מבחן לדוגמה 3, שאלון 35481
מועד קיץ תש״פ

מורים יקרים,
להלן פתרון בחינת בגרות לדוגמה מהתוכנית החדשה.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. בבית הספר נמצא כי ההישגים בקפיצה למרחק וההישגים בריצת מאה מטר מתפלגים נורמלית.

ההישג הממוצע בריצת מאה מטר היה 12.6 **שניות** $=\bar{x}$ **, וסטיית התקן** 1.1 **שניות**$=s$ **.**

יוסי רץ מאה מטר ב- 11.8 **שניות (זמן קטן מהממוצע, שזה טוב בריצה כמובן, כי מראה שהוא מהיר מהרוב).**

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$

$$z=\frac{11.8-12.6}{1.1}=\frac{-0.8}{1.1}=-0.727$$

נמצא את ההסתברות המתאימה בעזרת טבלת ההתפלגות הנורמלית.

$p(x<11.8)=p(z<-0.727)=0.234$ **.**

מכאן שרק ל- 23.4% **מהתלמידים הישגים טובים יותר מאלו של יוסי,**

ול- $100\%-23.4\%=76.6\%$ **הישגים טובים פחות.**

תשובה: ל- 76.6% **, מהתלמידים בבית הספר, הישגים בריצה טובים פחות מההישג של יוסי.**

ב. ההישג הממוצע בקפיצה למרחק היה 4.6 **מטר**$=\bar{x}$ **, וסטיית התקן** 0.7 **מטר**$=s$ **.**

יוסי קפץ למרחק 4.9 **מטר (מרחק גדול מהממוצע, שמראה שהוא קופץ רחוק יותר מהרוב).**

$$z=\frac{4.9-4.6}{0.7}=\frac{0.3}{0.7}=0.429$$

כבר ניתן לדעת, שהישגו היחסי של יוסי בריצת מאה מטר טוב יותר, כי ציון התקן גבוה יותר בערכו המוחלט.

ניתן להיעזר בטבלה: $p(x<4.9)=p(z<0.429)=0.663$ **,**

ולראות כי הישגו של יוסי טוב מ- 66.3% **מהתלמידים,**

בהשוואה לריצת מאה מטר, שם הישגו טוב יותר מ- 76.6% **מהתלמידים.**

תשובה: כדאי שיוסי יתחרה בריצת מאה מטר.

א. במבחן יש שני תרגילים באלגברה, שההסתברות להצלחה בכל אחד מהם היא 0.6 .

במבחן יש תרגיל אחד בגיאומטריה, שההסתברות להצלחה בו היא 0.8 .

(1) ההסתברות לקבלת ציון עובר בכל התרגילים היא: $0.6\cdot0.6\cdot0.8=0.288$.

תשובה: ההסתברות, שנבחן יקבל ציון עובר בשלושת התרגילים במבחן, היא 0.288 **.**

(2) ישנן שלוש אפשרויות לציון עובר בשני תרגילים ונכשל בתרגיל אחד.

ההסתברות היא: $0.6\cdot0.6\cdot0.2+0.6\cdot0.4\cdot0.8+0.4\cdot0.6\cdot0.8=0.456$ **.**

תשובה: ההסתברות, שנבחן יקבל ציון עובר בשני תרגילים במבחן וציון נכשל בתרגיל אחד, היא 0.456 **.**

(3) כדי לקבל ציון עובר במבחן כולו, על הנבחן לקבל ציון עובר בשני תרגילים לפחות מתוך השלושה.

כלומר, על הנבחן לקבל ציון עובר בשני תרגילים בדיוק, או בכל שלושת התרגילים.

ההסתברות, על פי תתי סעיפים (1) ו- (2), היא: $0.288+0.456=0.744$

תשובה: ההסתברות, שנבחן יקבל ציון עובר במבחן כולו, היא 0.744 **.**

ב. ידוע כי נבחן קיבל ציון עובר במבחן כולו, נסמן אותה ב- A **.**

את ההסתברות שקיבל ציון עובר בשני התרגילים באלגברה וציון נכשל בתרגיל בגיאומטריה, נסמן ב- B **.**

$$p(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{0.6\cdot0.6\cdot0.2}{0.744}=\frac{0.072}{0.744}=\frac{3}{31}\ .$$

תשובה: ההסתברות שהנבחן קיבל ציון עובר בשני התרגילים באלגברה וציון נכשל בתרגיל בגיאומטריה,

אם ידוע שהוא קיבל ציון עובר במבחן כולו, היא $\frac{3}{31}$ **.**

א. נתונה סדרה המקיימת את הכלל $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 5 \\ a_1 = 4 \end{cases}$ **, לכל** n **טבעי.**

מכאן ש: $a_{n+1} - a_n = 5$ **והסדרה היא חשבונית, כאשר** $d = 5$ **,**

כי ההפרש בין כל שני איברים עוקבים קבוע (לא תלוי ב- n **).**

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = 4 + (n-1)\cdot 5$$
$$a_n = 4 + 5n - 5$$
$$\boxed{a_n = 5n - 1}$$

תשובה: הוכחנו שהסדרה חשבונית, ונוסחת האיבר הכללי שלה היא $a_n = 5n - 1$ **.**

ב. נמצא כמה איברים יש לחבר בסדרה, החל מהאיבר הראשון, כדי שסכומם יהיה $9,090$ **.**

ניעזר בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית.

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

$$9,090 = \frac{n}{2}\left[2\cdot 4 + 5\cdot (n-1)\right]$$
$$\Leftrightarrow 18,180 = n(8 + 5n - 5)$$
$$\Leftrightarrow 18,180 = n(5n + 3)$$
$$\Leftrightarrow 5n^2 + 3n - 18,180 = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{n_1 = 60} \quad \cancel{n_2 < 0}$$

מספר איברי הסדרה הוא שלם וחיובי, לכן נפסל הפתרון השלילי.

תשובה: יש לחבר 60 **איברים בסדרה, החל מהאיבר הראשון, כדי שסכומם יהיה** $9,090$ **.**

ג. נתון כי בסדרה יש 80 **איברים.**

האיבר הראשון, ב- 20 **האיברים האחרונים, הוא** a_{61} $(80 - 20 + 1 = 61)$.

$$a_{61} = a_1 + (61-1)\cdot d$$
$$a_{61} = 4 + 60\cdot 5$$
$$a_{61} = 304$$

$$S_{last\ 20} = \frac{20\left[2\cdot 304 + (20-1)\cdot 5\right]}{2}$$
$$S_{last\ 20} = 10\left[608 + 95\right]$$
$$\boxed{S_{last\ 20} = 7,030}$$

תשובה: סכום 20 **האיברים האחרונים בסדרה הוא** $7,030$ **.**

א. **(1) נוכיח כי** $AB = AD$.

$DC \| AB$ **(בסיסי הטרפז מקבילים)**

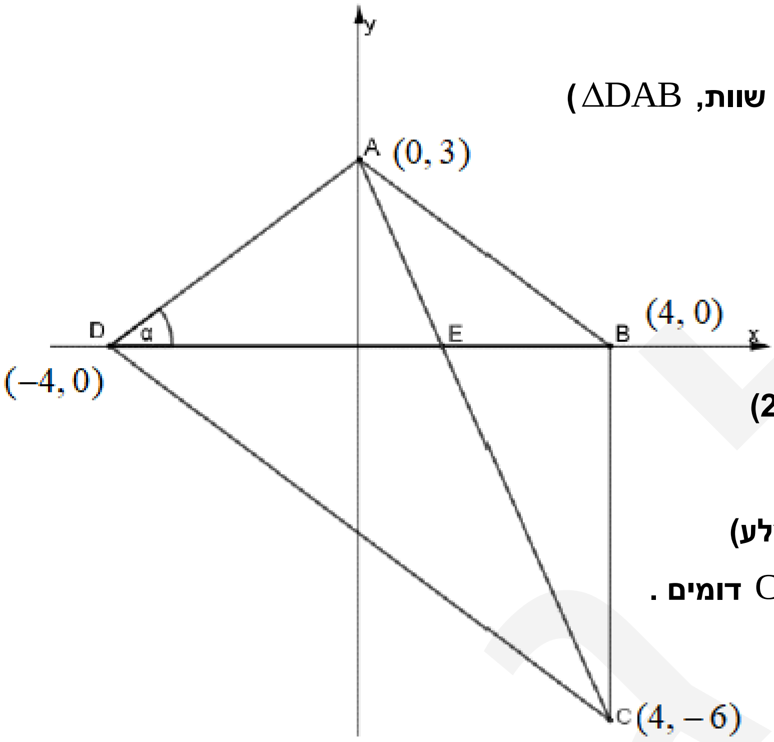
$\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC$ **(נתון)**

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$ **(זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים)**

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB$ **(כלל המעבר)**

$AB = AD$ **(מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות,** ΔDAB**)**

תשובה: הוכחנו ש- $AB = AD$.



(2) נוכיח כי המשולשים AEB **ו-** CED **דומים.**

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD} = \frac{EB}{ED}$$ **(משפט תאלס הרחבה 2)**

$\Delta AEB \sim \Delta CED$ **(משפט דמיון צלע צלע צלע)**

תשובה: הוכחנו שהמשולשים AEB **ו-** CED **דומים** .

ב. **נתון:** $A(0,3)$, $D(-4,0)$, **האלכסון** BD **מונח על ציר ה-** x . BC **מאונכת לציר ה-** x .

$AB = AD$, **ולכן** $B(4,0)$ **(ציר ה-** y **מאונך לציר ה-** x **ולכן חוצה את הבסיס של** ΔABD **שווה השוקיים)**

$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$. **לישרים מקבילים שיפועים שווים, ולכן** $m_{DC} = m_{AB} = -\frac{3}{4}$

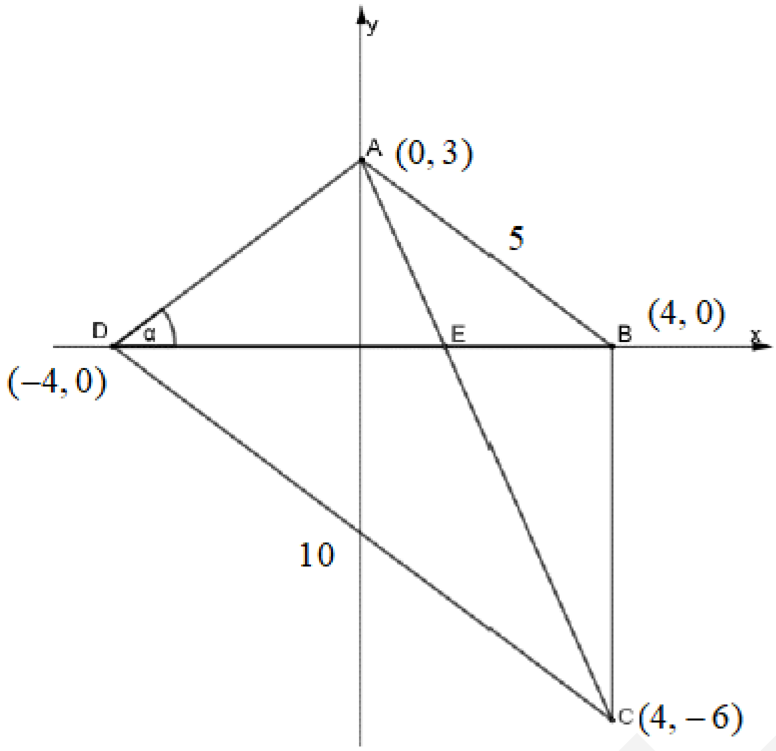
$$x_C = x_B = 4$$

$$\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0 - y_C}{-4-4} = -\frac{3}{4}$$

$$y_C = -6 \quad \rightarrow \boxed{C(4,-6)}$$

תשובה: $B(4,0)$, $C(4,-6)$.

ג. נמצא את יחס הדמיון, ובהתאם את יחס השטחים, ששווה לריבוע יחס הדמיון במשולשים דומים .



$$AB=\sqrt{(0-4)^2+(3-0)^2}=5$$

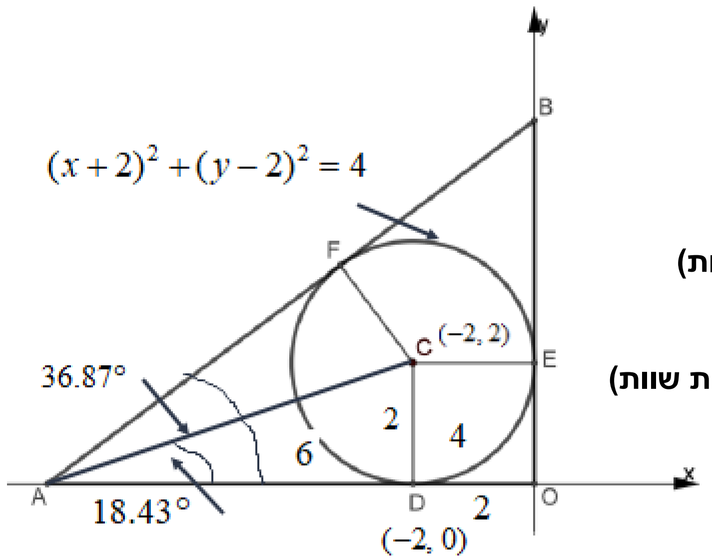
$$CD=\sqrt{(-4-4)^2+(0+6)^2}=10$$

$$\frac{AB}{CD}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{S_{\Delta AEB}}{S_{\Delta CED}}=(\frac{1}{2})^2$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta AEB}}{S_{\Delta CED}}=\frac{1}{4}}$$

תשובה: יחס השטחים הוא $1:4$.



א. (1) נוכיח שהמרובע $OECD$ הוא ריבוע.

ΔABO **ישר זווית,** $\sphericalangle O = 90°$ **(נתון)**

ΔABO **חוסם מעגל שמרכזו** C **(נתון)**

$\sphericalangle CEO = \sphericalangle CDO = 90°$

(רדיוסים מאונכים למשיק, בנקודת ההשקה)

$OECD$ **הוא מלבן (מרובע עם שלוש זוויות ישרות)**

$CE = CD$ **(רדיוסים שווים במעגל)**

$OECD$ **הוא ריבוע (מלבן עם שתי צלעות סמוכות שוות)**

תשובה: הוכחנו שהמרובע $OECD$ **הוא ריבוע.**

(2) נוכיח שהמרובע $ADCF$ **הוא דלתון.**

$CF = CD$ **(רדיוסים שווים במעגל)**

$AF = AD$ **(אם מנקודה** (A) **יוצאים שני משיקים למעגל, אז הם שווים זה לזה)**

$ADCF$ **הוא דלתון (מרובע עם שני זוגות שונים של צלעות סמוכות שוות)**

תשובה: הוכחנו שהמרובע $ADCF$ **הוא דלתון.**

ב. נתון $D(-2,0)$**, ולכן אורך צלע הריבוע** $OECD$ **היא** 2 .

ומרכז המעגל הוא $C(-2,2)$**, והרדיוס שלו** 2.

תשובה: משוואת המעגל היא $(x+2)^2+(y-2)^2=4$.

ג. (1) נתון: $m_{AB}=\frac{3}{4}$.

הזווית שבין הצלע AB **לכיוון החיובי של ציר ה-** x **,** $\sphericalangle BAO$**, נתונה ע"ח הנוסחה:** $m=\tan\alpha$.

$$\frac{3}{4}=\tan\sphericalangle BAO \quad\rightarrow \boxed{\sphericalangle BAO=36.87°}$$

ומכאן, ש- $\boxed{\sphericalangle CAD=18.43°} \rightarrow \sphericalangle CAD=\frac{36.87°}{2}$ **(אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני משיקים**

למעגל, אז הקטע המחבר אותה למרכז המעגל חוצה את הזווית שבין המשיקים).

תשובה: $\sphericalangle CAD=18.43°$.

(2) שטח הריבוע $OECD$ **שווה ל-** $2^2=4$.

$$\Delta ACD:\quad \tan18.43°=\frac{CD}{AD} \rightarrow AD=\frac{2}{\tan18.43°} \rightarrow \boxed{AD=6}$$

$$S_{\Delta ACD}=\frac{AD\cdot CD}{2}=\frac{6\cdot 2}{2} \rightarrow \boxed{S_{\Delta ACD}=6}$$

ושטח הטרפז הוא $4+6=10$

תשובה: שטח הטרפז $ACEO$ **הוא** 10.

בגרות פ פברואר 20 דוגמה 3 משרד החינוך שאלון 35481
זהה לבגרות עב ינואר 12 מועד חורף שאלון 35804

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-5}{x+3}$.

(1) הביטוי שבמכנה $x+3$ **מתאפס עבור** $x=-3$ **ולכן הפונקציה מוגדרת לכל** $x\neq-3$.

תשובה: $x\neq-3$.

(2) אסימפטוטה אופקית - חזקת פולינום המונה (2) **גדולה מחזקת פולינום המכנה** (1)

ולכן הביטוי $\frac{x^2-5}{x+3}$ **שואף ל-** $\pm\infty$ **כאשר** $x\to\pm\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית .**

אסימפטוטה אנכית - $x=-3$ **מאפס מכנה ולא מונה,**

ולכן הביטוי $\frac{x^2-5}{x+3}$ **שואף ל-** $\pm\infty$ **כאשר** $x\to-3$ **ובהתאם** $x=-3$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $x=-3$.

(3) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ולכן:**

$$0=\frac{x^2-5}{x+3}$$

$$0=x^2-5 \quad \to x=\pm\sqrt{5} \quad \to \boxed{(-\sqrt{5},0),(\sqrt{5},0)}$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ולכן:**

$$f(0)=\frac{0^2-5}{0+3}=-1\frac{2}{3} \quad \to \boxed{(0,-1\frac{2}{3})}$$

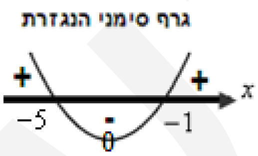
תשובה: $(-\sqrt{5},0),(\sqrt{5},0)$, $(0,-1\frac{2}{3})$.

(4) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה ואת סוגה.

$$f'(x)=\frac{2x(x+3)-(x^2-5)}{(x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+6x-x^2+5}{(x+3)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}}$$



הנגזרת מתאפסת עבור $x=-1$ **,** $x=-5$ **, כאשר מכנה הנגזרת חיובי ועל פי גרף סימני הנגזרת משמאל.**

עבור $x=-5$ **נגזרת הפונקציה עוברת מחיוביות לשליליות, והפונקציה עוברת מעלייה לירידה וזו נקודת מקסימום.**

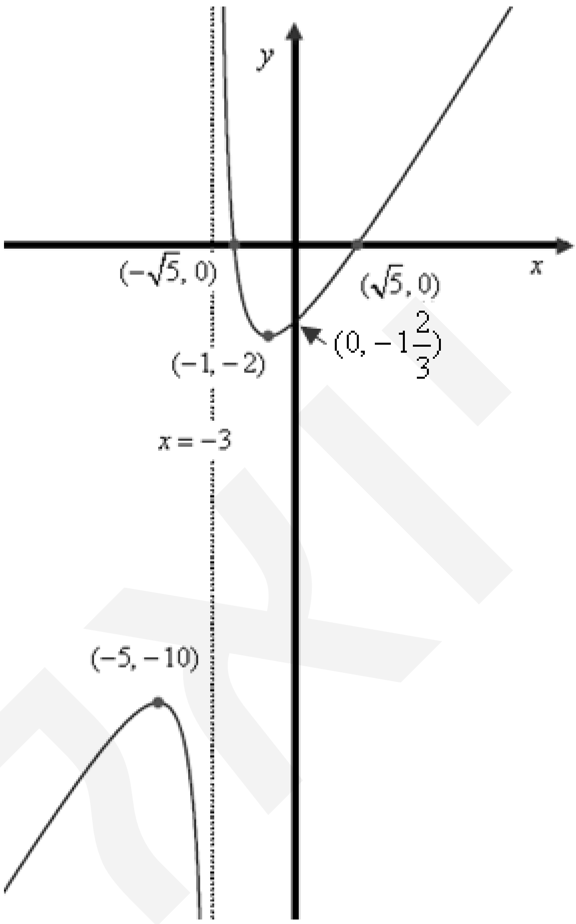
$$f(-5)=\frac{(-5)^2-5}{-5+3}=-10 \quad \to \boxed{(-5,-10)}$$

עבור $x=-1$ **נגזרת הפונקציה עוברת משליליות לחיוביות לשליליות, והפונקציה עוברת מירידה לעלייה וזו נקודת מינימום.**

$$f(-1)=\frac{(-1)^2-5}{-1+3}=--2 \quad \to \boxed{(-1,-2)}$$

תשובה: תשובה: $(-5,-10)$ **מקסימום,** $(-1,-2)$ **מינימום .**

(5) הסקיצה המתאימה



ב. (1) $f'(x)=\dfrac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}$

אסימפטוטה אופקית - חזקת פולינום המונה (2) **שווה לחזקת פולינום המכנה** (2)

ולכן הביטוי $\dfrac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}$ **שואף ל-** 1 **כאשר** $x\to\infty$ **ובהתאם ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית .**

אסימפטוטה אנכית - $x=-3$ **מאפס מכנה ולא מונה,**

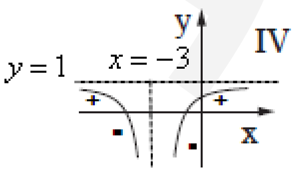
ולכן הביטוי $\dfrac{x^2-3}{(x+1)^2}$ **שואף ל-** ∞ **כאשר** $x\to-3$ **ובהתאם** $x=-3$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=1$ **,** $x=-3$ **.**

(2) גרף IV **מתאים לגרף הנגזרת, בהתאם לתחומי החיוביות שלילות, שפורטו בסעיף א (4),**

וכן לאסימפטוטות, שצוינו בסעיף ב (1).

תשובה: גרף IV **.**



א. נתונה הפונקציה $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$

$f'(x)=6x^2-18x+12$

$0=6x^2-18x+12$

$x_{1,2}=\frac{18\pm6}{12}$

$x_1=\frac{18+6}{12}=\frac{24}{12}=2$

$x_2=\frac{18-6}{12}=\frac{12}{12}=1$

$f'(0)=6\cdot0^2-18\cdot0+12=12>0$

$f'(1.5)=6\cdot1.5^2-18\cdot1.5+12=-1.5<0$

$f'(2.5)=6\cdot2.5^2-18\cdot2.5+12=4.5>0$

עבור $x=1$ $f(x)$ **עוברת מעליה לירידה ולכן מקסימום**

עבור $x=2$ $f(x)$ **עוברת מירידה לנסיעה ולכן מינימום**

תשובה: $x=1$ **מקסימום,** $x=2$ **מינימום.**

ב. שיעור ה- y **בנקודת המינימום הוא** (-2) ,

ולכן שיעוריה $(2,-2)$.

נציב בפונקציה:

$-2=2\cdot2^3-9\cdot2^2+12\cdot2-a$

$\boxed{a=6}$

תשובה: $a=6$

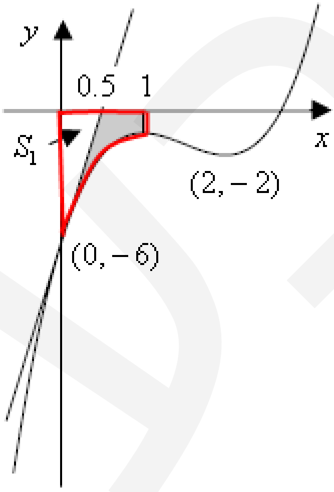
ג. נציב $a=6$ **והפונקציה היא** $f(x)=2x^3-9x^2+12x-6$.

נקודת ההשקה $(0,-6)$ **, שיפוע המשיק** $m=f'(0)=12$

ובהתאם משוואת המשיק היא $y=12x-6$.

נקודת חיתוך עם ציר ה- x **:** $0=12x-6\rightarrow x=0.5\rightarrow(0.5,0)$

שטח המשולש S_1 **הוא :** $S_1=\frac{6\cdot0.5}{2}=1.5$.



נמצא את S_2 **, השטח החסום בין הפונקציה לצירים (מוקף אדום):**

$$S_2=\int_0^1(0-(2x^3-9x^2+12x-6))dx$$

$$S_2=\int_0^1(-2x^3+9x^2-12x+6)dx$$

$$S_2=-0.5x^4+3x^3-6x^2+6x\Big]_0^1$$

$$S_2=(-0.5\cdot1^4+3\cdot1^3-6\cdot1^2+6\cdot1)-(-0.5\cdot0^3+3\cdot0^3-6\cdot0^2+6\cdot0)$$

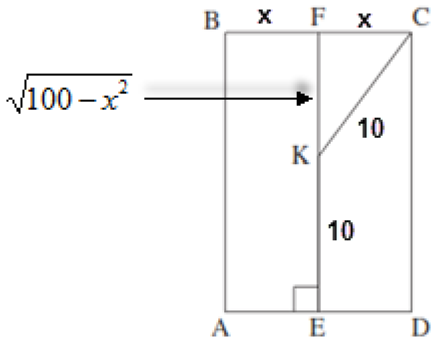
$$\boxed{S_2=2.5}$$

וגודל השטח המקווקו $S=S_2-S_1=2.5-1.5=1$

תשובה: 1 **יח"ר.**

א. נסמן $FC = x$.

נחשב את FK **באמצעות משפט פיתגורס ב-** ΔFKC .



$(FK)^2 + x^2 = 10^2$

$(FK)^2 = 100 - x^2$

$FK = \sqrt{100-x^2}$

תשובה: $FK = \sqrt{100-x^2}$.

ב. הפונקציה שיש להביא ***למקסימום*** **היא** ***היקף המלבן*** $ABCD$.

$BC = 2x$ **, כי נתון שהנקודה** F **היא אמצע הצלע.**

$FE = 10 + \sqrt{100-x^2}$ **, ולכן גם** $CD = 10 + \sqrt{100-x^2}$ **(כי** $FCDE$ **גם מלבן)**

$$P = 2 \cdot 2x + 2 \cdot (10 + \sqrt{100-x^2})$$

$$\boxed{P = 4x + 20 + 2\sqrt{100-x^2}}$$

$$P' = 4 - \frac{\cancel{2} \cdot 2x}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}$$

$$\boxed{P' = \frac{4\sqrt{100-x^2} - 2x}{\sqrt{100-x^2}}}$$

$$0 = 4\sqrt{100-x^2} - 2x$$

$$x = 2\sqrt{100-x^2} \quad ()^2$$

$$x^2 = 4(100 - x^2)$$

$$5x^2 = 400$$

$$x^2 = 80$$

$$\boxed{x = \sqrt{80}}$$

$$test: \quad \sqrt{80} = 2\sqrt{100 - \sqrt{80}^2} \quad \to \sqrt{80} = 2\sqrt{20} \quad \to \sqrt{80} = \sqrt{80} \quad o.k.$$

$$\left.\begin{array}{l} P'(8) = \dfrac{4\sqrt{100-8^2} - 2 \cdot 8}{+} = \dfrac{8}{+} > 0 \\ P'(9) = \dfrac{4\sqrt{100-9^2} - 2 \cdot 9}{+} = \dfrac{-0.56}{+} < 0 \end{array}\right\} x = \sqrt{80} \quad Max$$

תשובה: $BC = 2\sqrt{80}$ **, עבורו היקף המלבן** $ABCD$ **מקסימלי.**