

שאלון 35471 מועד קיץ תש"פ

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי
התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:

שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35471 מועד
קיץ תש"פ.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. בטבלת השכיחויות מוצגת התפלגות השכר (ש) ליום עבודה של עובדי מפעל א'.

(1) מספר העובדים הכולל במפעל א' הוא סכום השכיחויות: $7 + 13 + 20 = 40$.
נוסיף שתי שורות בטבלה, כסיוע לחישוב החציון והממוצע.

x - שכר ביום (ש)	180	220	300	סה"כ
f - מספר עובדים	20	13	7	40
שכיחות מצטברת	40	20	7	
מכפלות $x_n \cdot f_n$	3600	2860	2100	

השכר השכיח ליום הוא 180 ש, שכן השכיחות שלו (20 עובדים) היא הגבוהה ביותר.

$$\frac{n+1}{2} = \frac{40+1}{2} = 20.5 \text{ , כאשר:}$$

לכן החציון יהיה ממוצע שכר העובדים, שבמקום ה- 20 וה- 21,

כאשר מסדרים את הציונים מקטן לגדול (או מגדול לקטן, כמו בטבלה שלנו).

במקרה זה, הנתון ה- 20 הוא 220 ש והנתון ה- 21 הוא 180 ש.

$$\text{נחשב את החציון: } \frac{220+180}{2} = 200$$

תשובה: במפעל א' - השכר השכיח ליום הוא 180 ש, והשכר החציוני ליום הוא 200 ש.

(2) נחשב את השכר הממוצע ליום:

$$\bar{x} = \frac{2100 + 2860 + 3600}{40} = \frac{8560}{40}$$

$$\boxed{\bar{x} = 214}$$

תשובה: השכר הממוצע ליום, במפעל א', הוא 214 ש.

(3) הטווח הוא 120 ש $300 - 180$ (ההפרש בין הנתון הגבוה לנתון הנמוך).

נחשב את סטיית התקן של השכר.

$$S = \sqrt{\frac{(300 - 214)^2 \cdot 7 + (220 - 214)^2 \cdot 13 + (180 - 214)^2 \cdot 20}{40}}$$

$$S = \sqrt{\frac{75360}{40}} = \sqrt{1884}$$

$$\boxed{S = 43.41}$$

תשובה: במפעל א' - הטווח הוא 120 ש, וסטיית התקן היא 43.41 ש.

א. במפעל ב' – 40 עובדים, השכר הממוצע ליום הוא 214 ₪ (כמו במפעל א'),
השכר השכיח ליום הוא 200 ₪, השכר החציוני ליום הוא 218 ₪ וסטיית התקן היא 15.7 ₪.

(1) המדד המשמעותי ביותר לפיזור הנתונים, בנתוני השאלה, הוא סטיית התקן.
כיוון שסטיית התקן במפעל א' משמעותית גדולה מזו שבמפעל ב' (43.41 ₪ לעומת 15.7 ₪),
כאשר ממוצע השכר ליום הוא זהה, הרי שבמפעל א' פיזור הנתונים גבוה משמעותית יותר,
ולכן הבדלי השכר בין עובדי מפעל א' גבוהים יותר, מאלו שבין עובדי מפעל ב'.
(הערה – אם ממוצע השכר היה שונה, בין שני המפעלים,
אז הנתון של סטיית התקן כשלעצמו לא היה מספק.)

תשובה: במפעל א' יש הבדלי שכר גדולים יותר בין העובדים.

(2) השכר השכיח ליום הוא 200 ₪, ולכן זהו שכר המשולם לקבוצה גדולה ביותר של עובדים.
מכאן, שלא ייתכן שהשכר הנמוך ביותר ביום הוא 210 ₪.

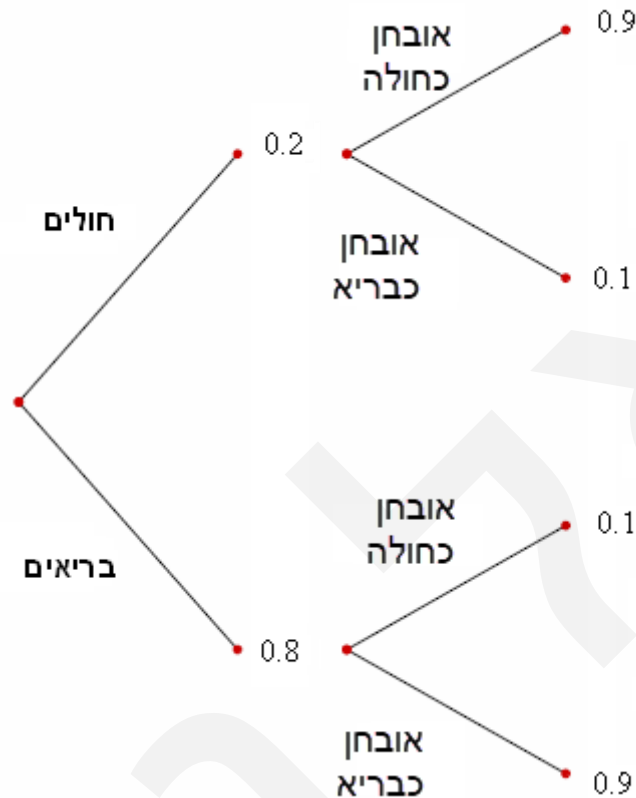
נימוק נוסף: במפעל ב' – השכר הממוצע ליום הוא 214 ₪, כאשר סטיית התקן היא 15.7 ₪.
כיוון שסטיית התקן של השכר היא ממוצע משוכלל של הסטיות מממוצע השכר,
הרי שהיא בהכרח קטנה מההפרש בין הממוצע לנתון הגבוה ביותר, או לנתון הקטן ביותר.
כלומר, לא ייתכן שתהייה מתחת ל- 229.7 ₪, או מעל ל- 198.3 ₪.

תשובה: במפעל ב' השכר הנמוך ביותר אינו 210 ₪, אלא בוודאות נמוך ממנו.

(3) במפעל ב' – השכר החציוני ליום הוא 218 ₪.

מכאן שמחצית מהעובדים מקבלים שכר נמוך משכר זה, ומחציתם שכר גבוה משכר זה.
בהתאם לכך, יותר ממחציתם יקבלו שכר הגבוה מ- 200 ₪ ביום.
תשובה: במפעל ב' רוב העובדים מקבלים שכר גדול או שווה ל- 200 ₪ ביום.

א. נבנה עץ אפשרויות מתאים.



נחשב את ההסתברות שתושב היישוב הוא חולה בנגיף הקורונה וגם אובחן כחולה.

$$P = 0.2 \cdot 0.9 = 0.18$$

תשובה: ההסתברות היא 0.18 .

ב. נחשב את ההסתברות לאבחון התושב כחולה.

$$P = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.1 = 0.26$$

נעבור לאחוזים: $0.26 \cdot 100\% = 26\%$.

תשובה: 26% מהתושבים אובחנו כחולים בנגיף.

ג. נחשב את ההסתברות לאבחנה שגויה.

אבחנה שגויה מתקיימת כאשר תוצאת הבדיקה לא תואמת את המצב הרפואי, כלומר, כאשר תושב בריא אובחן כחולה, או כאשר תושב חולה אובחן כבריא.

$$P = 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.1$$

נעבור לאחוזים: $0.1 \cdot 100\% = 10\%$.

תשובה: בית החולים ביצע אבחנה שגויה עבור 10% מהתושבים.

א. מדובר בסדרה חשבונית עולה, כי מחיר כל מכשיר גדול בסכום קבוע מזה שמשמאל לו בשורה.

מחירם, של הסמארטפון הימני ביותר והסמארטפון השמאלי ביותר יחד, הוא 6,400 ₪.

נסמן ב- n את מספר המכשירים המוצגים בחלון הראווה, והמשוואה המתאימה היא: $a_1 + a_n = 6400$.

בנוסף, ידוע כי המחיר של המכשיר היקר ביותר גדול פי 3 מהמחיר של המכשיר הזול ביותר,

והמשוואה המתאימה היא: $a_n = 3a_1$.

נרשום את מערכת המשוואות המתאימה, ונפתור אותה:

$$\begin{cases} a_1 + a_n = 6400 \\ a_n = 3a_1 \end{cases}$$

$$a_1 + 3a_1 = 6400$$

$$4a_1 = 6400 \quad / : 4$$

$$\boxed{a_1 = 1600} \rightarrow \boxed{a_n = 4800}$$

מכאן שהמחיר של הסמארטפון הזול ביותר הוא 1,600 ₪, ושל הסמארטפון היקר ביותר הוא 4,800 ש"ח.

תשובה: המחיר של המכשיר הזול ביותר, הנמצא בחלון הראווה, הוא 1,600 ₪.

ב. נמצא את מספר המכשירים, כאשר נתון שסכום מחיריהם הכולל הוא 54,400, כלומר: $S_n = 54400$.

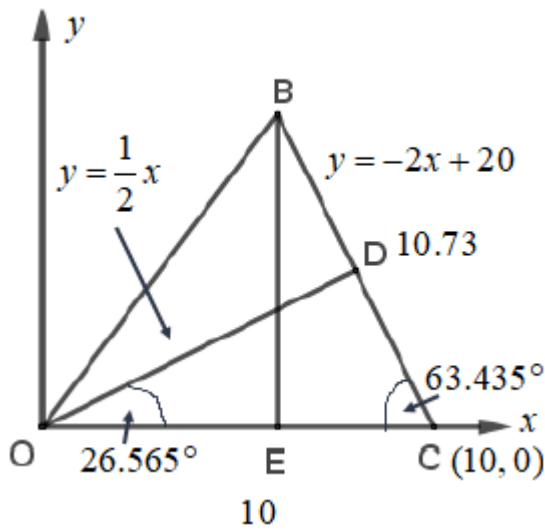
$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$54400 = \frac{n \cdot (6400)}{2}$$

$$54400 = 3200n \quad / : 3200$$

$$\boxed{n = 17}$$

תשובה: 17 מכשירים מוצגים בחלון הראווה.



א. משוואת הישר BC היא $y = -2x + 20$.

$y_C = 0$ כי הנקודה C נמצאת על ציר ה- x.

$$0 = -2x + 20 \rightarrow x = 10 \rightarrow \boxed{C(10, 0)}$$

$$OC = x_C - x_O = 10 - 0 = 10$$

תשובה: אורך הצלע OC הוא 10.

ב. (1) הגובה OD מאונך לצלע BC,

לכן $m_{BC} \cdot m_{OD} = -1$ ע"פ תנאי ניצבות:

$$m_{BC} = -2 \rightarrow m_{OD} = +\frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x \text{ היא OD משוואת הגובה}$$

תשובה: משוואת הישר OD היא $y = \frac{1}{2}x$.

(2) $m = \tan \alpha$, כאשר α היא הזווית שבין הישר לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x.

$$m_{OD} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\angle DOC = 26.565^\circ} \rightarrow \boxed{\angle DCO = 63.435^\circ}$$

תשובה: הזווית החדות של $\triangle ODC$, ישר הזווית, הן: $\angle DCO = 63.435^\circ$, $\angle DOC = 26.565^\circ$.

$$\text{ד. } \frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle ODC}} = 0.8$$

$$(1) \frac{BC}{OC} = \sqrt{0.8} \rightarrow BC = 10\sqrt{0.8} = 4\sqrt{5} \text{ (יחס שטחים של משולשים דומים שווה ליחס הדמיון)}$$

תשובה: אורך הצלע BC הוא $4\sqrt{5}$.

$$(2) S_{\triangle OBC} = \frac{BC \cdot OC \cdot \sin \angle DCO}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 10 \cdot \sin 63.435^\circ}{2} = 40$$

תשובה: שטח המשולש OBC הוא 40.

א. $AB = BC$ ולכן $AB = BC$ (על מיתרים שווים נשענות קשתות שוות).
 $\angle AMB = \angle CMB$ (אם הקשתות שוות אז גם הזוויות המרכזיות שוות).
 תשובה: הוכחנו ש- MB חוצה זווית AMC .

ב. משוואת המעגל היא: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$ ובהתאם $M(3,1)$ ורדיוס המעגל הוא $\sqrt{10}$.

(1) $C(4, -2)$, כאשר המיתר BC מקביל לציר ה- x , ולכן משוואתו היא של פונקציה קבועה.
 תשובה: משוואת הישר BC היא $y = -2$.

(2) נסמן $B(b, -2)$ ונציב את שיעורי הנקודה במשוואת המעגל.

$$(b-3)^2 + (-2-1)^2 = 10$$

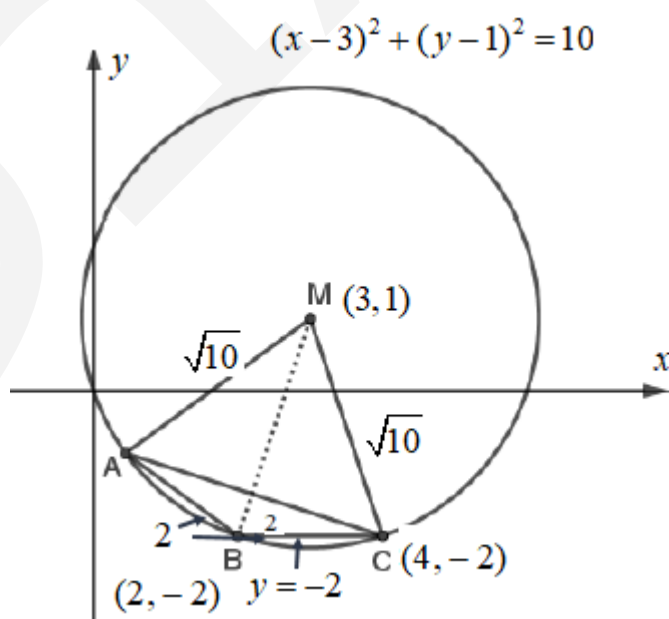
$$(b-3)^2 = 1$$

$$b-3=1 \rightarrow \cancel{b=4} \leftarrow x_C = 4$$

$$b-3=-1 \rightarrow b=2 \rightarrow \boxed{B(2, -2)}$$

$$BC = x_C - x_B = 4 - 2 = 2 \rightarrow \boxed{BC = 2}$$

תשובה: $B(2, -2)$, אורך המיתר BC הוא 2.



ג (1) נחשב את $\angle BAC$ באמצעות משפט סינוסים ב- $\triangle ABC$, החסום במעגל שרדיוסו $\sqrt{10}$.

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R$$

$$\frac{2}{2\sqrt{10}} = \sin \angle BAC$$

$$\boxed{\angle BAC = 18.43^\circ}$$

תשובה: גודל זווית BAC הוא 18.43° .

(2) נחשב את היחס בין שטחי המשולשים AMC ו- ABC.

$$\angle CMC = 2 \cdot 18.43^\circ = 36.87^\circ$$

$$\angle AMC = 2 \cdot 36.87^\circ = 73.74^\circ$$

$$S_{\triangle AMC} = \frac{MA \cdot MC \cdot \sin \angle AMC}{2}$$

$$S_{\triangle AMC} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot \sin 73.74^\circ}{2}$$

$$\boxed{S_{\triangle AMC} = 4.8}$$

$$AB = BC \rightarrow \angle ACB = \angle BAC = 18.43^\circ$$

$$\angle ABC = 180^\circ - 2 \cdot 18.43^\circ = 143.14^\circ$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin 143.14^\circ}{2}$$

$$\boxed{S_{\triangle ABC} = 1.2}$$

$$\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4.8}{1.2} = 4$$

תשובה: שטח משולש AMC גדול פי 4 משטח משולש ABC.

הערה: ניתן לחשב גם את שיעורי (T) נקודת המפגש של המיתר AC עם הקוטר MB, ואז יחס השטחים יהיה יחס הגבהים $MT:BT$, לצלע המשותפת AC.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x+2}$.

בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

$$x+2 \geq 0$$

$$\boxed{x \geq -2}$$

תשובה: $x \geq -2$

ב. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$ ונקבל את הנקודה $(0,0)$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$ ונקבל את הנקודות $(0,0)$, $(-2,0)$.

תשובה: $(0,0)$, $(-2,0)$.

ג. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן. $(-2,0)$ בהכרח נקודת קיצון קצה.

$$f'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+2) + x}{2\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x+4+x}{2\sqrt{x+2}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}}$$

$$0 = 3x+4 \rightarrow x = -\frac{4}{3} \rightarrow (-\frac{4}{3}, -1.089)$$

$$f'(-1.5) < 0, f'(-1) > 0 \rightarrow \boxed{(-\frac{4}{3}, -1.089), \min}$$

כיוון שהפונקציה יורדת מנקודת הקצה $(-2,0)$ לנקודת המינימום, הרי שנקודת הקצה היא נקודת מקסימום.

תשובה: $(-\frac{4}{3}, -1.089)$ מינימום, $(-2,0)$ מקסימום.

ד. הסקיצה משמאל.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = x\sqrt{x+2} + k$,

שהיא הזזה אנכית ב- k יחידות של $f(x) = x\sqrt{x+2}$.

(1) הערך המינימלי של $f(x)$ הוא -1.089 ,

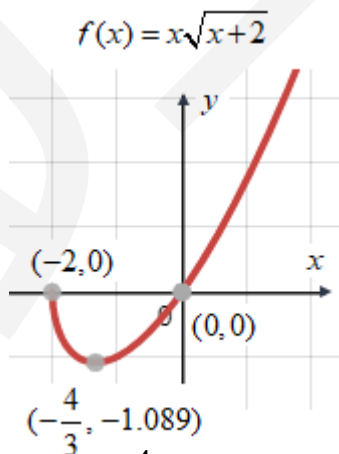
כך שנדרש $k > 1.089$.

תשובה: לדוגמה $k = 2$.

(2) התזוזה האנכית של $f(x)$ היא 2 יחידות כלפי מעלה.

$0 + 2 = 2$ ולכן $(-2,2)$ מקסימום. $-1.089 + 2 = 0.911$ ולכן $(-\frac{4}{3}, 0.911)$ מינימום.

תשובה: $(-2,2)$ מקסימום, $(-\frac{4}{3}, 0.911)$ מינימום.



בגרות פ יוני 20 מועד קיץ א שאלון 35471

א. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + b$ (פרמטר b).

$$f'(x) = 6x^2 - 4x + 1$$

למשוואה $0 = 6x^2 - 4x + 1$ אין פתרון, ולכן לפונקציה אין נקודת קיצון.

תשובה: הראינו כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות קיצון.

ב. בנקודה A שיפוע המשיק הוא 3 ושיעור ה- y שווה ל- 2.

(1) בנקודה A $f'(x) = 3$.

$$3 = 6x^2 - 4x + 1$$

$$0 = 6x^2 - 4x - 2$$

$$x = 1, x = -\frac{1}{3}$$

תשובה: $x_A = 1$, כי A ברביע הראשון.

(2) נמצא את משוואת המשיק, שעובר בנקודה A(1, 2), ששיפועו 3.

$$y - 2 = 3(x - 1)$$

$$y - 2 = 3x - 3$$

$$\boxed{y = 3x - 1}$$

תשובה: משוואת המשיק היא $y = 3x - 1$.

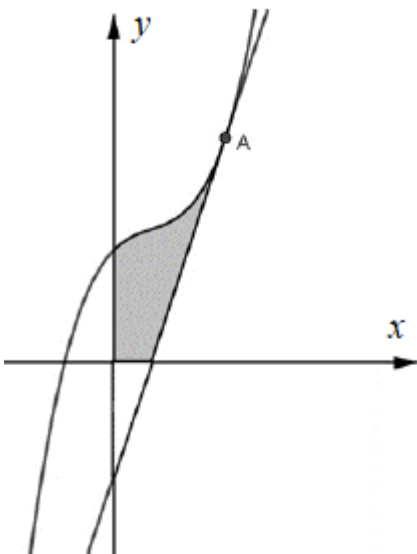
(3) נציב את שיעורי הנקודה A(1, 2).

$$2 = 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + b$$

$$2 = 1 + b$$

$$\boxed{b = 1}$$

תשובה: $b = 1$.



ג. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1$. נחשב את השטח המבוקש, בעזרת חיבור שטחים.

נחשב תחילה את שני השטחים המסומנים, ביחד.

$$S_1 + S_2 = \int_0^1 [2x^3 - 2x^2 + x + 1 - (3x - 1)] dx$$

$$S_1 + S_2 = \int_0^1 (2x^3 - 2x^2 + x + 1 - 3x + 1) dx$$

$$S_1 + S_2 = \int_0^1 (2x^3 - 2x^2 - 2x + 2) dx$$

$$S_1 + S_2 = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x \right]_0^1$$

$$x=1: \frac{5}{6}$$

$$x=0: 0$$

$$S_1 + S_2 = \frac{5}{6}$$

נחשב את S_2 .

C על ציר ה- x ועל המשיק $y = 3x - 1$, ולכן $C(\frac{1}{3}, 0)$.

B על ציר ה- y ועל המשיק $y = 3x - 1$, ולכן $B(0, -1)$.

$$S_2 = S_{\triangle BOC} = \frac{OC \cdot OB}{2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\cdot \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{וגודל השטח האפור הוא:}$$

$$\cdot \frac{2}{3} \quad \text{תשובה: השטח המוגבל הוא}$$

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \rightarrow g(x) = \frac{1}{2x^3 - 2x^2 + x + 1} \quad \text{ד.}$$

(1) חזקת המכנה (3) גדולה מחזקת המונה (0) ולכן $y = 0$ אימפוטטה אופקית.

תשובה: $y = 0$ אימפוטטה המקבילה לציר ה- x של הפונקציה $g(x)$.

(2) כיוון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת אפס אחת (מסומנת בצירוב בחץ),

הרי שקיים x שמאפס את המכנה של $g(x)$ ולא את המונה, ומכאן שיש אימפוטטה אנכית אחת.

תשובה: קיימת אימפוטטה המאונכת לציר ה- x של הפונקציה $g(x)$.

א. הגרף המצורף מתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$, של $f(x)$.
בהתאם לסימני הנגזרת, ניתן לבנות טבלת עליה-ירידה.

x		-2		0		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
מסקנה	↗	Max	↘	Min	↗	Max	↘

תשובה: $x = -2$ מינימום, $x = 0$ מינימום, $x = 2$ מקסימום.

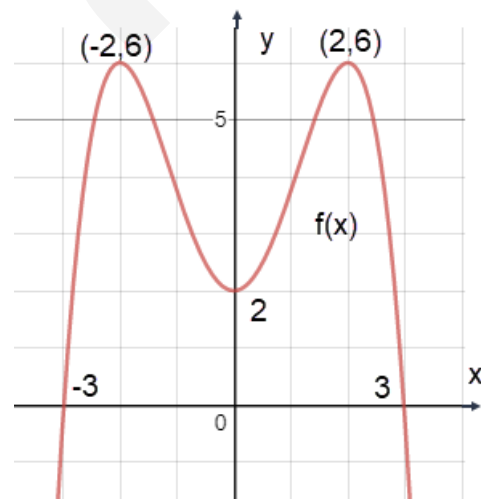
ב. תשובה: עלייה $0 < x < 2$ או $x < -2$, ירידה $x > 2$ או $-2 < x < 0$.

ג. ידוע כי הפונקציה $f(x)$ זוגית, כלומר $f(-x) = f(x)$.

(1) נתון $f(2) = 6$ ולכן גם $f(-2) = 6$.

תשובה: $f(-2) = 6$.

(2) בהתאם לשיעורי נקודות הקיצון וסוגן, נסרטט את גרף הפונקציה.



תשובה: הסרטוט מעל.

ד. $f(x)$ פונקציה זוגית (סימטרית לציר y , ולכן $f'(x)$ פונקציה אי זוגית (סימטרית לראשית).

מכאן ש- $S_1 = S_2$

$$S_1 = \int_0^2 (f'(x) - 0) dx = f(x) \Big|_0^2$$

$$\left. \begin{array}{l} x=2: f(2)=6 \\ x=0: f(0)=2 \end{array} \right\} S_1 = 4$$

ולכן גודל כל השטח הוא: $2 \cdot 4 = 8$.

תשובה: גודל השטח הוא 8.