יואל גבע
לא מתפשרים.

מבחן לדוגמה 4, שאלון 35471
מועד קיץ תש"פ

מורים יקרים,
להלן פתרון בחינת בגרות לדוגמה מהתוכנית החדשה.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. מדובר בסדרות חשבוניות של תשלומים, עבור המחשב המוצע.

התשלום כולו גדול ב- $3{,}750$ **₪ מסכום ששת התשלומים האחרונים, לכן:** $S_{12} = S_{last\,6} + 3750$ **.**

התשלום האחרון קטן מהתשלום הראשון ב- 330 **₪ , לכן:** $a_{12} + 330 = a_1$ **.**

$$a_{12} + 330 = a_1$$
$$a_1 + 11d + 330 = a_1$$
$$11d = -330$$
$$\boxed{d = -30}$$

תשובה: הפרש הסדרה החשבונית הוא (-30) **.**

ב. נרכז את הנתונים בטבלה מתאימה.

	התשלום כולו	ששת התשלומים האחרונים
A_1	a_1	$a_7 = a_1 + 6d = a_1 + 6\cdot(-30) = a_1 - 180$
D	$d = -30$	$d = -30$
N	12	6

$$S_{12} = S_{last\,6} + 3750$$
$$\frac{12(2a_1 - 30\cdot 11)}{2} = \frac{6\left[2\cdot(a_1 - 180) - 30\cdot 5\right]}{2} + 3750$$
$$6(2a_1 - 330) = 3(2a_1 - 510) + 3750$$
$$12a_1 - 1980 = 6a_1 - 1530 + 3750$$
$$6a_1 = 4200 \quad /:6$$
$$\boxed{a_1 = 700}$$
$$S_{12} = \frac{12(2\cdot 700 - 30\cdot 11)}{2}$$
$$\boxed{S_{12} = 6420}$$

תשובה: מחיר המחשב הוא $6{,}420$ **₪.**

ג. משפחה החליטה לרכוש את אותו מחשב, שמחירו הוא $6{,}420$ **₪.**

אולם ב- 6 **תשלומים, עם אותו הפרש** (-30) **.**

$$6420 = \frac{6(2\cdot a_1 - 30\cdot 5)}{2} \quad /:3$$
$$2140 = 2a_1 - 150$$
$$\boxed{a_1 = 1145}$$

תשובה: הסכום הראשון לתשלום הוא $1{,}145$ **₪.**

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- בנים** $\bar{A}$ **- בנות**

B **- עוסקים בספורט** $\bar{B}$ **- לא עוסקים בספורט**

<u>נתונים ומשמעויות מידיות</u>

על-מנת למלא טבלה של 2*2 נדרשות שלוש משוואות,

אולם לעיתים ניתן לענות על השאלה, לפני השלמת הטבלה.

(1) $N(\bar{A}\cap\bar{B}) = 4N(A\cap\bar{B}) \quad \rightarrow P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 4P(A\cap\bar{B})$

(2) $N(\bar{A}\cap\bar{B}) = N(A\cap B) \quad \rightarrow P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(A\cap B)$

(1) נסמן $P(A\cap\bar{B}) = x$ **- ההסתברות לבחור בן שלא עוסק בספורט (ונרשום בטבלה, מאוד עוזר)**

תשובה: $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 4x$ **- ההסתברות לבחור בת שלא עוסקת בספורט.**

(2) $P(\bar{B}) = P(A\cap\bar{B}) + P(\bar{A}\cap\bar{B}) = x + 4x = 5x$ **- ההסתברות לבחור בן שלא עוסק בספורט**

תשובה: $P(\bar{B}) = 5x$ **- ההסתברות לבחור תלמיד/ה שלא עוסק/עוסקת בספורט.**

	A **בנים**	$\bar{A}$ **בנות**	
B **עוסקים בספורט**	$4x =$		
$\bar{B}$ **לא עוסקים בספורט**	$x =$	$4x =$	$5x =$
			1

ב. ידוע כי 60% **מהמשתתפים בסקר היו בנות, כלומר** $P(\bar{A})=0.6 \quad \rightarrow P(A)=0.4$

$$4x+x=0.4$$
$$5x=0.4$$
$$x=0.08$$

נשלים את הטבלה

	בנים A	**בנות** $\bar{A}$	
עוסקים בספורט B	$4x=0.32$	0.28	0.6
לא עוסקים בספורט $\bar{B}$	$x=0.08$	$4x=0.32$	$5x=0.4$
	0.4	0.6	1

תשובה: ההסתברות, לבחור באקראי בן שלא עוסק בספורט, היא $P(A\cap\bar{B})=0.08$.

ג. ההסתברות, לבחור באקראי בת שעוסקת בספורט, היא $P(\bar{A}\cap B)=0.28$.

ד. נחשב את ההסתברות לבחור, מבין הבנות בלבד, בת שלא עוסקת בספורט.

$$P(\bar{B}/\bar{A})=\frac{P(\bar{B}\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{0.32}{0.6}=\frac{8}{15}$$

תשובה: ההסתברות, היא $\frac{8}{15}$.

א. ציון המעבר, במבחן הכניסה לאוניברסיטה, הוא 75 .

במבחן הראשון, הממוצע היה $\overline{x}=70$ **וסטיית התקן הייתה** $s=10$.

ציון התקן הוא $z=\frac{x-\overline{x}}{s}=\frac{75-70}{10}=0.5$.

השטח החלקי משמאל לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,
מייצג את ההסתברות לקבלת ציון שמתחת לציון התקן שמצאנו.
ההסתברות, לקבל מעבר לציון זה,
היא: $p(x>75)=p(z>0.5)=1-p(z<0.5)=1-0.692=0.308$.

תשובה: ההסתברות, שנבחן שבחר באקראי עבר את המבחן הראשון, היא 0.308 .

ב. ציון המעבר, במבחן הכניסה לאוניברסיטה, הוא 75 .

במבחן השני, הממוצע היה $\overline{x}=79$ **וסטיית התקן הייתה** $s=12$.

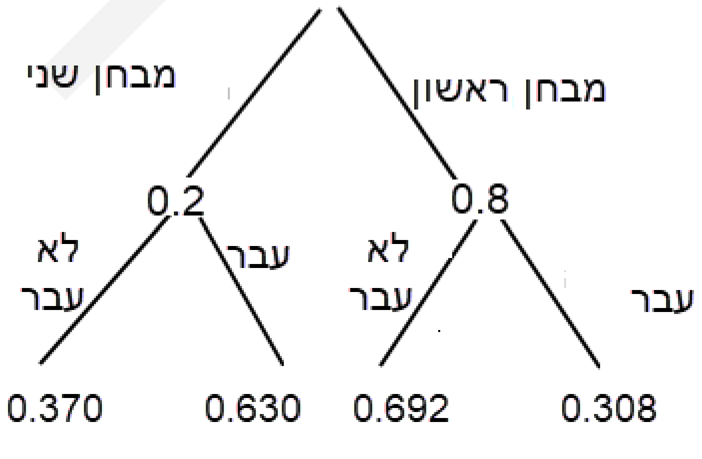
ציון התקן הוא $z=\frac{x-\overline{x}}{s}=\frac{75-79}{12}=-\frac{1}{3}\approx-0.33$.

השטח החלקי מימין לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,
מייצג את החלק היחסי (אחוז, או הסתברות) לקבלת ציון שמעל לציון התקן שמצאנו.
סך כל השטח הוא כמובן 1 **, כי ההתפלגות הנורמלית מייצגת את כלל הציונים.**
ההסתברות, לקבל מעבר לציון זה,
היא: $p(x>75)=p(z>-0.33)=1-p(z<-0.33)=1-0.370=0.630$.

תשובה: ההסתברות, שנבחן שנבחר באקראי עבר את המבחן השני, היא 0.630 .

ג. נבדוק מה ההסתברות, שנבחן שניגש לאחד המבחנים, עבר את המבחן.

נתון כי במבחן הראשון נבחנו $0.8=80\%$ **מהנבחנים, כלומר במבחן השני נבחנו** $0.2=20\%$.



ההסתברות היא: $p(pass)=0.8\cdot0.308+0.2\cdot0.630=0.3724$.

תשובה: ההסתברות, שמועמד שנבחן באחד מהמבחנים ונבחר באקראי, עבר את המבחן, היא 0.3724 .

א. AC **הוא קוטר במעגל, לכן הוא נשען על זווית היקפית ישרה.**

תשובה: $\sphericalangle CBA = 90°$.

ב. $BC \perp AB$**, לכן** $m_{BC} \cdot m_{AB} = -1$ **(שיפועים הופכיים ונגדיים).**

$$m_{AB} = \frac{4-2}{3-1} = 1 \quad \rightarrow m_{BC} = -1$$

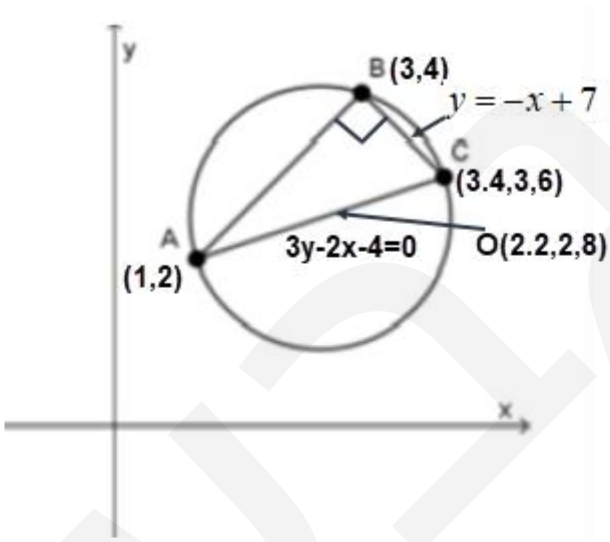
$$m_{BC} = -1, \quad B(3,4)$$

$$y - 4 = -1(x-3)$$

$$\boxed{y = -x + 7}$$

תשובה: משוואת הצלע BC **היא** $y = -x + 7$.

ג. הקודקוד C **נמצא הן על הצלע** BC **והן על הקוטר** AC**, שמשוואתו היא** $3y - 2x - 4 = 0$.



$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ 3y - 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$3(-x+7) - 2x - 4 = 0$$

$$-3x + 21 - 2x - 4 = 0$$

$$17 = 5x \quad /:5$$

$$3.4 = x$$

$$y = -3.4 + 7 = 3.6 \quad \rightarrow \boxed{C(3.4, 3.6)}$$

מרכז המעגל הוא אמצע הקוטר AC .

$$\left.\begin{aligned} x_O &= \frac{1+3.4}{2} = 2.2 \\ y_O &= \frac{2+3.6}{2} = 2.8 \end{aligned}\right\} \boxed{O(2.2, 2.8)}$$

תשובה: $O(2.2, 2.8)$.

ד. $R = \sqrt{(3.4-2.2)^2 + (3.6-2.8)^2} = \sqrt{2.08}$

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-2.2)^2 + (y-2.8)^2 = 2.08$.

ה. נחשב את שטח העיגול: $\pi R^2 = 2.08\pi$

נחשב את שטח ΔABC **:**

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}$$

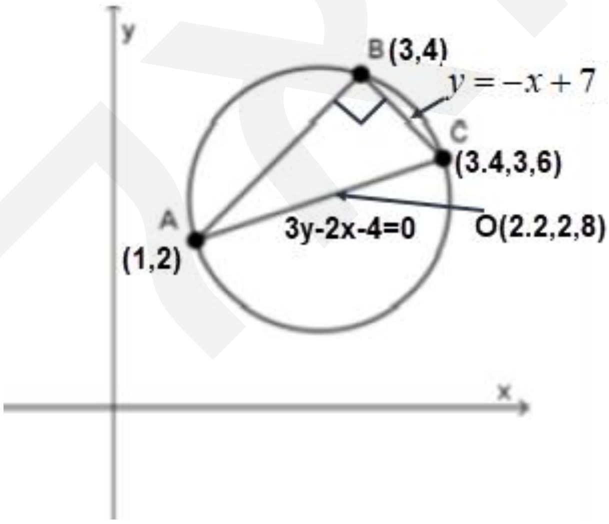
$$BC = \sqrt{(3-3.4)^2 + (4-3.6)^2} = \sqrt{0.32}$$

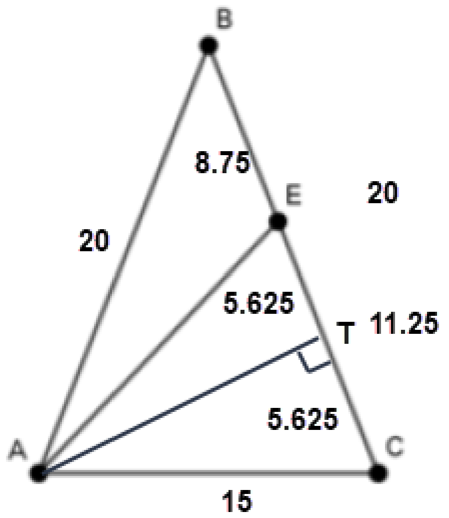
$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{0.32}}{2} = 0.8$$

נחשב את היחס המבוקש:

$$\frac{S_{circle}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2.08\pi}{0.8} = 2.6\pi \approx 8.168$$

תשובה: היחס בין שטח העיגול לבין שטח ΔABC **הוא** $2.6\pi \approx 8.168$.





<u>נתונים</u>

.1 ΔABC **שווה שוקיים** $(CB = AB)$ **.2** $AE = AC$

עבור ב: .3 $AC = 15$ **.4** $AB = 20$

צ"ל: א. $\Delta ABC \sim \Delta EAC$ **ב.** BE , EC **ג.** $\measuredangle EAC$

ד. $\frac{R_{\Delta ABC}}{R_{\Delta EAC}}$.

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	5	ΔABC **שווה-שוקיים** $(CB = AB)$	נתון
5	6	$\measuredangle BAC = \measuredangle ECA$ (ז)	זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים
2	7	$AE = AC$	נתון
7	8	$\measuredangle BCA = \measuredangle CEA$ (ז)	זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים
8 ,6	9	$\Delta ABC \sim \Delta EAC$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. א	
9	10	$\frac{AB}{EA} = \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{AC}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
5 ,3	11	$AC = AE = 15$	נתון וכלל המעבר
4	12	$AB = CB = 20$	נתון וכלל המעבר
10, 11, 12	13	$\frac{20}{15} = \frac{15}{EC} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$	הצבה וחישוב
13	14	$EC = 11.25$	חישוב
12, 14	15	$BE = 8.75$	הפרש קטעים
		מ.ש.ל. ב	
	16	$AT \perp EC$	בניית עזר
16 ,7	17	$TE = CT = 5.625$	התיכון לבסיס מתלכד עם הגובה ב- ΔEAC ש"ש
		$\sin\measuredangle TAC = \frac{TC}{AC} = \frac{5.625}{15}$ $\measuredangle TAC = 22.024°$ $\boxed{\measuredangle EAC = 44.05°}$	חוצה הזווית מתלכד עם הגובה במש"ש
		מ.ש.ל. ג	
9, 13	18	$\frac{R_{\Delta ABC}}{R_{\Delta EAC}} = \frac{4}{3}$	יחס רדיוסים חוסמים של משולשים דומים שווה ליחס הדמיון
		מ.ש.ל. ד	

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-ax^2+(a-3)x^4$ **, המוגדרת לכל** x **(** a **הוא פרמטר).**

נתון: $f'(1)=-3$

$f'(x)=3x^2-2ax+4(a-3)x^3$

$-3=3\cdot1^2-2a\cdot1+4(a-3)\cdot1 \leftarrow f'(1)=-3$

$-3=3-2a+4a-12$

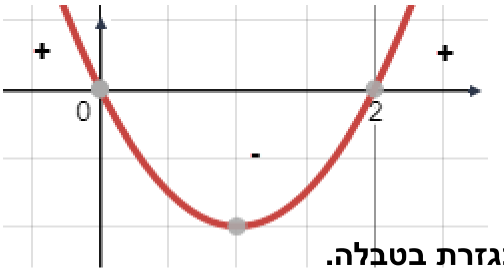
$6=2a$

$\boxed{a=3}$

תשובה: $a=3$.

ב. נציב $a=3$ **ונקבל:** $f(x)=x^3-3x^2$ **, המוגדרת לכל** x **.**

נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.



$\boxed{f'(x)=3x^2-6x}$

$0=3x(x-2)$

$x=0 \rightarrow \boxed{(0,0)} \quad x=2 \rightarrow \boxed{(2,-4)}$

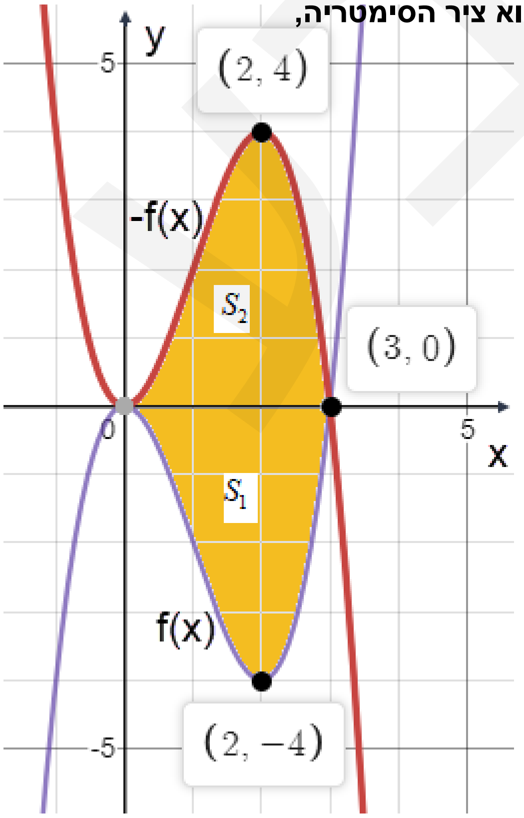
גרף הנגזרת הוא פרבולה ישרה ("צוחקת"), ובהתאם סימני הנגזרת בטבלה.

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
מסקנה	↗	Max	↘	Min	↗

תשובה: עלייה: $x>2$ **או** $x<0$ **, ירידה** $0<x<2$.

ג. תשובה: $(2,-4)$ **מינימום,** $(0,0)$ **מקסימום.**

ד. (1-2) הסקיצה המתאימה $f(x)$ **בכחול,** $-f(x)$ **באדום:**



שיקולים לגרף של $-f(x)$ **: סימטרי ל-** $f(x)$ **, כאשר ציר ה-** x **הוא ציר הסימטריה,**

תחומי עלייה וירידה מתהפכים, ונקודות הקיצון

משנות סימני ה- y **(למעט באפסים) , סוג הקיצון מתהפך,**

ושתי הפונקציות נחתכות בנקודות האפס:

$0=x^3-3x^2 \quad \rightarrow 0=x^2(x-3) \quad \rightarrow (0,0),(3,0)$.

ה. עקב הסימטריה, השטח הצבוע מתחלק לשני שטחים חופפים שווי שטח.

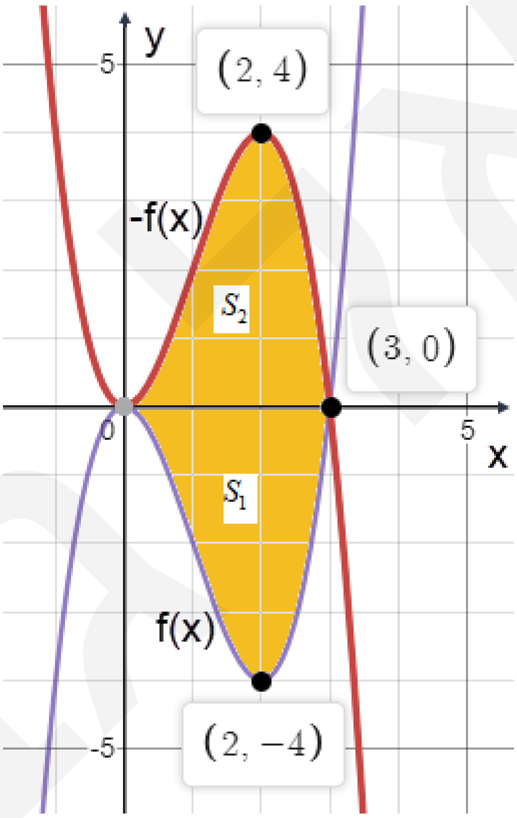
$$S_1=\int_0^3 (0-(x^3-3x^2))dx$$

$$S_1=\int_0^3 (-x^3+3x^2)\,dx$$

$$S_1=-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}\Big]_0^3$$

$$\left.\begin{matrix} x=3: & 6.75 \\ x=0: & 0 \end{matrix}\right\} \boxed{S_1=6.75} \to \boxed{S=2\cdot 6.75=13.5}$$

תשובה: גודל השטח הוא 13.5.



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x+b}$ **(** b **פרמטר).**

$f'(1)=0$ **, כי כאשר** $x=1$ **יש לפונקציה נקודת קיצון.**

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x+b)-1\cdot(x^2-4x+5)}{(x+b)^2}$$

$$0=(2\cdot1-4)(1+b)-(1^2-4\cdot1+5) \quad \leftarrow f'(1)=0$$

$$0=-2(1+b)-2$$

$$0=-2-2b-2$$

$$2b=-4$$

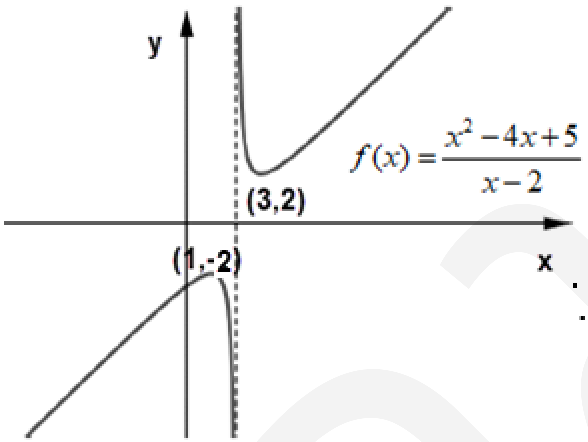
$$\boxed{b=-2}$$

תשובה: $b=-2$.

ב. נציב $b=-2$ **והפונקציה היא** $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$ **, המוגדרת בתחום** $x\neq2$ **.**

אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$ **(מספר זה מאפס מכנה ולא מונה).**

תשובה: $x=2$ **.**



ג. נתון כי נקודת הקיצון השנייה, נקודת המינימום, היא $(3,2)$ **.**

(1) $f'(x)>0$ **, בעלייה של** $f(x)$ **, עבור** $x>3$ **או** $x<1$ **.**

תשובה: $x>3$ **או** $x<1$ **.**

(2) $f(x)>0$ **עבור** $x>2$ **.**

התחום המשותף, שבו הפונקציה חיובית וגם הנגזרת חיובית הוא עבור $x>3$ **,**

שכן בו הפונקציה גם חיובית וגם עולה.

תשובה: $x>3$ **.**

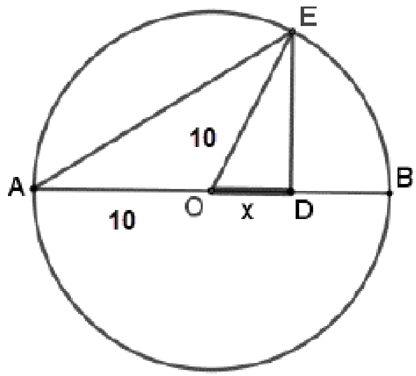
ד. נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}-2$ **, שהיא הזזה** 2 **יחידות כלפי מטה של** $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$ **.**

מכאן שתחומי העלייה והירידה, ושיעורי ה- x **של נקודות הקיצון וסוגן לא משתנים.**

$$g(1)=f(1)-2=-2-2=-4 \quad \rightarrow (1,-4)\ \text{max}$$

$$g(3)=f(3)-2=2-2=0 \quad \rightarrow (3,0)\ \text{min}$$

תשובה: $(1,-4)$ **מקסימום ,** $(3,0)$ **מינימום.**



א. נביע את אורך הניצב AD **בעזרת** x**, במשפט פיתגורס ב-** ΔODE.

$$(\text{OD})^2+(\text{ED})^2=(\text{EO})^2$$

$$(\text{ED})^2=10^2-x^2$$

$$\boxed{\text{ED}=\sqrt{100-x^2}}$$

תשובה: $\text{ED}=\sqrt{100-x^2}$.

ב. יש למצוא מקסימום לשטח ΔAED**. תחום ההגדרה הוא** $0<x<10$.

$$S_{\Delta\text{AED}}=\frac{\text{AD}\cdot\text{ED}}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta\text{ABC}}=\frac{(10+x)\cdot\sqrt{100-x^2}}{2}}$$

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\left[\sqrt{100-x^2}+(10+x)\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}\right]$$

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{100-x^2-x(10+x)}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{100-x^2-10x-x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$\boxed{S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x^2-10x+100}{\sqrt{100-x^2}}}$$

$$-2x^2-10x+100=0$$

$$x=5 \quad \cancel{x=-10} \quad \leftarrow 0<x<10$$

$$\left.\begin{array}{l}S'(4)>0\\ S'(6)<0\end{array}\right\} x=5,\max$$

תשובה: OD = 5**, עבורו שטח** ΔAED **מקסימלי.**