מבחן לדוגמה 2, שאלון 35471
מועד קיץ תש״פ

מורים יקרים,
להלן פתרון בחינת בגרות לדוגמה מהתוכנית החדשה.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. בקבוצה א' ציוני התלמידים היו 6 , 8 ו- 9 בלבד.

(1) ממוצע ציוני התלמידים הוא $\bar{x}=8$, סטיית התקן היא $s=1.2$,

כאשר מספר התלמידים , שקבלו ציון 9 בקבוצה זו, הוא 12.

נסמן ב- a את מספר התלמידים שקבלו ציון 6, וב- b את מספר התלמידים שקבלו ציון 8.

<u>דרך ראשונה</u> – על פי סכום סטיות מהממוצע.

סכום הסטיות מהממוצע הוא 0 .

$$(9-8)\cdot 12+(8-8)\cdot b+(6-8)\cdot a=0$$

$$-2a=-12 \quad /:(-2)$$

$$\boxed{a=6}$$

<u>דרך שנייה</u> – טבלת שכיחויות.

x - ציון	6	8	9	סה"כ
f - מספר תלמידים	a	b	12	$N=12+a+b$

נשתמש בנוסחה למציאת הממוצע,

$$8=\frac{6\cdot a+8\cdot b+12\cdot 9}{12+a+b}$$

$$96+8a+8b=6a+8b+108$$

$$2a=12 \quad /:2$$

$$\boxed{a=6}$$

תשובה: מספר התלמידים שקבלו ציון 6 הוא 6 .

(2) נשתמש בנוסחה לסטיית התקן שבנוסחאון:

x - ציון	6	8	9	סה"כ
f - מספר תלמידים	6	b	12	$N=18+b$

$$1.2=\sqrt{\frac{(6-8)^2\cdot 6+(8-8)^2\cdot b+(9-8)^2\cdot 12}{18+b}}$$

$$1.44=\frac{36}{18+b}$$

$$25.92+1.44b=36$$

$$1.44b=10.08 \quad /:1.44$$

$$\boxed{b=7} \quad \rightarrow N=18+7 \quad \rightarrow \boxed{N=25}$$

תשובה: בקבוצה היו 25 תלמידים.

(3) נבנה טבלת שכיחויות, שתעזור למצוא את החציון.

x - ציון	6	8	9	סה"כ
f - מספר תלמידים	6	7	12	$N=25$
שכיחות מצטברת מנתון עד נתון	6 $1-6$	13 $7-13$	25 $14-25$	

השכיח הוא הנתון שמופיע הכי הרב הפעמים, במקרה זה ציון 9.

מספר הנתונים (25) אי-זוגי, ולכן החציון יהייה הנתון האמצעי. $13=\frac{25+1}{2}$.

הנתון ה- 13 הוא הציון 8, ולכן זה החציון.

תשובה: הציון השכיח הוא 9, חציון הציונים הוא 8.

ב. גם בקבוצה ב' ציוני התלמידים היו 6 , 8 ו- 9 בלבד,

גם כאן, ממוצע ציוני התלמידים הוא $\bar{x}=8$,

כאשר מספר התלמידים שקיבלו את הציון הממוצע, בקבוצה זו,

גדול ממספר התלמידים שקיבלו את הממוצע $\bar{x}=8$ בקבוצה א'.

מכאן שפיזור הנתונים קטן יותר בקבוצה ב', כי יש יותר נתונים בממוצע, וסטיית התקן קטנה יותר.

תשובה: סטיית התקן של קבוצה ב' קטנה מסטיית התקן של קבוצה א'.

ג. לקבוצה ב' הצטרפו שלושה תלמידים, עם הציונים 5 , 6 ו- 7, כלומר ממוצע ציוני המצטרפים הוא 6 .

ממוצע ציוני המצטרפים קטן מהממוצע הקיים שהוא $\bar{x}=8$, ולכן הממוצע החדש קטן יותר.

תשובה: הממוצע של הקבוצה קטן.

ד. לקבוצה א' הצטרף תלמיד, והתברר שחציון הקבוצה לא השתנה.

לאחר ההצטרפות מספר הנתונים בקבוצה א' הוא זוגי (26) ,

ולכן החציון יהיה הממוצע של שני הנתונים האמצעיים: $13.5=\frac{26+1}{2}$, הנתון ה- 13 והנתון ה- 14 .

אם הציון שלו קטן או שווה ל- 8 אז ציון 8 יהייה הנתון ה- 13 וגם הנתון ה- 14 , והחציון יישאר ללא שינוי.

אם הציון שלו גדול מ- 8, אז ציון 8 יהייה הנתון ה- 13 והנתון ה- 14 יהייה גדול מ- 8 והחציון ישתנה.

השכיח לא ישתנה בכל מקרה, כי מספר התלמידים שקיבלו ציון 9 יהייה הגדול ביותר.

הממוצע ישתנה (יקטן), אם הציון הנוסף יהיה נמוך מהממוצע הקיים.

תשובה: הממוצע של הקבוצה יקטן אם הציון החדש קטן מ- 8 , ויישאר ללא שינוי אם הציון החדש שווה ל- 8.

השכיח לא ישתנה, בכל מקרה.

א. נשלים את כל הטבלה.

	B - ענת	C - אבי	D - דוד	
A - בנים תומכים	100	200	100	400
$\overline{A}$ - בנות תומכות	200	150	50	400
	300	350	150	800

$p(C)=\frac{N(C)}{N(S)}=\frac{350}{800}=\frac{7}{16}$.

תשובה: ההסתברות, שנבחר באקראי תלמיד שתומך באבי, היא $\frac{7}{16}$.

ב. ידוע שהתלמיד שנבחר תומך בענת.

נחשב את ההסתברות שהתומך היא בת.

$p(\overline{A}/B)=\frac{N(\overline{A}\cap B)}{N(B)}=\frac{200}{300}=\frac{2}{3}$.

תשובה: ההסתברות שהתומך הוא בת, אם ידוע שהוא תומך בענת, היא $\frac{2}{3}$.

ג. (1) ידוע שהתלמיד שנבחר אינו תומך בענת.

נחשב את ההסתברות שהוא תומך בדוד.

$p(D/(C\cup D))=\frac{N(D\cap(C\cup D))}{N((C\cup D))}=\frac{150}{350+150}=0.3$.

תשובה: ההסתברות שהנבחר תומך בדוד, אם ידוע שהוא אינו תומך בענת, היא 0.3 .

(2) בוחרים שני תלמידים, מבין אלו שאינם תומכים בענת.

נחשב את ההסתברות שלפחות אחד מהם תומך בדוד,

שזה המאורע המשלים לכך ששניהם אינם תומכים בדוד.

על-פי תת סעיף ג(2): $p(\overline{D}/(C\cup D))=1-0.3=0.7$

ולכן ההסתברות המבוקשת היא $1-0.7^2=0.51$.

תשובה: ההסתברות, שלפחות אחד מבין השניים שאינם תומכים בענת – תומך בדוד, היא 0.51 .

המרחקים שדנה עוברת בדרכה הלוך מהווים סדרה הנדסית, שמנתה $q=\frac{100+2}{100}=1.02$ **, כאשר** $a_1=80$ **.**

המרחקים שדנה עוברת בדרכה חזור מהווים סדרה חשבונית, שהפרשה $d=5$, **כאשר** $a_1=100$ **.**

נמצא את המרחק הלוך, עבור $n=20$ **(** 20 **דקות).**

$$S_{20}=\frac{80\cdot(1.02^{20}-1)}{1.02-1}$$
$$S_{20}=\frac{38.88}{0.02}$$
$$S_{20}=1944$$

כלומר, בדרכה הלוך רצה דנה 1944 **מטרים בערך.**

נמצא את המרחק חזור, בדרך לביתה, עבור $n=10$ **(** 10 **דקות).**

$$S_{10}=\frac{10\left[2\cdot100+(10-1)\cdot5\right]}{2}$$
$$S_{10}=5\cdot(200+45)$$
$$S_{10}=1225$$

כלומר, בדרכה חזרה עוברת דנה 1225 **מטרים בערך, מרחק הקטן מדרכה הלוך.**

תשובה: דנה לא תספיק לעבור את הדרך חזרה הביתה ב- 10 **דקות.**

א. נתון: $A(-12,0)$, $B(6,0)$, $\sphericalangle ABC=\alpha$, C **על ציר ה-** y .

(1) נראה כי שטח המשולש BOC **הוא** $18\tan\alpha$.

$\underline{\Delta BOC}$

$$\tan\alpha=\frac{OC}{OB}$$

$$\boxed{6\tan\alpha=OC}$$

$$S_{\Delta BOC}=\frac{OB\cdot OC}{2}=\frac{6\cdot 6\tan\alpha}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta BOC}=18\tan\alpha}$$

תשובה: הוכחנו ששטח המשולש BOC **הוא** $18\tan\alpha$.

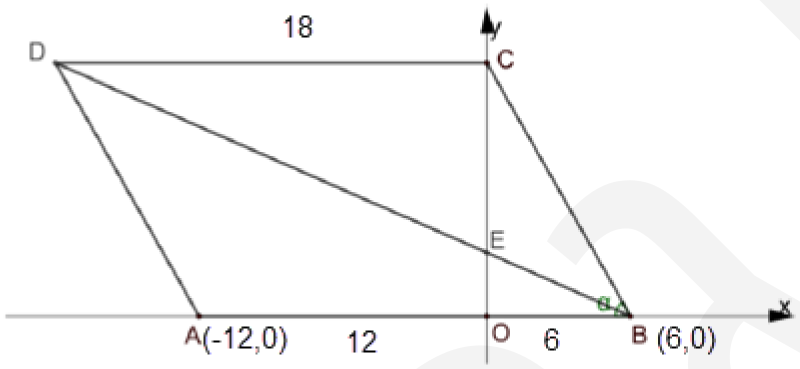
(2) נראה כי שטח המשולש BOC **הוא** $18\sqrt{3}$.

$$18\tan\alpha=18\sqrt{3}$$

$$\tan\alpha=\sqrt{3}$$

$$\boxed{\alpha=60^\circ}$$

תשובה: $\alpha=60^\circ$.



ב. (1) נוכיח כי המשולשים OEB **ו-** DEC **דומים.**

$DC \parallel AB$ **(צלעות נגדיות מקבילות במקבילית)**

$\frac{DC}{BO}=\frac{DE}{BE}=\frac{EC}{EO}$ **(משפט תאלס הרחבה 2)**

$\Delta DEC \sim \Delta BEO$ **(משפט דמיון צלע צלע צלע)**

תשובה: הוכחנו שהמשולשים BEO **ו-** DEC **דומים (רשמנו לפי סדר קודקודים).**

(2) נמצא את יחס הדמיון .

$$DC=AB=x_B-x_A=18$$

$$\frac{DC}{BO}=\frac{18}{6}=\frac{3}{1}$$

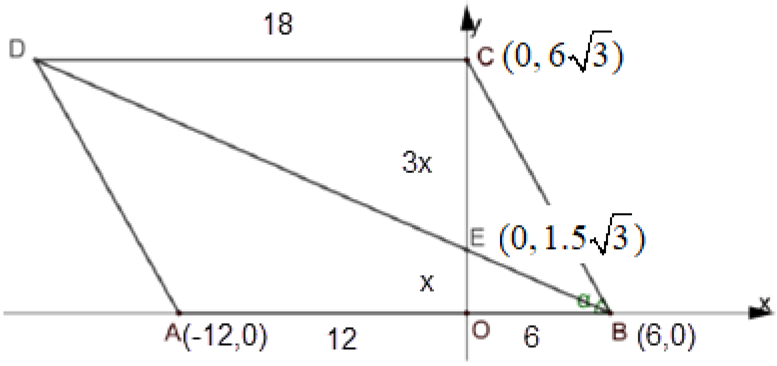
תשובה: יחס הדמיון, בין משולש DEC **לבין משולש** BEO **הוא** $3:1$.

ב. (1) נחשב את שיעורי הנקודות C ו- E .

$$OC = 6\tan\alpha$$

$$OC = 6\tan 60^\circ .$$

$$OC = 6\sqrt{3} \quad \rightarrow \boxed{C(0, 6\sqrt{3})}$$



$$\frac{EC}{EO} = \frac{3}{1} \quad \rightarrow EO = \frac{1}{4}OC$$

$$EO = 1.5\sqrt{3} \quad \rightarrow \boxed{E(0, 1.5\sqrt{3})}$$

תשובה: $C(0, 6\sqrt{3})$, $E(0, 1.5\sqrt{3})$.

(2) למשולשים BEO **ו-** BEC **יש גובה משותף (** (OB) **לצלעות ביחס** $\frac{EC}{EO} = \frac{3}{1}$ **, ולכן זה גם יחס השטחים.**

אפשר גם לרשום בצורה הבאה:

$$\frac{S_{\Delta BEC}}{S_{\Delta BEO}} = \frac{CE \cdot OB \cdot 0.5}{EO \cdot OB \cdot 0.5}$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta BEC}}{S_{\Delta BEO}} = \frac{3}{1}}$$

וזה גם יחס הדמיון שקיבלנו בתת-סעיף ב(2).

תשובה: $S_{\Delta BEC} : S_{\Delta BEO} = 3:1$ **, בדומה ליחס הדמיון שקבלנו בתת-סעיף ב(2).**

א. (1) נמצא את משוואת האנך האמצעי לצלע AC .

אמצע הצלע: $\boxed{E(3.5,-1.5)}$

$$\left.\begin{aligned} x_E &= \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{7+0}{2} = 3.5 \\ y_E &= \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{-5+2}{2} = -1.5 \end{aligned}\right\}$$

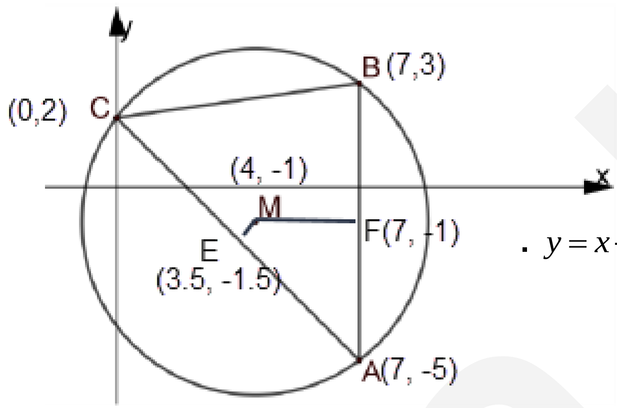
שיפוע הצלע: $m_{AC} = \frac{y_A-y_C}{x_A-x_C} = \frac{-5-2}{7-0} = -1$

האנך האמצעי מאונך לצלע AC **, ולכן על פי תנאי ניצבות:** $m_{E\perp}\cdot m_{AC} = -1$ **.**

שיפוע האנך האמצעי (הופכי לנגדי) הוא $m_{E\perp} = +1$ **.**

נמצא את משוואת האנך האמצעי, העובר בנקודה $E(3.5,-1.5)$ **, ששיפועו** $m_{E\perp} = 1$ **.**

$$y+1.5 = 1(x-3.5)$$
$$y+1.5 = x-3.5$$
$$\boxed{y = x-5}$$



תשובה: משוואת האנך האמצעי לצלע AC **היא** $y = x-5$.

(2) נמצא את משוואת האנך האמצעי לצלע AB .

אמצע הצלע: $\boxed{F(7,-1)}$

$$\left.\begin{aligned} x_F &= x_E = x_B = 7 \\ y_F &= \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{-5+3}{2} = -1 \end{aligned}\right\}$$

כיוון שהצלע AB **מקבילה לציר ה-** y ,

הרי שהאנך האמצעי יקביל לציר ה- x **, ומשוואתו של פונקציה קבועה,** $y = -1$.

תשובה: הראינו כי הישר $y = -1$ **הוא האנך האמצעי לצלע** AB .

(3) מרכז המעגל הוא מפגש אנכים אמצעיים, בין $y = -1$ **ל-** $y = x-5$.

$$y_M = -1$$
$$-1 = x-5$$
$$4 = x = \quad \rightarrow \boxed{M(4,-1)}$$

כיוון שהצלע AB **מקבילה לציר ה-** y ,

הרי שהאנך האמצעי יקביל לציר ה- x **, ומשוואתו של פונקציה קבועה** $y = -1$.

$$R = d_{MC} = \sqrt{(4-0)^2+(-1-2)^2} = 5$$

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-4)^2+(y+1)^2 = 25$.

ב. נחשב את $\sphericalangle ABC$

$$AC=\sqrt{(7-0)^2+(-5-2)^2}=7\sqrt{2}$$

ΔABC **על פי משפט הסינוסים.**

$$\frac{AC}{\sin\sphericalangle ABC}=2R$$

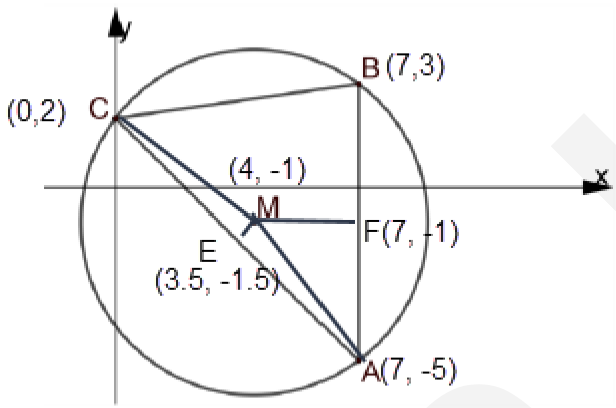
$$\frac{7\sqrt{2}}{2\cdot 5}=\sin\sphericalangle ABC$$

$$\boxed{\sphericalangle ABC=81.87^\circ}$$

הסבר חשוב: $\sphericalangle ABC<90^\circ$ **כי מרכז המעגל החוסם נמצא בתוך** ΔABC, **והמשולש חד-זווית.**

תשובה: $\sphericalangle ABC=81.87^\circ$.

(3) נחשב את שטח ΔAMC .

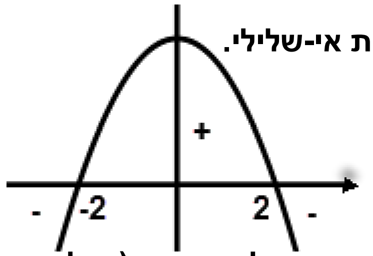


$$ME=\sqrt{(4-3.5)^2+(-1+1.5)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{\Delta ABE}=\frac{AC\cdot ME}{2}=\frac{7\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=3.5$$

תשובה: שטח ΔAMC **הוא** 3.5 **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$.



הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

$$4-x^2\ge 0$$
$$4-x^2=0$$
$$x=2,\quad x=-2$$

הביטוי שבתוך השורש מיוצג על ידי פרבולה הפוכה (בעלת מקסימום, "עצובה")

ובהתאם לתחום בו היא חיובית נמצא את תחום ההגדרה.

תשובה: תחום ההגדרה: $-2\le x\le 2$.

ב. נראה כי הפונקציה $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ **היא אי-זוגית.**

$$f(-x)=-x\sqrt{4-(-x)^2}$$
$$f(-x)=-x\sqrt{4-x^2}$$
$$\boxed{f(-x)=-f(x)}$$

ולכן הפונקציה אי-זוגית, והגרף שלה סימטרי לראשית הצירים.

תשובה: הראינו כי הפונקציה $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ **היא אי-זוגית.**

ג. (1) נמצא נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ציר y **:** $x=0$ **-** $f(0)=0\sqrt{4-0^2}=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$

ציר x **:** $y=0$ **-** $0=x\sqrt{4-x^2} \quad \rightarrow x=-2,0,2$.

תשובה: $(0,0)$, $(2,0)$ **,** $(-2,0)$.

(2) נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ונקבע את סוגן.

נשים לב ש: $(2,0)$ **,** $(-2,0)$ **תהייה נקודות קיצון בקצה.**

$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{x(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}}$$

$$4-2x^2=0$$

$$x^2=2$$

$$x=\sqrt{2}\quad\to y=\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-\sqrt{2}^2}=2\quad\to(\sqrt{2},2)$$

$$x=-\sqrt{2}\quad\to y=-\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-(-\sqrt{2})^2}=-2\quad\to(-\sqrt{2},-2)$$

נמצא את סוגי נקודות הקיצון, בהתאם לטבלת עלייה וירידה , המבוססת על ערכי הפונקציה.

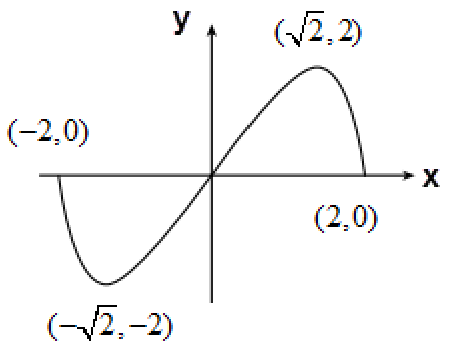
(את סימני הנגזרת, הוספתי עבור סעיף ד. תחומי עלייה וירידה קבעתי כבר לפי ערכי הפונקציה)

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
$f(x)$	0		-2		2		0
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
מסקנה	Max	↘	Min	↗	Max	↘	Min

תשובה: $(2,0)$ **מינימום ,** $(\sqrt{2},2)$ **מקסימום ,** $(-\sqrt{2},-2)$ **מינימום ,** $(-2,0)$ **מקסימום.**

(3) תשובה: עלייה - $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ **, ירידה -** $\sqrt{2}<x<2$ **או** $-2<x<-\sqrt{2}$.

ד. נסרטט סקיצה, ונשים לב לסימטריה לראשית הצירים.



ד. נתונה הפונקציה $g(x)=x\sqrt{4-x^2}-2$.

כלומר, $g(x)=f(x)-2$ **, וזו תזוזה אנכית** 2 **יחידות כלפי מטה,**

ללא שינוי בתחומי עלייה וירידה וסוג הקיצון.

תשובה: $(2,-2)$ **מינימום ,** $(\sqrt{2},0)$ **מקסימום ,** $(-\sqrt{2},-4)$ **מינימום ,** $(-2,-2)$ **מקסימום.**

בגרות פ פברואר 20 דוגמה 2 משרד החינוך שאלון 35471
זהה לבגרות עב יולי 12 מועד קיץ בשאלון 35804

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4}{(2x+1)^2}$.

מכנה הפונקציה צ"ל שונה מ- 0**, לכן** $2x+1\neq 0$ **ונדרש** $x\neq -0.5$.

תשובה: $x\neq -0.5$.

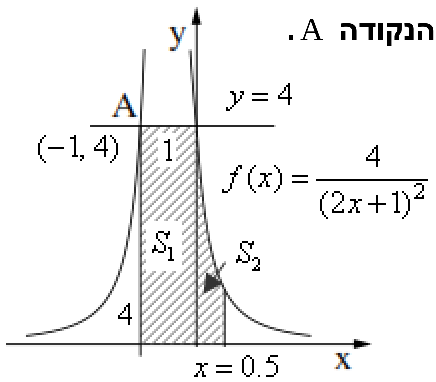
ב. $x=-0.5$ **מאפס מכנה ולא מונה, לכן הישר** $x=-0.5$ **מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.**

חזקת פולינום המכנה (2) **גדולה מחזקת פולינום המונה** (0) **ולכן** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $x=-0.5$, $y=0$.

ג. (1) בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $y=4$.

נציב בתבנית הפונקציה $f(x)=\frac{4}{(2x+1)^2}$ **לשם קבלת שיעורי הנקודה** A .



$$4=\frac{4}{(2x+1)^2}$$
$$(2x+1)^2=1$$
$$2x+1=1 \qquad 2x+1=-1$$
$$2x=0 \qquad 2x=-2$$
$$x=0 \qquad x=-1 \rightarrow \boxed{A(-1,4)}$$

תשובה: שיעורי הנקודה A **הם** $(-1,4)$.

(2) נחלק את השטח המקווקו לשני שטחים: S_1, S_2 **, כאשר הישר** $x=0$ **מפריד ביניהם.**

S_1 **הוא מלבן, שממדיו הם** 1×4 **ולכן שטחו** 4 **יח"ר.**

את S_2 **נחשב בעזרת אינטגרל.**

הפרש הפונקציות: $\frac{4}{(2x+1)^2}-0=\frac{4}{(2x+1)^2}$

S_2	
$y=\frac{4}{(2x+1)^2}$	**פונקציה עליונה**
$y=0$	**פונקציה תחתונה**
$x=0.5$	x **גדול**
$x=0$	x **קטן**

$$S_2=\int_0^{0.5}\left(\frac{4}{(2x+1)^2}\right)dx=\int_0^{0.5}\left(4\cdot(2x+1)^{-2}\right)dx$$
$$S_2=\frac{4\cdot(2x+1)^{-1}}{-1\cdot(2)}\Big]_0^{0.5}=\frac{-2}{2x+1}\Big]_0^{0.5}$$
$$S_2=\left(\frac{-2}{2\cdot 0.5+1}\right)-\left(\frac{-2}{2\cdot 0+1}\right)$$
$$S_2=(-1)-(-2)$$
$$\boxed{S_2=1}$$

ובהתאם: $S_1+S_2=4+1=5$

תשובה: גודל השטח המקווקו הוא 5 **יח"ר.**

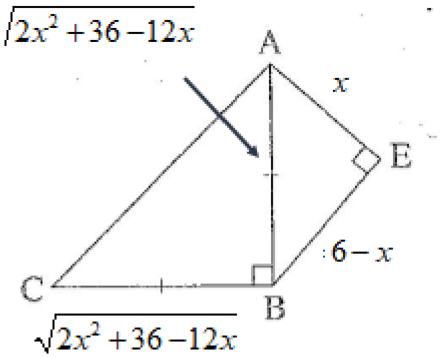
בגרות פ פברואר 20 דוגמה 2 משרד החינוך שאלון 35471
זהה לבגרות עז מאי 17 מועד קיץ א שאלון 35804

א. נסמן $AE = x$.

נתון: $AE + BE = 6$ **, ולכן** $BE = 6 - x$

נחשב את AB **באמצעות משפט פיתגורס ב-** ΔAEB.

$$(AB)^2 = x^2 + (6-x)^2$$
$$(AB)^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2$$
$$(AB)^2 = 2x^2 + 36 - 12x$$
$$(AB) = \sqrt{2x^2 + 36 - 12x}$$



ΔABC **הוא ישר זווית ושווה שוקיים.**

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot AB}{2} = \frac{1}{2}(AB)^2$$
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(2x^2 + 36 - 12x)$$
$$\boxed{S_{\Delta ABC} = x^2 - 6x + 18}$$

תשובה: $S_{\Delta ABC} = x^2 - 6x + 18$.

ב. הפונקציה שיש להביא ***למקסימום*** **היא** ***שטח המרובע*** $AEBC$.

$$S_{AEBC} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta AEB}$$
$$S_{AEBC} = x^2 - 6x + 18 + \frac{x(6-x)}{2}$$
$$S_{AEBC} = x^2 - 6x + 18 + 3x - 0.5x^2$$
$$\boxed{S_{AEBC} = 0.5x^2 - 3x + 18}$$
$$\boxed{(S_{AEBC})' = x - 3}$$
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$
$$(S_{AEBC})'' = 1 > 0 \quad \rightarrow Min$$

תשובה: $x = 3$ **, עבורו שטח המרובע** $AEBC$ **מינימלי.**