1.8}{s}$$

$$0.5s=0.2$$

$$\boxed{s=0.4}$$

תשובה: סטיית התקן, של זמן ההמתנה למענה אנושי, היא 0.4 דקות.

ג. (1) נחשב את אחוז האנשים שממתינים למענה אנושי פחות מדקה אחת.

$$z=\frac{1-1.8}{0.4}$$

$$\boxed{z=-2}$$

$$p(z<-2)=0.0227=2.27\%$$

תשובה: 2.27% מהאנשים, ממתינים למענה אנושי פחות מדקה אחת.

(2) התשובה לשאלה זו, לא תלויה בנתוני השאלה, אלא רק בציוני התקן המתאימים.

$$p(0<z<1)=0.841-0.5=0.341=34.1\%$$

תשובה: זמן ההמתנה של 34.1% מהאנשים, הוא בין הממוצע לבין סטית תקן אחת מעל לממוצע.

ד. כפי שאמרנו כבר בתת-הסעיף הקודם ג(2), התשובה מגיעה למעשה ישירות מהטבלה,

ותמיד ההסתברות שנתון יהייה בין הממוצע לסטיית תקן אחת הוא 0.341 .

תשובה: האחוז שנבדק לא השתנה, לעומת השינוי שהיה לפני השינוי בשירות.

א. תוכנית האימונים של עדי, מתוארת על ידי סדרה חשבונית, $a_1 = 6$ **,** $d = 1.5$ **, ו-** $a_n = 42$ **.**

נשתמש בנוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית.

$$42 = 6 + 1.5(n-1)$$
$$36 = 1.5(n-1) \quad /:1.5$$
$$24 = n-1$$
$$\boxed{n = 25}$$

תשובה: תוכנית האימונים של עדי תימשך 25 **שבועות.**

ב. נמצא, את המרחק אותו תרוץ עדי בשבוע ה- 20 **לאימונים.**

$$a_{20} = a_1 + 19d$$
$$a_{20} = 6 + 19 \cdot 1.5$$
$$\boxed{a_{20} = 34.5}$$

תשובה: עדי תרוץ 34.5 **ק"מ בשבוע ה-** 20 **לאימונים.**

ג. לאור הקדמת המרוץ, שינתה עדי את תוכנית האימונים, ובשבוע ה- 21 **היא תרוץ** 36.5 **ק"מ** $= 34.5 + 2$ **.**

נותרו עוד 3 **שבועות** $= 5 - 2$ **עד לסיום תוכנית האימונים.**

גם הפעם זו סדרה חשבונית, שבה $b_1 = 36.5$ **,** $d = 2$ **, ו-** $n = 3$ **.**

עדי תרוץ בשבוע ה- 23 **:** 40.5 **ק"מ** $= b_3 = b_1 + 2d = 36.5 + 2 \cdot 2$

תשובה: לפי התוכנית, לאחר השינוי, עדי לא תרוץ 42 **ק"מ בשבוע האחרון .**

ד. נחשב, בשני שלבים, את סך כול הקילומטרים אותם תרוץ עדי.

$$S_{1-20} = \frac{20\left[2 \cdot 6 + 1.5 \cdot (20-1)\right]}{2} = 405$$
$$S_{21-23} = \frac{3\left[2 \cdot 36.5 + 2 \cdot (3-1)\right]}{2} = 115.5$$

סך הכול: 520.5 **קילומטרים** $= 405 + 115.5$ **.**

תשובה: עדי תרוץ סך הכול 520.5 **קילומטרים במהלך כל האימונים.**

א. **הקודקוד** B **מונח על ציר ה-** y **ועל הישר** $y=-x+4$ **, ולכן** $B(0,4)$.

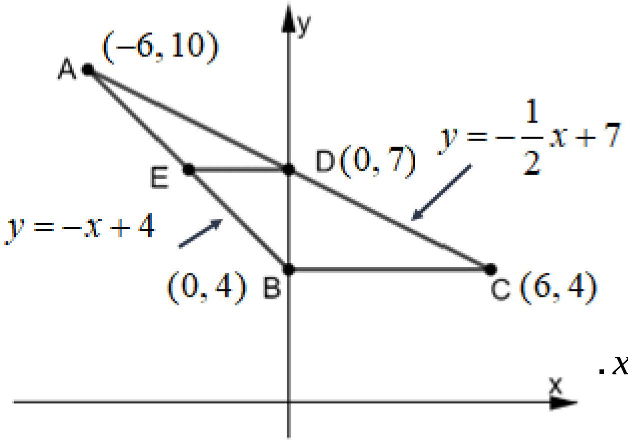
$y_A=10$ **ולכן** $A(-6,10) \rightarrow x=-6 \rightarrow 10=-x+4$.

נחשב את אורך הצלע AB.

$$AB=\sqrt{(-6-0)^2+(10-4)^2}$$

$$\boxed{AB=6\sqrt{2}}$$

תשובה: אורך הצלע AB **הוא** $6\sqrt{2}$.



ב. הצלע BC **מקבילה לציר ה-** x **, לכן:** $y_C=y_B=4$.

אורך הצלע BC **הוא** 6 **, לכן:** $x_C=x_B+6=0+6=6$.

תשובה: שיעורי הקודקוד C **הם** $(6,4)$.

ג. D **היא נקודת החיתוך של הישר** AC **עם ציר ה-** y **, לכן** $x_D=0$.

$$m_{AC}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{10-4}{-6-6}=-\frac{1}{2} \quad \rightarrow m_{AC}=-\frac{1}{2}$$

נמצא את משוואת הצלע AC **, בעזרת** $m_{AC}=-\frac{1}{2}$ **, והקודקוד** $C(6,4)$.

$$y-4=-\frac{1}{2}(x-6)$$

$$y-4=-\frac{1}{2}x+3$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{2}x+7} \quad \rightarrow \boxed{D(0,7)}$$

תשובה: שיעורי הנקודה D **הם** $(0,7)$.

ד. מנקודה D העבירו ישר המקביל לציר ה- x .

(1) נראה שהנקודה D היא אמצע הצלע AC.

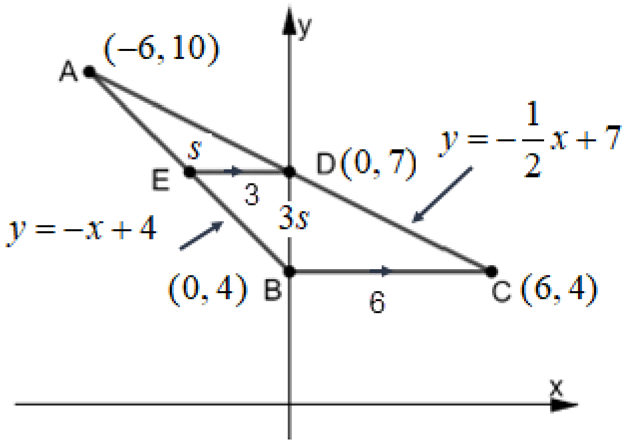
$$\left.\begin{aligned} \frac{x_A+x_C}{2}&=\frac{-6+6}{2}=0 \\ \frac{y_A+y_C}{2}&=\frac{10+7}{2}=7 \end{aligned}\right\} D(0,7)\ o.k.$$

כמו כן, $DE \parallel BC$ כי שניהם מקבילים לציר ה- x .

מכאן ש- DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC,

כי יוצא מאמצע צלע ומקביל לצלע השלישית .

תשובה: הוכחנו כי DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.



(2) קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע השלישית.

$$DE=\frac{BC}{2}=\frac{6}{2}=3$$

תשובה: אורך הקטע DE הוא 3.

ה. $DB=y_D-y_B=7-4=3$.

מכאן ש- ΔEDB הוא ישר זווית ($\sphericalangle EDB=90^\circ$)ושווה שוקיים ($ED=DB$),

ולכן $\sphericalangle EBD=45^\circ$ (זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים).

בהתאם, $\sphericalangle ABC=135^\circ$ (זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים משלימות ל- 180°).

תשובה: $\sphericalangle EBD=45^\circ$, $\sphericalangle ABC=135^\circ$.

ו. $\Delta AED \sim \Delta ABC$, על-פי משפט דמיון צ.צ.צ., כאשר יחס הדמיון הוא $1:2$.

מכאן שיחס השטחים הוא $1:4$ (יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון).

אם נסמן את שטח ΔAED ב- s , אז שטח ΔABC יהייה $4s$,

ובהתאם שטח הטרפז $EDCB$ יהייה $3s$.

נקבל שהיחס בין שטח ΔABC לבין שטח הטרפז $EDCB$ הוא $4:3$.

תשובה: שטח ΔABC גדול משטח הטרפז $EDCB$ פי $\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$.

.

א. מרכז המעגל הוא $M(6,10)$.

המעגל משיק לציר ה- x **, ולכן** $\boxed{A(6,0)}$ $\rightarrow$ $x_A - x_M = 6$

רדיוס המעגל הוא: $R = y_M - y_A = 10 - 0 = 10$.

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-6)^2 + (y-10)^2 = 100$.

ב. B **היא אחת מנקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-** y .

(1) $x_B = 0$.

$$(0-6)^2 + (y-10)^2 = 100$$
$$(y-10)^2 = 64$$
$$\left.\begin{array}{l} y-10=8 \rightarrow y=18 \\ y-10=-8 \rightarrow y=2 \end{array}\right\} \boxed{B(0,18)} \leftarrow y_B > y_M$$

תשובה: שיעורי הנקודה B **הם** $(0,18)$.

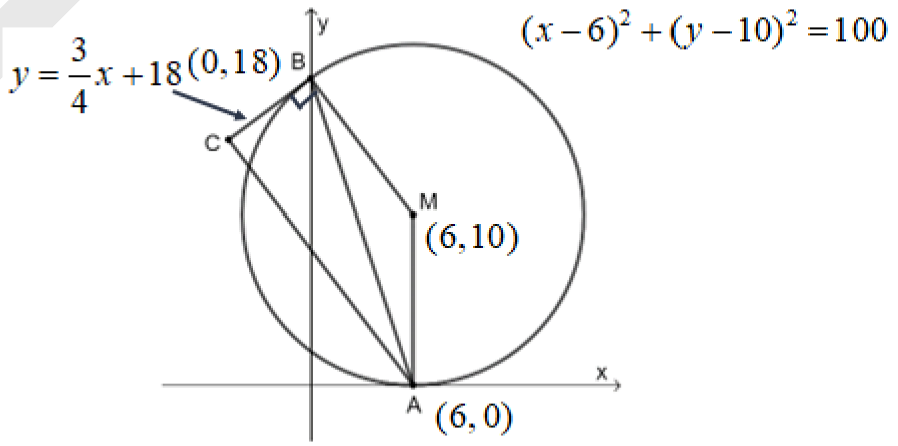
(2) נמצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה $B(0,18)$.

$$m_{BM} = \frac{y_B - y_M}{x_B - x_M} = \frac{18-10}{0-6} = -\frac{4}{3} \rightarrow m_{BM} = -\frac{4}{3}$$

שיפוע המשיק BC **, המאונך לרדיוס, הוא** $+\frac{3}{4}$ **(שיפוע הופכי לנגדי).**

נרשום את משוואת המשיק, שנתונה נקודת החיתוך שלו עם ציר ה- y .

תשובה: משוואת המשיק BC **היא** $y = \frac{3}{4}x + 18$.



ב. נתון $\sphericalangle BCA = 90^\circ$.

(1) $\sphericalangle BCA + \sphericalangle CBM = 180^\circ$.

אם זוויות חד צדדיות משלימות ל- 180° **, אז הישרים מקבילים.**

או, אם שני ישרים מאונכים לישר שלישי, אז הם מקבילים.

תשובה: הוכחנו כי AC **מקביל ל-** MB.

(2) $MB = MA$ **(רדיוסים שווים זה לזה).**

$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA$ **(מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות** ΔMBA **)**

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle MBA$ **(זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים)**

$\sphericalangle MAB = \sphericalangle CAB$ **(כלל המעבר)**

תשובה: הוכחנו כי AB **חוצה את זווית** CAM.

ד. נעבור לטריגונומטריה.

$$AB = \sqrt{(18-0)^2 + (0-6)^2}$$

$$\boxed{AB = 6\sqrt{10}}$$

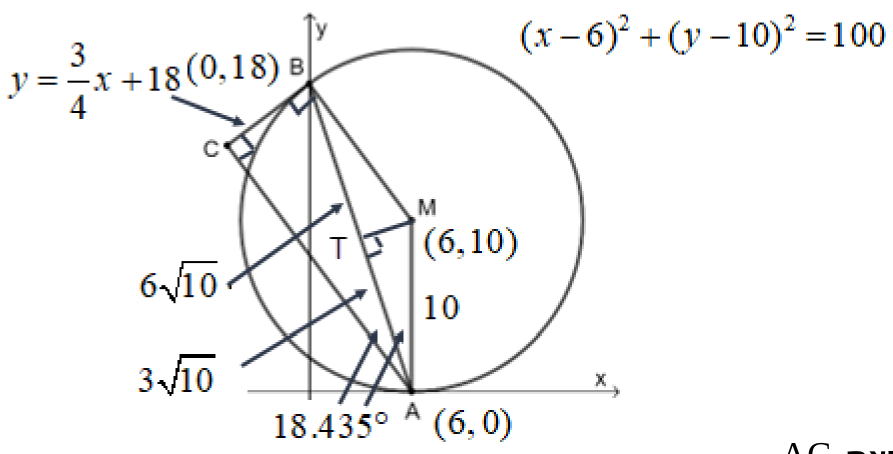
נוריד MT **גובה ל-** AB **, שהוא גם תיכון במש"ש** ΔABM**, ולכן:** $AT = 3\sqrt{10}$.

$\underline{\Delta ATM}$

$$\cos\sphericalangle MAB = \frac{AT}{MA} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\boxed{\sphericalangle MAB = 18.435^\circ}$$

ולכן גם $\sphericalangle CAB = 18.435^\circ$



$\underline{\Delta CAB}$

$$\cos\sphericalangle CAB = \frac{AC}{AB}$$

$$6\sqrt{10} \cdot \cos 18.435^\circ = AC$$

$$\boxed{AC = 18}$$

תשובה: אורך הקטע AC **הוא** 18 .

(ניתן היה , לחילופין, למצוא את משוואת AC,

לאחר מכן למצוא את שיעורי הנקודה C**, ואז את אורך הקטע** AC.)

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$.

(1) בתחום ההגדרה מכנה שונה מאפס.

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq 2$.

(2) נמצא אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x .

אסימפטוטות מאונכת לציר ה- x **: הישר** $x=2$ **(מספר זה מאפס מכנה ולא מונה).**

תשובה: $x=2$.

(3) נמצא נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ציר y **:** $x=0$ **-** $f(0)=\dfrac{0^2-4\cdot 0+5}{0-2}=-2.5 \rightarrow \boxed{(0,-2.5)}$

ציר x **:** $y=0$ **- אין פתרון למשוואה** $x^2-4x+5=0$ **, ולכן אין נקודות חיתוך עם ציר ה-** x .

תשובה: $(0,-2.5)$.

(4) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x-2)-(x^2-4x+5)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-4x-4x+8-x^2+4x-5}{(x-2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}}$$

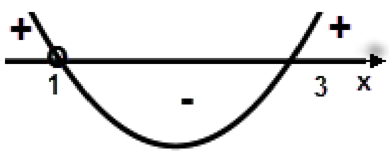
$$x^2-4x+3=0 \rightarrow x=1,3$$

$$f(1)=\frac{1^2-4\cdot 1+5}{1-2}=-2 \rightarrow \boxed{(1,-2)}$$

$$f(3)=\frac{3^2-4\cdot 3+5}{3-2}=2 \rightarrow \boxed{(3,2)}$$

הביטוי במונה הוא של פרבולה ישרה, וסימניה קובעים את סימן הנגזרת.

נצייר את גרף סימני הנגזרת (מכנה הנגזרת חיובי).

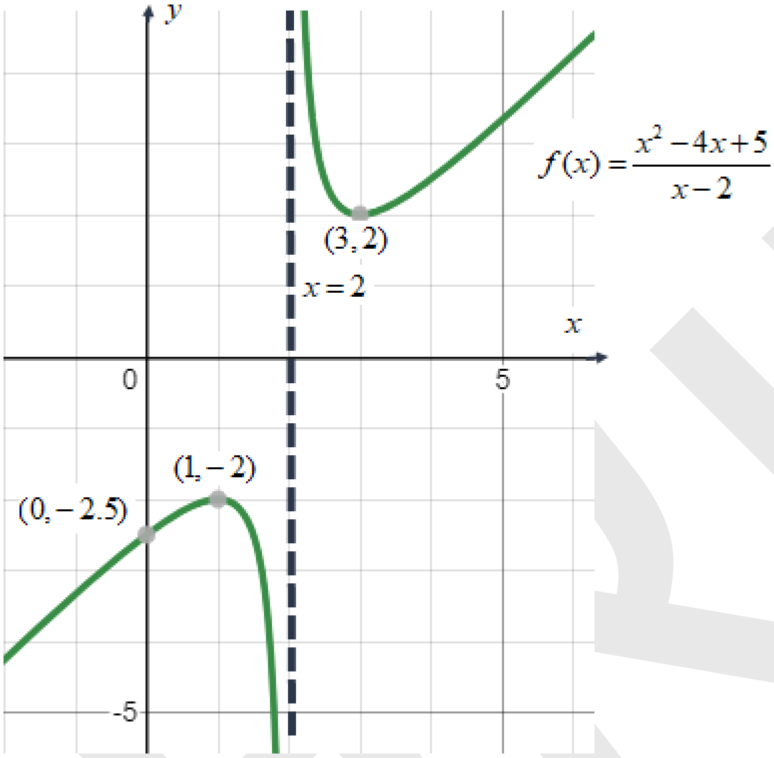


נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה

	1		2		3		x
+		-		-	0	+	$f'(x)$
↗	Max	↘		↘	Min	↗	מסקנה

תשובה: $(3,2)$ **מינימום,** $(1,-2)$ **מקסימום.**

(5) הסקיצה המתאימה.

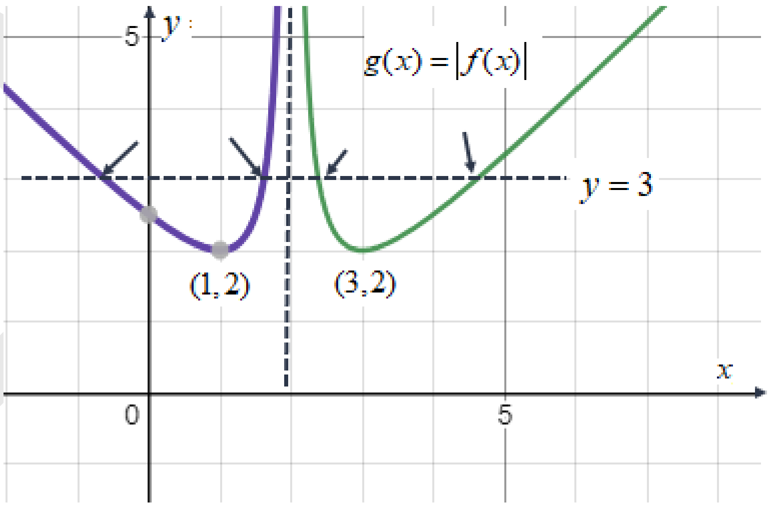


ה. נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)|$.

(1) הערך המוחלט, על הפונקציה $f(x)$ **, משנה את שיעורי ה-** y **השליליים , לחיוביים.**

כלומר הענף, שמשמאל לאסימפטוטה האנכית $x=2$ **יהייה חיובי (סיבוב סביב ציר ה-** x**).**

תחום ההגדרה, והאסימפטוטה האנכית, ללא שינוי.



תשובה: הסרטוט מעל, (כולל סרטוט הישר $y=3$ **עבור תת סעיף (3).**

(2) נקודת המקסימום, שהייתה עם שיעור y **שלילי, הופכת להיות נקודת מינימום עם שיעור** y **חיובי .**

תשובה: $(3,2)$ **מינימום,** $(1,2)$ **מינימום.**

(3) למשוואה $g(x)=3$ **יש ארבעה פתרונות,**

כי הישר $y=3$ **חותך את גרף הפונקציה ארבע פעמים (ראו חיצים).**

תשובה: למשוואה $g(x)=3$ **יש ארבעה פתרונות.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(4x-1)^2}-4$

(1) בתחום ההגדרה מכנה שונה מאפס $4x-1\neq 0 \quad \rightarrow 4x\neq 1 \quad \rightarrow \boxed{x\neq 0.25}$.

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq 0.25$.

(2) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים.

אסימפטוטות מאונכת לציר ה- x **: הישר** $x=0.25$ **(מספר זה מאפס מכנה ולא מונה).**

אסימפטוטות מאונכת לציר ה- y **: המחובר השמאלי שואף ל-** 0**, כאשר** $x\rightarrow\pm\infty$ **,**

ולכן $f(x)\rightarrow 0-4=-4$ **ו-** $y=-4$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $x=0.25$ **,** $y=-4$.

(3) נמצא נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ציר y **:** $x=0$ **-** $f(0)=\frac{1}{(4\cdot 0-1)^2}-4=-3 \quad \rightarrow \boxed{(0,-3)}$

ציר x **:** $y=0$

$$0=\frac{1}{(4x-1)^2}-4$$

$$4=\frac{1}{(4x-1)^2}$$

$$(4x-1)^2=\frac{1}{4}$$

$$4x-1=0.5 \quad \rightarrow x=0.375 \quad \rightarrow \boxed{(0.375,0)}$$

$$4x-1=-0.5 \quad \rightarrow x=0.125 \quad \rightarrow \boxed{(0.125,0)}$$

תשובה: $(0,-3)$ **,** $(0.375,0)$ **,** $(0.125,0)$ **.**

(4) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f'(x)=\frac{0-2\cdot(4x-1)\cdot 4}{(4x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-32x+8}{(4x-1)^2}}$$

$$-32x+8=0 \quad \rightarrow x=0.25$$

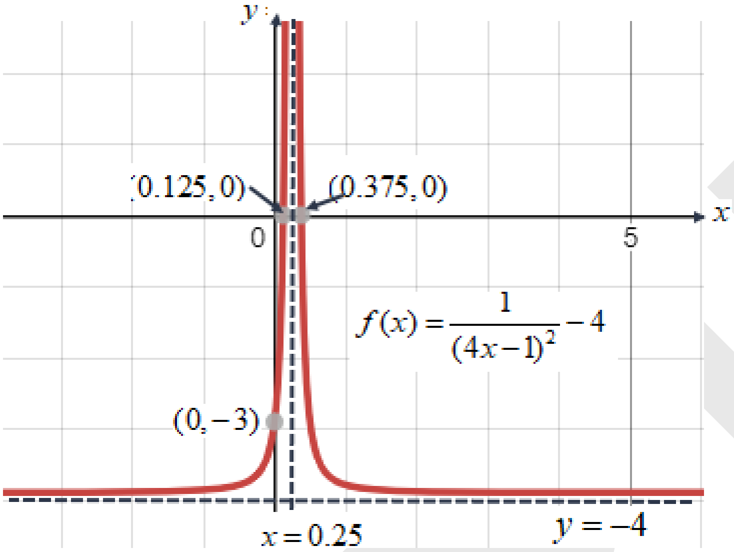
$$f'(1)=\frac{(-)}{(+)}<0 \quad \searrow$$

$$f'(0)=\frac{(+)}{(+)}>0 \quad \nearrow$$

$x=0.25$ **אינו בתחום ההגדרה.**

תשובה: $x>0.25$ **ירידה,** $x<0.25$ **עלייה.**

(5) הסקיצה המתאימה.



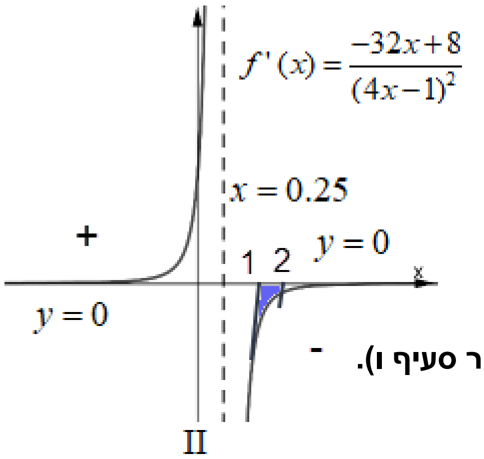
תשובה: הסרטוט מעל.

ב. כאשר מציירים, או בוחרים, את גרף הנגזרת $f'(x)=\frac{-32x+8}{(4x-1)^2}$, נעזרים בשיקולים הבאים:

- תחום הגדרה: $x\neq\pm0.25$
- אסימפטוטות: $x=0.25$, $y=0$.
- נקודות אפס: אין.
- סימני נגזרת, בהתאם לעלייה/ירידה של $f(x)$,:

$f'(x)>0$ כאשר $x<0.25$.

$f'(x)<0$ כאשר $x<0.25$.



תשובה: הגרף המתאים הוא גרף II (בסרטוט מופיע כבר השטח עבור סעיף ו).

ג. נחשב את השטח המבוקש (צבוע בכחול):

$$S=\int_1^2(0-f'(x))\,dx=-f(x)]_1^2$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=2 & -f(2)=\frac{195}{49} \\ x=1 & -f(1)=\frac{35}{9} \end{array}\right\} S=\frac{195}{49}-(\frac{35}{9})=\frac{40}{441}\rightarrow \boxed{S=\frac{40}{441}\approx0.091}$$

תשובה: גודל השטח, המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

על ידי הישרים $x=2$ ו- $x=1$, ועל ידי ציר ה- x , הוא ≈0.091 $\frac{40}{441}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x\cdot\sqrt{a-x}$ **(** a **הוא פרמטר).**

(1) על פי הגרף של $f\,'(x)$ **:** $f\,'(2)=0$ **, כאשר הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות עבור** $x=2$ **.**

מכאן ש- $x=2$ **הוא נקודת מקסימום של** $f(x)$ **.**

$$f\,'(x)=\sqrt{a-x}+x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{a-x}}$$

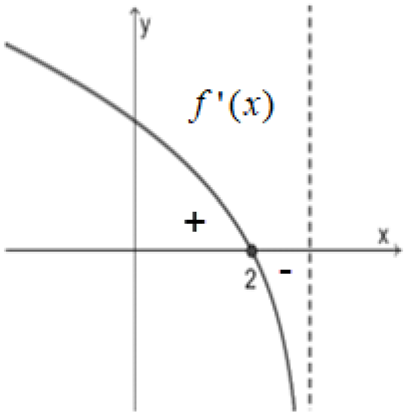
$$f\,'(x)=\frac{2(a-x)-x}{2\sqrt{a-x}}$$

$$0=2(a-2)-2 \leftarrow f\,'(2)=0$$

$$2=2(a-2)$$

$$1=a-2$$

$$\boxed{a=3}$$



תשובה: $a=3$ **.**

ב. $\boxed{f(x)=x\cdot\sqrt{3-x}}$

(1) בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

$$3-x\geq 0$$

$$\boxed{x\leq 3}$$

תשובה: $x\leq 3$ **.**

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל את הנקודה** $(0,0)$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל את הנקודות** $(0,0)$ **,** $(3,0)$ **.**

תשובה: $(3,0)$ **,** $(0,0)$ **.** $f(x)=x\cdot\sqrt{3-x}$

(3) כפי שהסברנו בסעיף א: $x=2$ **הוא נקודת מקסימום של** $f(x)$ **.**

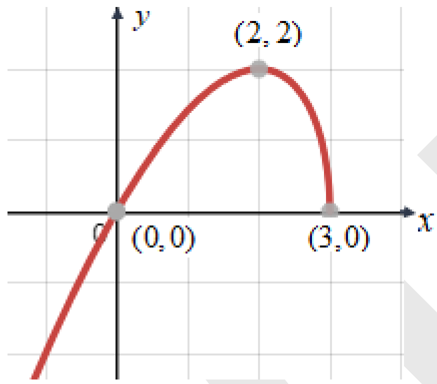
$f(x)=2\cdot\sqrt{3-2}=2$ **ו-** $(2,2)$ **היא נקודת המקסימום.**

כיוון שהפונקציה יורדת מנקודת המקסימום $(2,2)$ **לנקודת הקצה** $(3,0)$ **,**

הרי שנקודת הקצה היא נקודת מינימום.

תשובה: $(3,0)$ **מינימום ,** $(2,2)$ **מקסימום.**

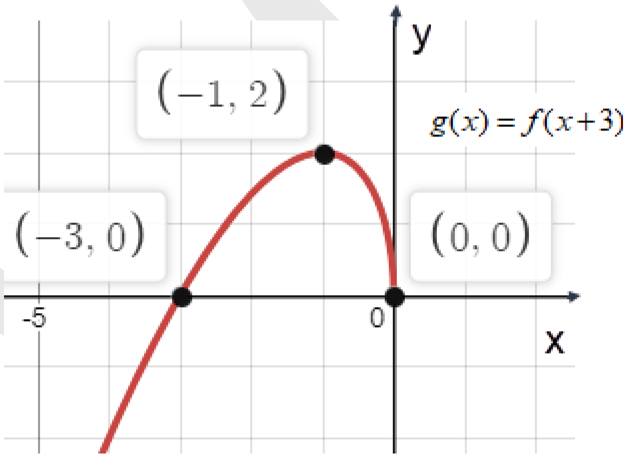
(4) הסקיצה של $f(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x+3)$, שהיא הזזה אופקית, 3 יחידות שמאלה של $f(x)$.

- **תחום ההגדרה הוא $x\le 0$ (כל שאר ההסברים הם לצורכי העשרה ולימוד בלבד.)**
- **נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(-3,0)$**
- **$(0,0)$ מינימום , $(-1,2)$ מקסימום.**
- **הסקיצה המתאימה"**



- **תשובה: תחום ההגדרה של $g(x)$ הוא $x\le 0$.**