

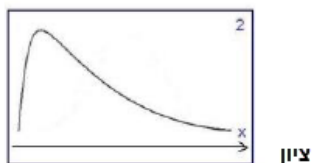


מבחן לדוגמה 5, שאלון 35471 מועד קיץ תש"פ

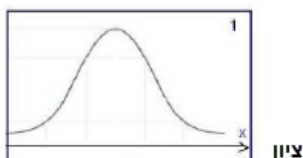
מורים יקרים,
להלן פתרון בחינת בגרות לדוגמה מהתוכנית החדשה.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

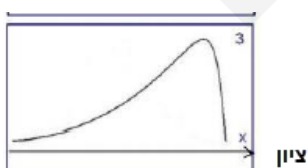
א. במבחן המסכם של קורס א, רוב הציונים במבחן היו נמוכים ומעט ציונים היו גבוהים.



ניתן לראות בגרף 2, שעיקר הציונים נמצאים בחלק השמאלי של העקומה, שם החלק שמתחת לגרף גדול יותר, בעוד שמיעוט מהציונים נמצאים בחלק הימני של העקומה. במבחן המסכם של קורס ב התפלגות הנתונים הייתה נורמלית.



ניתן לראות בגרף 1 את עקומת ההתפלגות הנורמלית, בה רוב הציונים מרוכזים במרכז ומיעוטם בקצוות. עקומה זו סימטרית ביחס לממוצע (שהוא גם החציון וגם השכיח). תשובה: גרף 2 מתאים להתפלגות הציונים של ציוני המבחן המסכם של קורס א, וגרף 1 לקורס ב. ב. (1) רוב הציונים גבוהים, מעט הציונים נמוכים.



ניתן לראות שבחלק הימני, שמתאר את הציונים הגבוהים - העקומה גבוהה יותר והשטח מתחתיה גדול יותר, ומצד שמאל בציונים הנמוכים יש רק מעט נתונים. תשובה: גרף 3 מתאים להיגד " רוב הציונים גבוהים, מעט הציונים נמוכים". (2) הרבה ציונים גבוהים, הרבה ציונים נמוכים, מעט ציוני ביניים.



ניתן לראות שהן מימין (בציונים הגבוהים) והן בשמאל (בציונים הנמוכים) יש יותר נתונים. בעוד, שמרכז, בציונים הבינוניים יש פחות נתונים.

תשובה: גרף 4 מתאים להיגד " הרבה ציונים גבוהים, הרבה ציונים נמוכים, מעט ציוני ביניים".

ג. בקורס שבו הציונים מתפלגים נורמלית, ידוע שציון התקן המתאים ל- 78 הוא $z = 0$.

התפלגות נורמלית סימטרית סביב ציון תקן 0, 50% מהנתונים מימין ו- 50% משמאל ולכן 78 הוא החציון.

בהתפלגות נורמלית ממוצע ציוני התקן הוא 0, וציון תקן זה מתאים הן לממוצע, הן לחציון והן לשכיח.

מעל לציון זה, הציונים גדולים מהממוצע והסיכוי לקבלם קטן יותר, ומתחת לציון זה הציונים קטנים מהממוצע.

(1) תשובה: ממוצע הציונים בקורס זה הוא $\bar{x} = 78$.

(2) תשובה: החציון של הציונים בקורס זה הוא 78.

א. נבנה עץ הסתברויות מתאים לסיפור,

כאשר ההסתברות לבחירת קופסה באקראי היא $\frac{1}{2}$.

כאשר בוחרים כדור –

ההסתברות היא בהתאם למספר הכדורים בצבע המתאים, מתוך סך הכדורים בקופסה.

כיוון, שהוצאת הכדור היא ללא החזרה,

אז מספר הכדורים מהצבע שהוצא יורד באחד,

וגם מספר הכדורים הכולל יורד באחד.

$$p(\text{same colour}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} = \frac{18}{35}$$

תשובה: ההסתברות, להוצאת שני כדורים באותו צבע, היא $\frac{18}{35}$.

ב. המאורע "הוצא לכל היותר כדור אחד אדום" הוא המאורע המשלים ל"הוצאת שני כדורים אדומים".

$$\text{בהתאם, ההסתברות היא } 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \right) = 1 - \frac{97}{280} = \frac{183}{280}$$

תשובה: ההסתברות, להוצאה של לכל היותר כדור אחד אדום, היא $\frac{183}{280}$.

ג. נסמן בעץ בכחול את האפשרויות לשני כדורים באותו צבע,

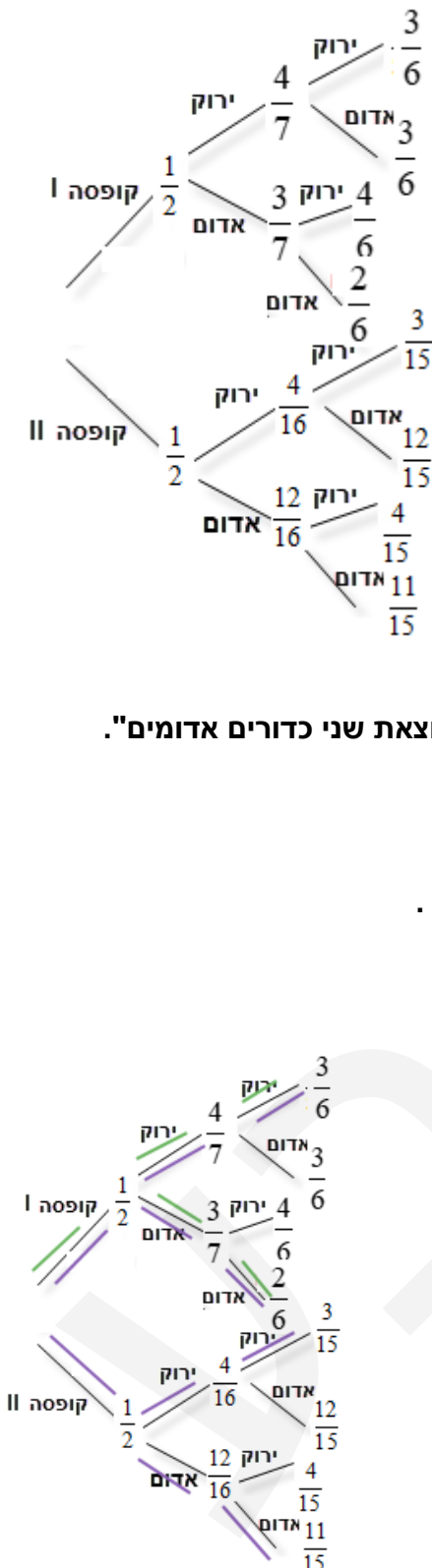
ובירוק את האפשרויות שהוצאו מקופסה I.

$$p(\text{Box I} / \text{same colour}) = \frac{P(\text{Box I} \cap \text{same colour})}{P(\text{same colour})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{18}{35}}$$

$$p(\text{Box I} / \text{same colour}) = \frac{3/14}{18/35} = \frac{5}{12}$$

תשובה: ההסתברות ששני הכדורים הוצאו מקופסה I,

אם ידוע ששניהם היו באותו צבע, היא $\frac{5}{12}$.



א. נתונה סדרה המקיימת את הכלל: $a_{n+2} = a_n + 4$.

מכאן שסדרת האיברים במקומות האי-זוגיים, או במקומות הזוגיים, היא חשבונית והפרשה 4.

ניתן לראות זאת גם מכך ש- $a_{n+2} - a_n = 4$.

נתון: $a_3 = 5$, $a_2 = 4$.

$$a_2 = a_1 + 4 \rightarrow 5 = a_1 + 4 \rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$

$$a_5 = a_1 + 4 = 5 + 4 = 9 \rightarrow 5 = a_1 + 4 \rightarrow \boxed{a_5 = 9}$$

$$a_4 = a_2 + 4 = 4 + 4 = 8 \rightarrow \boxed{a_4 = 8}$$

$$a_6 = a_4 + 4 = 8 + 4 = 12 \rightarrow \boxed{a_6 = 12}$$

תשובה: $a_6 = 12$, $a_5 = 9$, $a_4 = 8$, $a_3 = 5$, $a_2 = 4$, $a_1 = 1$.

ב. (1) הסדרה עצמה אינה חשבונית.

נראה לפי שלושת האיברים הראשונים: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$ - ולא קיים הפרש קבוע.

תשובה: הסדרה אינה חשבונית.

(2) תשובה: האיברים במקומות הזוגיים הם סידרה חשבונית (הפרש הסידרה הוא 4).

ג. נסדר את הנתונים, לצורך חישוב סכום 80 האיברים הראשונים בסדרה, בטבלה נוחה.

מקומות זוגיים	מקומות אי-זוגיים	
$a_2 = 4$	$a_1 = 1$	האיבר הראשון
$d = 4$	$d = 4$	הפרש הסדרה
$n = 40$	$n = 40$	מספר האיברים

סכום האיברים במקומות הזוגיים

$$S_{40}^{even} = \frac{40 \cdot [2 \cdot 4 + 4 \cdot (40 - 1)]}{2}$$

$$S_{40}^{odd} = 20 \cdot (2 + 8 \cdot 39)$$

$$\boxed{S_{40}^{odd} = 3280}$$

סכום האיברים במקומות האי-זוגיים

$$S_{40}^{odd} = \frac{40 \cdot [2 \cdot 1 + 4 \cdot (40 - 1)]}{2}$$

$$S_{40}^{odd} = 20 \cdot (2 + 4 \cdot 39)$$

$$\boxed{S_{40}^{odd} = 3160}$$

הסכום המבוקש הוא: $3160 + 3280 = 6440$

תשובה: סכום 80 האיברים הראשונים בסדרה הוא 6,440.

א. נתון: $MO \perp AB$, ולכן $AM = BM$ ו- $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \angle AOB$,

כי האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה אותו וגם את הזווית המרכזית המתאימה.

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle AOM,$$

כי זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.

תשובה: הוכחנו ש- $\angle ACB = \angle AOM$

ב. נתון: $MO = 8$ ס"מ, $\angle ACB = 72^\circ$ ולכן גם $\angle AOM = 72^\circ$.

$\triangle AOM$

$$\cos 72^\circ = \frac{MO}{AO}$$

$$AO = \frac{8}{\cos 72^\circ}$$

$$\boxed{AO = 25.89 \text{ cm}}$$

תשובה: אורך הרדיוס של המעגל הוא 25.89 ס"מ.

ג. נחשב את האורך של הצלע AB באמצעות משפט הסינוסים.

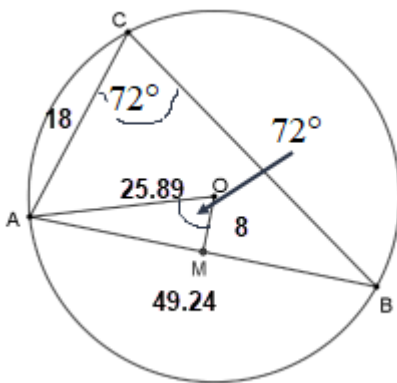
$\triangle ABC$

$$\frac{AB}{\sin 72^\circ} = 2R$$

$$AB = 2 \cdot 25.89 \cdot \sin 72^\circ$$

$$\boxed{AB = 49.24 \text{ cm}}$$

תשובה: אורך הצלע AB הוא 49.24 ס"מ.



ד. נתון: $AC = 18$ ס"מ.

נחשב תחילה את $\angle B$ באמצעות משפט הסינוסים.

$$\triangle ABC$$

$$\frac{AC}{\sin \angle B} = 2R$$

$$\frac{18}{2 \cdot 25.89} = \sin \angle B$$

$$\angle B = 20.34^\circ \rightarrow \angle CAB = 87.66^\circ$$

האפשרות השנייה לגודלה של $\angle B$ נפסלה, בשל סכום זוויות 180° במשולש.

תשובה: $\angle CAB = 87.66^\circ$.

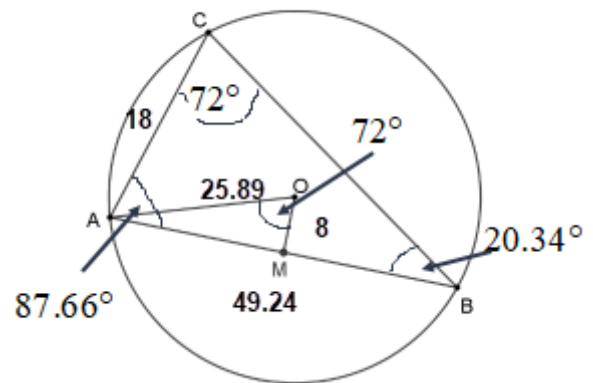
ה. נחשב את שטח $\triangle ABC$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin \angle CAB}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{18 \cdot 49.24 \cdot \sin 87.66^\circ}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = 442.79 \text{ cm}^2$$

תשובה: $S_{\triangle ABC} = 442.79$ סמ"ר.



א. נמצא את משוואת הישר AB.

$$m_{AB} = \frac{14-2}{18-0} = \frac{2}{3}$$

נקודת החיתוך עם ציר ה- y היא $(0, 2)$, ולכן $b = 2$.

תשובה: משוואת הצלע AB היא $y = \frac{2}{3}x + 2$.

ב. ODMC הוא מלבן, כי יש לו שלוש זוויות ישרות (בראשית הצירים ובנקודות ההשקה).

ODMC הוא ריבוע, כי זהו מלבן עם שתי צלעות סמוכות שוות (הרדיוסים).

תשובה: הוכחנו ש- ODMC ריבוע.

ג. $M(a, a)$, ברביע הראשון, כי היא מרכזו של מעגל שמשיק לצירים ולכן שיעוריה שווים.

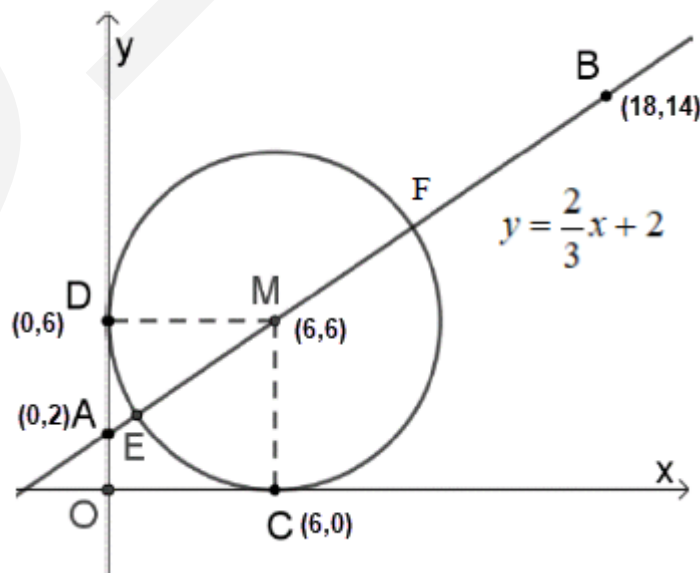
$$a = \frac{2}{3}a + 2 \rightarrow \frac{1}{3}a = 2 \rightarrow a = 6 \rightarrow \boxed{M(6,6)}$$

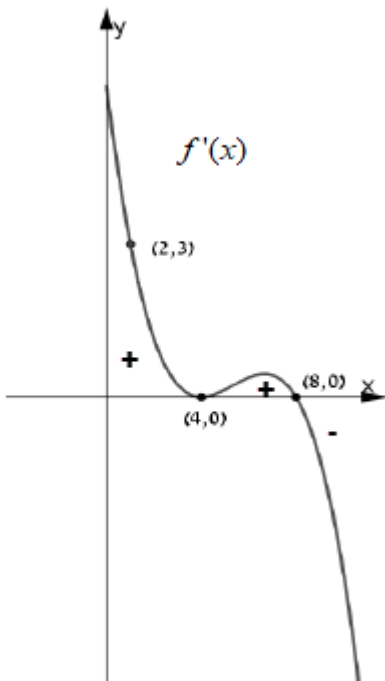
תשובה: $M(6,6)$.

ד. נחשב את שטח הטרפז AOCM ($AO \parallel MC$).

$$S_{AOCM} = \frac{(OA + CM) \cdot OC}{2} = \frac{(2 + 6) \cdot 6}{2} = 24$$

תשובה: שטח המרובע AOCM הוא 24.





א. הגרף המצורף מתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ של $f(x)$, בתחום $0 \leq x \leq 9$.

שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ הוא אפס, כאשר ערך הנגזרת הוא אפס.

על פי הגרף מתקיים: $f'(4) = 0$ ו- $f'(8) = 0$.

תשובה: ערך הנגזרת הוא אפס עבור $x = 4$, $x = 8$.

ב. הנגזרת מחליפה סימן רק כאשר $x = 8$, ועוברת מחיוביות לשליליות,

לכן $f(x)$ עוברת מעלייה לירידה.

מכאן שלפונקציה $f(x)$ יש רק נקודת קיצון אחת שבה $x = 8$, מסוג מקסימום.

למעשה, כיוון שזו נקודת הקיצון היחידה, הרי זה גם מקסימום מוחלט.

ניתן, ממש לא חובה, לבנות טבלת עלייה-ירידה.

x		4		8	
$f'(x)$	+	0	+	0	-
מסקנה	↗	פיתול	↗	Max	↘

תשובה: לפונקציה $f(x)$ יש רק נקודת קיצון אחת, מסוג מקסימום.

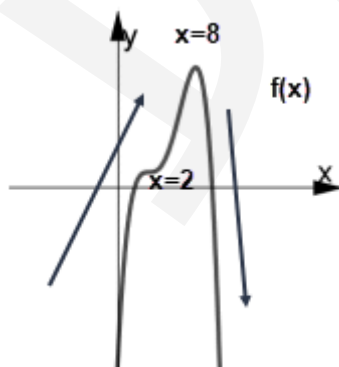
ג. הנקודה $(2, 0)$ נמצאת על הגרף של $f(x)$.

(1) על פי גרף הנגזרת $f'(x)$ מתקיים: $f'(2) = 3$, לכן שיפוע המשיק הוא 3.

תשובה: שיפוע המשיק, בנקודה $(2, 0)$ שעל הגרף של $f(x)$, הוא 3.

(2) על פי הגרף אין נקודה אחרת, שבה $f'(x) = 3$.

תשובה: לא קיימת נקודה נוספת, על הגרף של $f(x)$, שבה שיפוע המשיק הוא כמו בסעיף ג(1).



גרף ד

ד. גרף ד הוא הגרף המתאים, לפי הנימוקים הבאים.

• עלייה עבור $x < 8$.

• ירידה עבור $x > 8$.

• מקסימום כאשר $x = 8$.

• פיתול בעלייה עבור $x = 2$, כאשר שיפוע המשיק שם הוא אפס.

תשובה: גרף ד מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+1}{x^2} + b$ (פרמטר b).

$y = 1$ היא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה, כלומר כאשר $x \rightarrow \infty$ אז $f(x) \rightarrow 1$.

המחובר השמאלי שואף ל-0 כי חזקת המכנה (2) גדולה מחזקת המונה (1),

לכן $f(x) \rightarrow 0 + b = 1$ ו- $b = 1$.

תשובה: $b = 1$.

ב. נציב $b = 1$ והפונקציה היא $f(x) = \frac{x+1}{x^2} + 1$.

(1) $x = 0$ מאפס את המכנה, לכן $x \neq 0$ הוא תחום ההגדרה ($x = 0$ אסימפטוטה אנכית).

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq 0$.

(2) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגה..

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x+1)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{x^4}$$

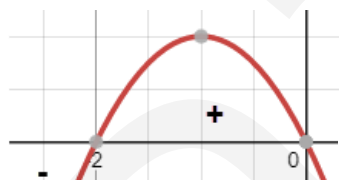
$$0 = -x^2 - 2x$$

$$\cancel{x \neq 0} \leftarrow x \neq 0$$

$$x = -2 \rightarrow (-2, 0.75)$$

טבלת עלייה/ירידה, כאשר סימני הנגזרת על פי המונה.

x		-2		0	
-----	--	----	--	---	--



$f'(x)$	-	0	+		-
מסקנה	↘	מינימום	↗		↘

תשובה: $(-2, 0.75)$, מינימום.

(3) הסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = 2f(x)$,

שמוגדרת באותו תחום הגדרה של $f(x)$,

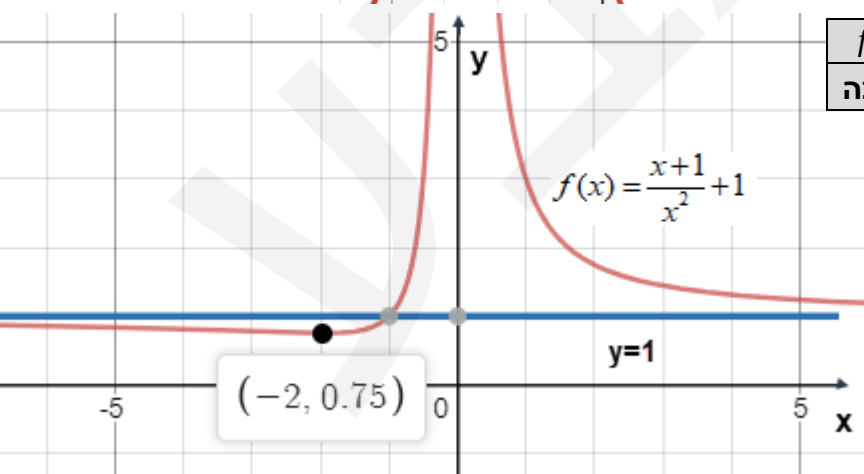
רק שערכי ה- y מוכפלים פי 2.

מכאן שתחומי העלייה והירידה,

שיעורי ה- x של נקודות הקיצון וסוגן לא משתנים. האסימפטוטה האופקית משתנה ל- $y = 2$.

$$g(-2) = 2f(-2) = 2 \cdot 0.75 = 1.5 \rightarrow (-2, 1.5) \min$$

תשובה: $(-2, 1.5)$ מינימום.



א. נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ו- $g(x) = \frac{2}{x^3}$.

נמצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים, בתחום בו $x > 0$.

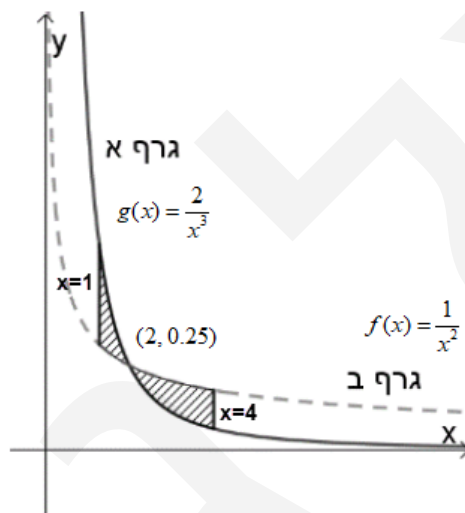
$$\frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^3} \quad / \cdot x^3$$

$$x = 2 \rightarrow \boxed{(2, 0.25)}$$

תשובה: נקודת החיתוך של שני הגרפים היא $(2, 0.25)$.

ב. $f(4) = 0.0625$, $g(4) = 0.03125$ ולכן $g(4) < f(4)$, וזאת מימין לנקודת החיתוך בין שני הגרפים.

תשובה: גרף ב מתאים ל- $f(x) = \frac{1}{x^2}$, גרף א מתאים ל- $g(x) = \frac{2}{x^3}$.



ג. נחשב את השטח המבוקש, כחיבור של השטח הימני והשטח השמאלי.

$$S_L = \int_1^2 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$S_L = \int_1^2 (2x^{-3} - x^{-2}) dx$$

$$S_L = \left[\frac{2x^{-2}}{-2} - \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2$$

$$S_L = \left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right]_1^2$$

$$\left. \begin{array}{l} x=2: \frac{1}{4} \\ x=1: 0 \end{array} \right\} S_L = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$S_R = \int_2^4 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) dx$$

$$S_R = \int_2^4 (x^{-2} - 2x^{-3}) dx$$

$$S_R = \left[\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{2x^{-2}}{-2} \right]_2^4$$

$$S_R = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right]_2^4$$

$$\left. \begin{array}{l} x=4: -\frac{3}{16} \\ x=2: -\frac{1}{4} \end{array} \right\} S_R = -\frac{3}{16} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

ומכאן, שגודל השטח המפוצל הוא $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.

תשובה: השטח המבוקש הוא $\frac{5}{16}$.