

שאלון 35471 מועד ב' קיץ תשפ"א

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי
התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:

שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35471 מועד ב'
קיץ תשפ"א.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. הציון הממוצע בבחינה במתמטיקה הוא $\bar{x} = 70$, וסטיית התקן היא $s = 25$.
ציון עובר הוא 55 ומעלה.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z = \frac{55 - 70}{25} = -0.6$$

$$p(z < -0.6) = 0.274$$

$$p(z > -0.6) = 1 - 0.274 = 0.726$$

$$p = 0.726$$

תשובה: ההסתברות, לעבור את בחינת הבגרות במתמטיקה, היא 0.726.

ב. הציון הממוצע בבחינה באנגלית הוא $\bar{x} = 75$, וסטיית התקן היא $s = 20$.
ציון עובר הוא 55 ומעלה.

$$z = \frac{55 - 75}{20} = -1$$

$$p(z < -1) = 0.159$$

$$p(z > -1) = 1 - 0.159 = 0.841$$

$$p = 0.841$$

לכן, ההסתברות לעבור את הבחינה באנגלית גבוהה יותר.
ניתן היה לדעת את זה כבר לאחר חישוב ציון התקן הנדרש,
שהיה נמוך יותר באנגלית מאשר במתמטיקה.
תשובה: ההסתברות לעבור את בחינת הבגרות באנגלית גדולה יותר,
מן ההסתברות לעבור את הבחינה במתמטיקה.

ג. נחשב את ההסתברות המבוקשת, בהנחה של אי תלות בין סיכויי המעבר בשתי הבחינות.

$$P(v \text{ math} \cap v \text{ english}) = P(v \text{ math}) \cdot P(v \text{ english}) = 0.726 \cdot 0.841$$

$$P(v \text{ math} \cap v \text{ english}) = 0.6106$$

תשובה: ההסתברות, שתלמיד שנבחר באקראי יעבור את הבחינה בשני המקצועות, היא 0.6106.

ד. יש שתי אפשרויות מתאימות, שהראשון יעבור והשני ייכשל, או שהשני יעבור והראשון ייכשל.

$$P(\text{one will pass both exams}) = 0.6106 \cdot (1 - 0.6106) + (1 - 0.6106) \cdot 0.6106$$

$$P(\text{one will pass both exams}) = 0.4756$$

תשובה: ההסתברות, שרק אחד מהם יעבור את הבחינה בשני המקצועות, היא 0.4756.

א. נסמן את מספר הכדורים בכד ב- n , מתוכם 6 כדורים כחולים, לכן $p(\text{blue ball}) = \frac{6}{n}$.

כיוון שמחזירים לכד את הכדור שנבחר, לאחר ההוצאה הראשונה,

הרי שההסתברויות בהוצאה השנייה אינן משתנות.

ההסתברות, ששני הכדורים שמוציאים הם כחולים, היא 0.09.

$$\frac{6}{n} \cdot \frac{6}{n} = 0.09$$

$$\left(\frac{6}{n}\right)^2 = 0.09$$

$$\frac{6}{n} = 0.3 \leftarrow \frac{6}{n} > 0$$

$$\boxed{n = 20}$$

מכאן שבכד יש 20 כדורים סך הכול: מהם 6 כדורים כחולים, 9 כדורים כחולים ו- 5 כדורים ירוקים.
תשובה: בכד יש 5 כדורים ירוקים.

ב. (1) נחשב את ההסתברות להוצאת שני כדורים באותו צבע,

כאשר מחזירים את הכדור לאחר ההוצאה הראשונה.

$$p(\text{same color}) = p(\text{blue, blue}) + p(\text{red, red}) + p(\text{green, green})$$

$$p(\text{same color}) = \frac{6}{20} \cdot \frac{6}{20} + \frac{9}{20} \cdot \frac{9}{20} + \frac{5}{20} \cdot \frac{5}{20} = 0.355$$

תשובה: ההסתברות, להוציא באקראי מן הכד שני כדורים באותו הצבע, היא 0.355.

(2) כיוון שההסתברות להוצאת שני כדורים באותו הצבע קטנה מ- 0.5,

הרי שההסתברות להוצאת שני כדורים בצבאים שונים גדולה יותר ($p = 1 - 0.355 = 0.645$).

תשובה: ההסתברות, להוציא באקראי שני כדורים בצבעים שונים,

גדולה מן ההסתברות להוציא באקראי שני כדורים באותו הצבע.

ג. ההסתברות להוציא באקראי לפחות כדור כחול אחד,

היא המאורע המשלים להוצאת אפס כדורים כחולים.

$$p(\text{at least one blue ball}) = 1 - p(\text{zero blue balls}) = 1 - \frac{14}{20} \cdot \frac{14}{20} = 0.51$$

ההסתברות, להוציא באקראי לפחות כדור כחול אחד, היא 0.51.

א. שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הם: $a_1 = k, a_2 = 6 - k, a_3 = 1$.

בסדרה הנדסית, המנה בין כל שני איברים עוקבים היא קבועה, ולכן $\frac{6-k}{k} = \frac{1}{6-k}$.

$$(k-6)^2 = k$$

$$k^2 - 12k + 36 = k$$

$$k^2 - 13k + 36 = 0$$

$$(k-4)(k-9) = 0$$

$$\boxed{k=4} \rightarrow a_1 = 4, a_2 = 2, a_3 = 1, q = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{k=9} \rightarrow a_1 = 9, a_2 = -3, a_3 = 1, q = -\frac{1}{3}$$

תשובה: $k = 4$ או $k = 9$.

ב. נתון שכל איברי הסדרה ההנדסית חיוביים, לכן: $\boxed{a_1 = 4}, a_2 = 2, a_3 = 1, \boxed{q = \frac{1}{2}}$

$$a_7 = a_1 q^6$$

$$a_7 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$\boxed{a_7 = \frac{1}{16}}$$

תשובה: האיבר השביעי בסדרה הוא $\frac{1}{16}$.

ג. נתון כי האיבר השביעי הוא האיבר האמצעי בסדרה.

לכן, יש ששה איברים לפניו, וששה איברים אחריו, סך הכול 13 איברים.

תשובה: בסדרה יש 13 איברים.

ד. בסדרה ההנדסית יש 13 איברים, נחשב את סכומה (סכום רגיל, ולא סכום של אינסוף איברי סדרה).

$$S_{13} = \frac{4 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{13} - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$\boxed{S_{13} = 7.999}$$

תשובה: סכום איברי הסדרה הוא 7.999.

א. נוכיח כי המשולשים AOE ו- CBE דומים.

ABCD מלבן

$\angle O = 90^\circ$ (הצירים מאונכים זה לזה)

$\angle B = 90^\circ$ (זוויות המלבן ישרות)

$\angle B = \angle O$ (כלל המעבר)

$\angle BEC = \angle OEA$ (זוויות קודקודיות שוות זו לזו)

$\triangle CBE \sim \triangle AOE$ (משפט דמיון זווית זווית)

תשובה: הוכחנו שהמשולשים AOE ו- CBE דומים.

ב. נתון: $D(4, 6)$, $C(7, 0)$.

(1) נמצא את משוואת הצלע AD.

$$m_{DC} = \frac{6-0}{4-7} = -2$$

$m_{AD} = +\frac{1}{2}$ (שיפוע הופכי לנגדי, כאשר הישרים מאונכים).

$$y - 6 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y - 6 = \frac{1}{2}x - 2$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 4}$$

תשובה: משוואת הצלע AD היא $y = \frac{1}{2}x + 4$.

(2) נמצא את משוואת הצלע AB.

$m_{AB} = m_{DC} = -2$ (לישרים מקבילים שיפועים שווים)

A(0, 4) (הצלע $AD \equiv y = \frac{1}{2}x + 4$ חותכת את ציר ה-y, בנקודה זו)

ולכן משוואת הצלע AB היא $y = -2x + 4$.

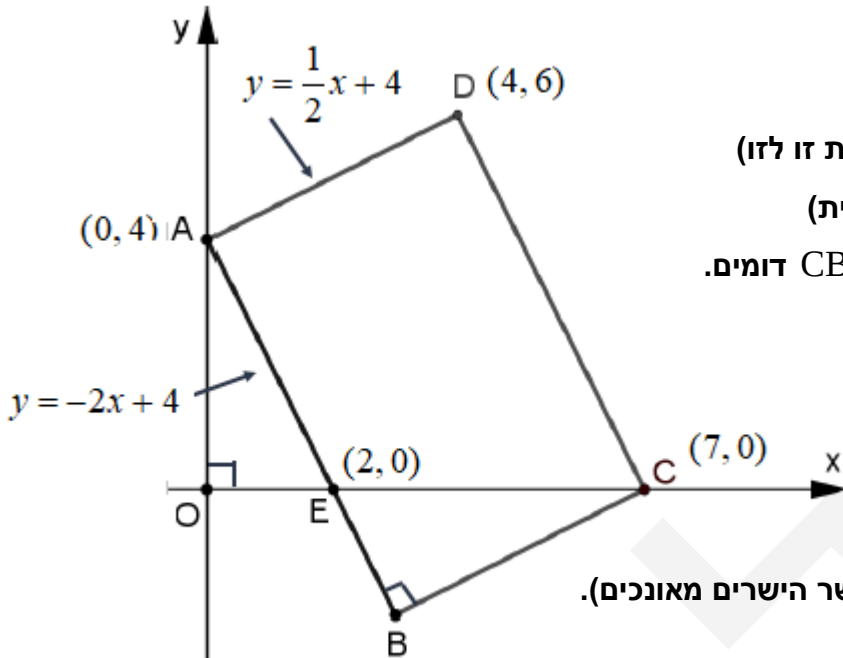
תשובה: משוואת הצלע AB היא $y = -2x + 4$.

(3) נחשב את שיעורי הנקודה E, הנמצאת על ציר ה-x ולכן $y_E = 0$.

$$0 = -2x + 4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2 \rightarrow \boxed{E(2, 0)}$$



תשובה: E(2, 0).

ג. (1) נחשב את יחס הדמיון בין המשולשים AOE ו- CBE.

$$\frac{AO}{CB} = \frac{AE}{CE} = \frac{OE}{BE} \quad (\text{יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים}).$$

$$AE = \sqrt{(4-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \rightarrow AE = 2\sqrt{5}$$

$$CE = x_C - x_E = 7 - 2 = 5 \rightarrow CE = 5$$

$$\frac{AE}{CE} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{וזה יחס הדמיון.}$$

תשובה: יחס הדמיון, בין המשולשים AOE ו- CBE, הוא $2\sqrt{5} : 5$.

(2) יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון.

$$\frac{S_{\Delta CBE}}{S_{\Delta AOE}} = \left(\frac{5}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{5}{4} = 1.25$$

תשובה: שטח המשולש CBE גדול פי 1.25 משטח המשולש AOE.

ד. נחשב את $\angle ECB$.

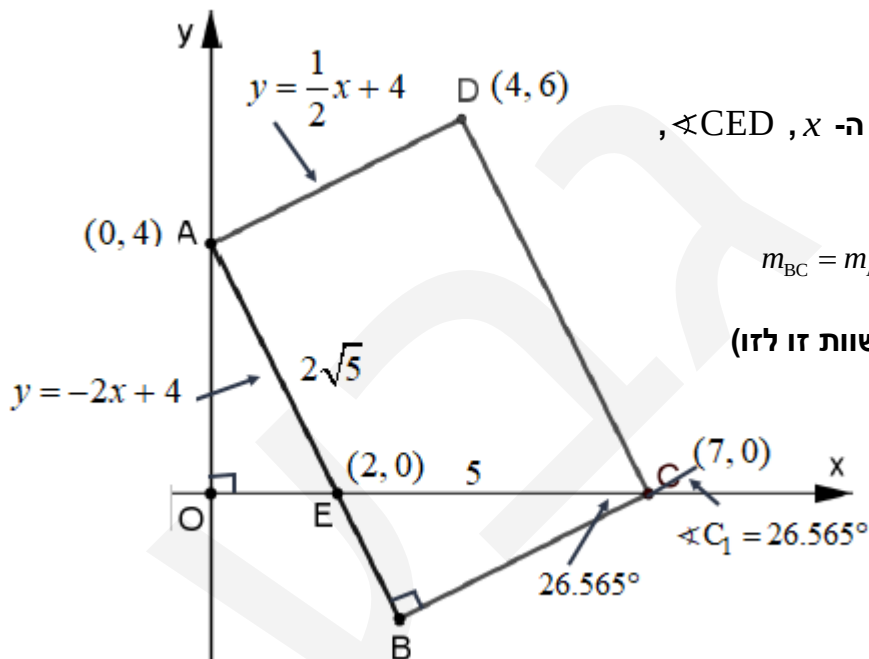
הזווית שבין הישר BC לכיוון החיובי של ציר ה- x, $\angle CED$,

נתונה ע"י הנוסחה: $m = \tan \alpha$.

$$m_{BC} = m_{AD} = \frac{1}{2} \rightarrow \tan \angle C_1 = \frac{1}{2} \rightarrow \angle C_1 = 26.565^\circ$$

(זוויות קודקודיות שוות זו לזו) $\angle ECB = \angle C_1 = 26.565^\circ$

תשובה: גודל הזווית ECB הוא 26.565° .



א. נוכיח כי $CA = CB$.

CD עובר דרך הנקודה M, מרכז המעל החוסם את $\triangle ABC$.

$$CD \perp AB$$

$AD = DB$ (ישר שעובר דרך מרכז המעגל ומאונך למיתר – חוצה אותו)

$CA = CB$ (כל נקודה הנמצאת על אנך אמצעי למיתר, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע)

נימוק חלופי: אם הגובה מתלכד עם התיכון, אז המשולש שווה שוקיים.

תשובה: הוכחנו כי $CA = CB$.

ב. נתון המעגל $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$, שמרכזו M(4, -2) ורדיוסו 5.

משוואת הצלע AB היא $y = -6$, לכן $y_A = y_B = -6$.

נציב $y = -6$ במשוואת המעגל.

$$(x-4)^2 + (-6+2)^2 = 25$$

$$(x-4)^2 = 9$$

$$x-4=3 \rightarrow x=7 \rightarrow \boxed{B(7, -6)}$$

$$x-4=-3 \rightarrow x=1 \rightarrow \boxed{A(1, -6)}$$

תשובה: $B(7, -6)$, $A(1, -6)$.

ג. נעבור קצת לטריגו.

(1) נחשב את $\sphericalangle ACB$.

$$AB = x_B - x_A = 7 - 1 = 6 \rightarrow AB = 6$$

$\triangle ABC$ על פי משפט הסינוסים

$$\frac{AB}{\sin \sphericalangle ACB} = 2R$$

$$\frac{6}{2 \cdot 5} = \sin \sphericalangle ACB$$

$$\boxed{\sphericalangle ACB = 36.87^\circ} \leftarrow \sphericalangle ACB < 90^\circ$$

האפשרות של זווית קהה נפסלה,

כי מרכז המעגל החוסם נמצא בתוך המשולש.

תשובה: $\sphericalangle ACB = 36.87^\circ$.

(2) נחשב את זוויות $\triangle ACM$.

הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים, הוא גם חוצה זווית הראש.

$$\angle MCA = \frac{36.87^\circ}{2} = 18.435^\circ$$

$\triangle ACM$ שווה שוקיים ($MC = MA = R = 5$).

$$\angle MAC = \angle MCA = 18.435^\circ \quad (\text{זוויות בסיס שוות})$$

$$\angle CMA = 143.13^\circ \quad (\text{סכום זוויות } 180^\circ \text{ במשולש})$$

תשובה: $\angle CMA = 143.13^\circ$, $\angle MAC = \angle MCA = 18.435^\circ$

ד. (1) נחשב את אורכי הקטעים CM ו- DM .

$$MC = MA = R = 5$$

$$AD = DB = \frac{6}{2} = 3$$

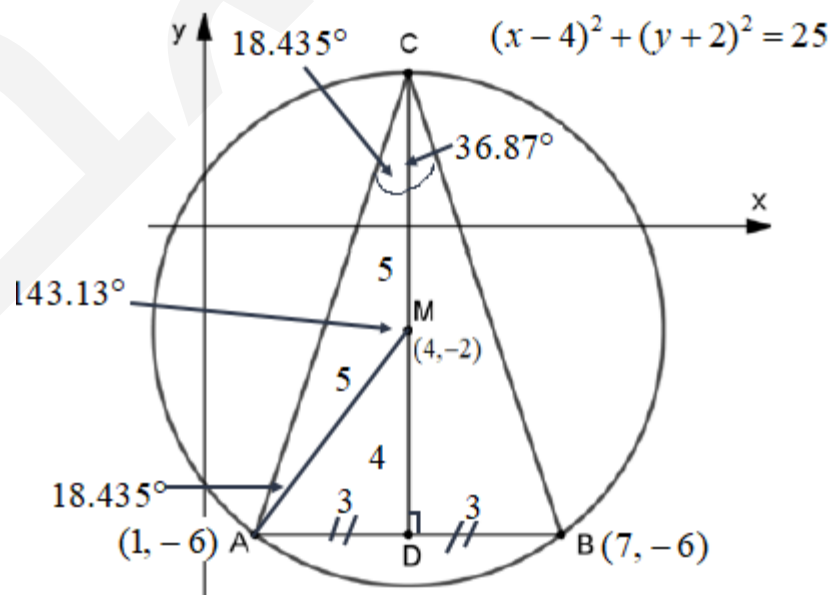
$$DM = 4 \quad (\text{משפט פיתגורס } \triangle AMD)$$

תשובה: $DM = 4$, $CM = 5$

(2) נחשב את היחס בין שטחי המשולשים ADM ו- ACM .

$$\frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle ADM}} = \frac{CM \cdot AD \cdot 0.5}{DM \cdot AD \cdot 0.5} = \frac{CM}{DM} = \frac{5}{4}$$

תשובה: היחס בין שטחי המשולשים ADM ו- ACM הוא $5:4$.



א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{12}{x} + 3x$.

(1) בתחום ההגדרה, המכנה שונה מאפס: $x \neq 0$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x \neq 0$.

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגן.

$$f'(x) = \frac{-12}{x^2} + 3$$

$$f'(x) = \frac{-12 + 3x^2}{x^2}$$

$$-12 + 3x^2 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \rightarrow (2, 12)$$

$$x = -2 \rightarrow (-2, -12)$$

	-2		0		2		x
+		-		-		+	f'(x)
↗	Max	↘		↗	Min	↘	מסקנה

תשובה: (2, 12) מינימום, (-2, -12) מקסימום.

(3) בתחום $x > 0$ הערך המינימלי הוא 12, ולכן אין חיתוך עם ציר ה- x בתחום זה.

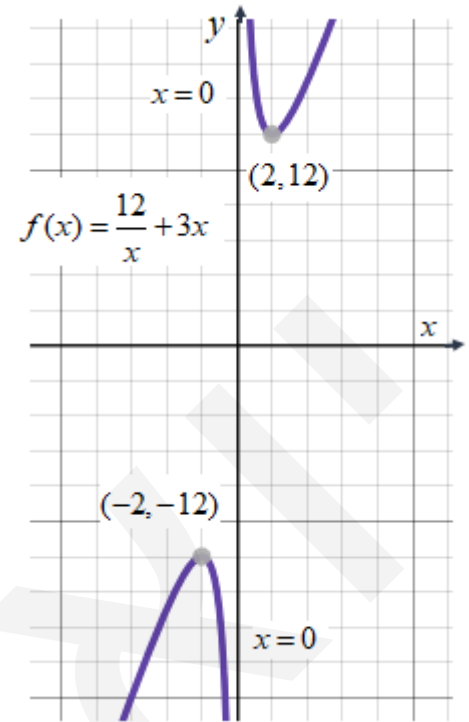
תחום ההגדרה הוא $x \neq 0$, ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

בתחום $x < 0$ הערך המקסימלי הוא (-12), ולכן אין חיתוך עם ציר ה- x בתחום זה.

תשובה: הסברנו מדוע אין לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודות חיתוך עם הצירים.

ג. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נשים לב ש- $x=0$ אסימפטוטה אנכית.



תשובה: השרטוט מעל.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + c$ (c הוא פרמטר), שהיא הזזה אנכית $+c$ יחידות של $f(x)$.

נתון שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x ,

כלומר בנקודת ההשקה מתקיים $g(x) = 0$ וגם $g'(x) = 0$.

$g'(x) = f'(x)$ ולכן הנגזרת מתאפסת עבור $x = \pm 2$, וההזזה היא 12 יחידות מטה או מעלה,

כך שנקודות הקיצון תהיינה על ציר ה- x .

תשובה: $c = 12$ או $c = -12$.

ג. עבור $c = -12$ ההזה של $f(x)$ היא 12 יחידות מטה,

$$g(x) = f(x) - 12$$

(1) תשובה: הסקיצה משמאל.

(2) נקודת ההשקה היא: $(1, 3) \rightarrow g(1) = f(1) - 12 = 15 - 12 = 3$

$$g'(1) = f'(1) = \frac{-12}{1^2} + 3 = -9 \rightarrow m = -9$$

השיפוע הוא:

$$y - 3 = -9(x - 1) \rightarrow y = -9x + 12$$

משוואת המשיק היא:

$$y = -9x + 12$$

תשובה: משוואת המשיק היא

(3) נקודת החיתוך עם ציר ה- y היא: $(0, 12)$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y = 0$:

$$0 = -9x + 12$$

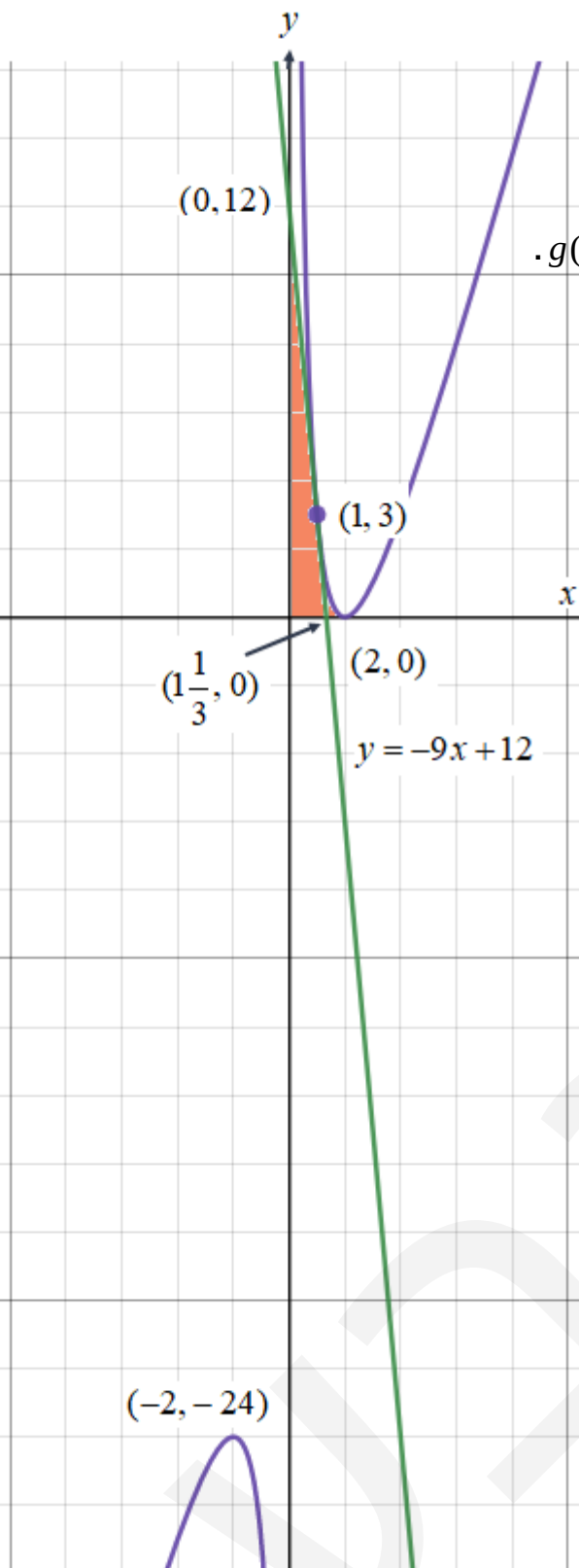
$$9x = 12$$

$$x = 1\frac{1}{3} \rightarrow (1\frac{1}{3}, 0)$$

$$S = \frac{12 \cdot 1\frac{1}{3}}{2} = 8$$

השטח הוא:

תשובה: גודל השטח שיוצר המשיק עם הצירים הוא 8 יח"ר.



א. נזהה את הפונקציות על ידי הצבת $x=1$, כאשר ידוע שעבור $x=1$ - גרף I מעל גרף II.

עבור $f(x) = (2-x)^2$ נקבל $(1, 1)$, ועבור $g(x) = (2+x)^2$ נקבל $(1, 9)$.

לכן $g(1) > f(1)$,

והגרף העליון ברביע הראשון מתאים ל- $g(x)$.

תשובה: גרף I מתאים ל- $g(x) = (2+x)^2$,

וגרף II מתאים ל- $f(x) = (2-x)^2$.

ב. נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין הגרפים.

$$(2-x)^2 = (2+x)^2$$

$$2-x = 2+x \rightarrow x=0 \rightarrow (0, 4)$$

$$2-x = -(2+x) \rightarrow 2-x = -2-x \rightarrow \text{no solution}$$

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך, בין הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ הם $(0, 4)$.

ג. נחלק את השטח לשני חלקים.

$$S_2 = \int_{-1}^0 [(2-x)^2 - (2+x)^2] dx$$

$$S_2 = \left[\frac{(2-x)^3}{(-1) \cdot 3} - \frac{(2+x)^3}{1 \cdot 3} \right]_{-1}^0$$

$$S_2 = -\frac{(2-x)^3}{3} - \frac{(2+x)^3}{3} \Big|_{-1}^0$$

$$x=0: -5\frac{1}{3}$$

$$x=-1: -9\frac{1}{3}$$

$$S_2 = -5\frac{1}{3} - (-9\frac{1}{3})$$

$$\boxed{S_2 = 4}$$

$$S_1 = \int_0^1 [(2+x)^2 - (2-x)^2] dx$$

$$S_1 = \left[\frac{(2+x)^3}{1 \cdot 3} - \frac{(2-x)^3}{(-1) \cdot 3} \right]_0^1$$

$$S_1 = \frac{(2+x)^3}{3} + \frac{(2-x)^3}{3} \Big|_0^1$$

$$x=1: 9\frac{1}{3}$$

$$x=0: 5\frac{1}{3}$$

$$S_1 = 9\frac{1}{3} - 5\frac{1}{3}$$

$$\boxed{S_1 = 4}$$

$$S = S_1 + S_2 = 4 + 4$$

$$\boxed{S = 8}$$

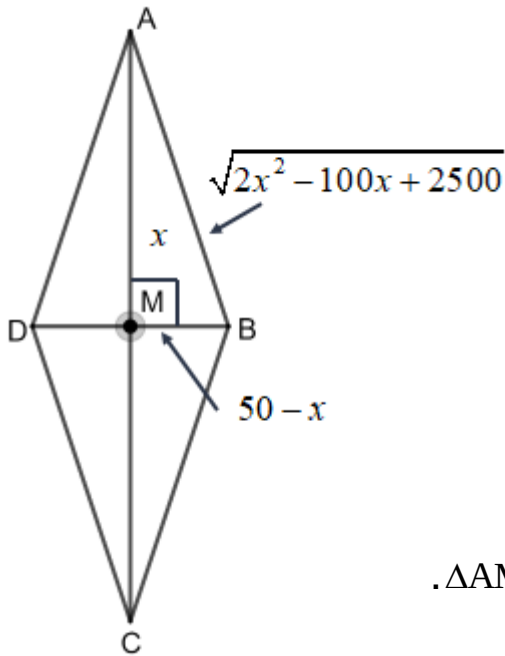
תשובה: השטח הכולל הוא 8 יח"ר.

ה. נשים לב ש- $S_1 = S_2$, כאשר בשטח שמימין לציר ה- y מתקיים $f(x) < g(x)$,

ובשטח שמאל לציר ה- y מתקיים $f(x) > g(x)$ - ולכן הטענה $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = 0$ נכונה.

$$\int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = -4 + 4 = 0$$

תשובה: הטענה נכונה.



א. העפיפון בנוי בצורת מעוין.

במעוין האלכסונים חוצים זה את זה.

. $AM = x$ ולכן , $AC = 2x$

. $AM + MB = 50$ ולכן , $AC + BD = 100$

$$x + MB = 50 \rightarrow \boxed{MB = 50 - x}$$

תשובה: אורך הקטע MB הוא $50 - x$.

ב. אורך כל קטע צ"ל חיובי.

תשובה: תחום הערכים הוא $0 < x < 50$.

ג. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.

נביע את אורך צלע המעוין בעזרת x , במשפט פיתגורס ב- $\triangle AMB$.

$$(AB)^2 = (AM)^2 + (MB)^2$$

$$(AB)^2 = x^2 + (50 - x)^2$$

$$(AB)^2 = x^2 + 2500 - 100x + x^2$$

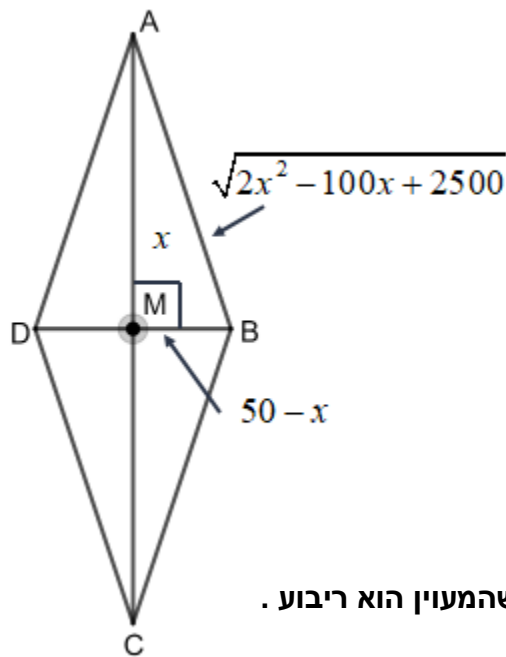
$$(AB)^2 = 2x^2 - 100x + 2500$$

$$\boxed{AB = \sqrt{2x^2 - 100x + 2500}}$$

תשובה: אורך צלע המעוין הוא $\sqrt{2x^2 - 100x + 2500}$.

ב. יש למצוא מ'י'א'ס להיקף המעוין. תחום ההגדרה הוא $0 < x < 50$.

במעוין כל הצלעות שוות.



$$P_{ABCD} = 4\sqrt{2x^2 - 100x + 2500}$$

$$P'(x) = \frac{4(4x - 100)}{2\sqrt{2x^2 - 100x + 2500}}$$

$$P'(x) = \frac{2(4x - 100)}{\sqrt{2x^2 - 100x + 2500}}$$

$$4x - 100 = 0$$

$$4x = 100$$

$$x = 25 \leftarrow o.k. \quad \leftarrow 0 < x < 50$$

$$\left. \begin{array}{l} P'(24) < 0 \\ P'(26) > 0 \end{array} \right\} x = 25, \min$$

עבור $x = 25$ נקבל שאורכי שני האלכסונים הם 50 ס"מ, כך שהמעוין הוא ריבוע.

תשובה: אורכי האלכסונים AM ו-BD הם 50 ס"מ, עבורם היקף המעוין הוא מינימלי.