מבחן לדוגמה 1, שאלון 35471
מועד קיץ תש"פ

מורים יקרים,
להלן פתרון בחינת בגרות לדוגמה מהתוכנית החדשה.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. נתון 72.5 **שקלים** $= \bar{x}$ **, ממוצע השכר לשעה בחברה.**

נשתמש בנוסחה למציאת הממוצע, כאשר נסמן ב- n **את מספר העובדים בחברה.**

$$72.5 = \frac{50\cdot100+75\cdot60+(n-160)\cdot125}{n}$$
$$72.5n = 9,500+125n-20,000$$
$$-52.5n = -10,500 \quad /:(-50)$$
$$\boxed{n=200}$$

תשובה: מספר העובדים בחברה הוא 200 **.**

ב. נבנה טבלת שכיחויות, שתעזור במענה לסעיפים ב-ג

x **- שכר לשעה ₪**	50	75	125	**סה"כ**
f **- מספר עובדים**	100	60	40	$N=200$
שכיחות מצטברת מנתון עד נתון	100 $1-100$	160 $101-160$	200 $161-200$	

השכיח הוא הנתון שמופיע הכי הרב הפעמים, במקרה זה שכר של 50 **שקלים לשעה.**

מספר הנתונים (200) **זוגי, ולכן החציון יהייה ממוצע של שני הנתונים האמצעיים.** $\frac{200+1}{2}=100.5$.

הנתון ה- 100 **הוא** 50 **שקלים , הנתון ה-** 101 **הוא** 75 **שקלים, ולכן החציון הוא** 62.5 **שקלים** $=\frac{50+75}{2}$ **.**

תשובה: השכר השכיח הוא 50 **שקלים לשעה, השכר החציוני הוא** 62.5 **שקלים לשעה.**

ג. הטווח הוא ההפרש בין הנתון הגבוה ביותר לנתון הנמוך ביותר,

עבור סעיפים ב-ג נוסיף בטבלה שורה של שכיחות מצטברת

במקרה שלנו 75 **שקלים** $=125-50$**, והטווח הוא** 75 **שקלים לשעה.**

נשתמש בנוסחה לסטיית התקן שבנוסחאון:

$$S=\sqrt{\frac{(50-72.5)^2\cdot100+(75-72.5)^2\cdot60+(125-72.5)^2\cdot40}{200}}$$
$$S==\sqrt{\frac{161,250}{200}}=\sqrt{806.25}$$
$$\boxed{S=28.39}$$

תשובה: הטווח הוא 75 **שקלים לשעה. סטיית התקן היא** 28.39 **שקלים בשעה.**

ד. לאחר משא ומתן, עם ועד עובדי החברה, הוחלט להעלות את השכר לשעה ב- 5 שקלים.

(1) העלאת שכר בקבוע, במקרה זה, ב- 5 שקלים לשעה, מסיטה את גרף ההתפלגות ימינה.

פיזור הנתונים אינו משתנה, אולם הנתונים עצמם גדלים ב- 5 שקלים לשעה, כמובן ללא שינוי בטווח.

תשובה: החציון החדש הוא 67.5 שקלים לשעה. השכיח החדש הוא 55 שקלים לשעה.

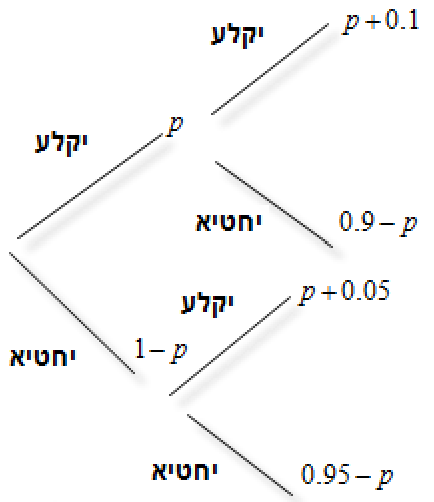
הממוצע החדש הוא 77.5 שקלים לשעה.

(2) כיון שפיזור הנתונים לא השתנה, ורק עקומת ההתפלגות הוזזה ימינה, הרי שאין שינוי בסטיית התקן.

תשובה: סטיית התקן לא משתנה, בעקבות העלאת השכר.

א. נסמן ב- p את ההסתברות שהכדורסלן יקלע לסל בפעם הראשונה.

נבנה עץ הסתברויות מתאים:



נתון כי ההסתברות שהכדורסלן יחטיא

(לא יקלע) בשתי הזריקות היא 0.03.

$$0.03=(1-p)\cdot(0.95-p)$$

$$0.03=0.95-p-0.95p+p^2$$

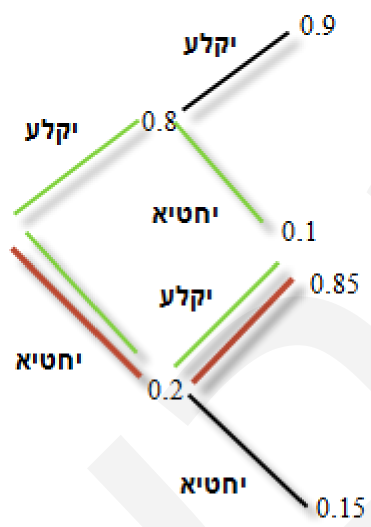
$$0=p^2-1.95p+0.92$$

$$\cancel{p=1.15} \quad \leftarrow 0\le p\le 1$$

$$\boxed{p=0.8}$$

תשובה: $p=0.8$.

ב. נציג עץ אפשרויות מעודכן.



שתי האפשרויות שהכדורסלן יקלע רק בזריקה אחת מבין השתיים –

מוצגות בירוק.

$$p(1\,shot\ in)=0.8\cdot 0.1+0.2\cdot 0.85=0.25$$

תשובה: ההסתברות היא 0.25 .

ג. האפשרות שהכדורסלן יקלע לסל בזריקה השנייה בלבד –

מוצגת באדום.

ההסתברות המבוקשת, היא למעשה ההסתברות למסלול האדום,

מבין שני המסלולים הירוקים.

$$p(2nd\ in/1\,shot\ in)=\frac{P(2nd\ in\cap 1\,shot\ in)}{P(1\,shot\ in)}=\frac{0.2\cdot 0.85}{0.25}=0.68$$

תשובה: ההסתברות היא 0.68 .

א. נתונה סדרה המקיימת את הכלל $a_{n+1}=3a_n-2$ **,** $a_1=12$**, לכל** n **טבעי.**

$$(n=1)\quad a_2=3a_1-2=3\cdot12-2=34\quad\rightarrow\boxed{a_2=34}$$

$$(n=2)\quad a_3=3a_2-2=3\cdot34-2=100\quad\rightarrow\boxed{a_3=100}$$

תשובה: $a_2=34$ **,** $a_3=100$ **.**

ב. נתונים המספרים: a_1-2 , a_2-4 , a_3-x **.**

בהתאם לתוצאות מסעיף א, המספרים הם: 10 **,** 30 **,** $100-x$ **.**

בסדרה חשבונית, ההפרש בין כל שני איברים הוא קבוע (למשל, $a_3-a_2=a_2-a_1$ **),**

כאשר האיבר האמצעי הוא ממוצע חשבוני של שני האיברים הנמצאים "סימטרית" אליו (למשל, $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$**).**

$$30=\frac{100-x+10}{2}$$

$$60=110-x$$

$$\boxed{x=50}$$

מכאן, כיוון שנתון שאלו שלושה איברים בסדרה חשבונית <u>עולה</u>, הרי שהסדרה היא $10\,,30\,,50....$ **.**

תשובה: עבור $x=50$ **, המספרים הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית עולה.**

ג. בסדרה החשבונית 40 **איברים, נחשב את סכום האיברים במקומות הזוגיים.**

נזכור שבסדרה $10\,,30\,,50....$**, שמצאנו בסעיף ב,** $b_1=10\,,d=20$ **.**

	האיברים במקומות הזוגיים
A_1	$b_2=30$
D	$b_{n+2}-b_n=b_n+2d_b-b_n=2d_b=40$
N	20

$$S_{20even}=\frac{20\cdot[2\cdot30+40\cdot(20-1)]}{2}$$

$$S_{20even}=10\cdot(60+40\cdot19)$$

$$\boxed{S_{20even}=8,200}$$

תשובה: סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $8,200$**.**

א. (1) נבטא את $\sphericalangle DCB$ **באמצעות** α.

1. $ABCD$ **טרפז ישר זווית** **2.** $AB \perp AD$ **3.** $AB \parallel DC$

4. $\sphericalangle DCB = 2\alpha$ **, ולכן** $\sphericalangle ABC = 180° - 2\alpha$ **(זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים משלימות ל-** $180°$)

תשובה: $\sphericalangle ABC = 180° - 2\alpha$ **.**

(2) נוכיח כי ΔBEC **הוא משולש ישר זווית.**

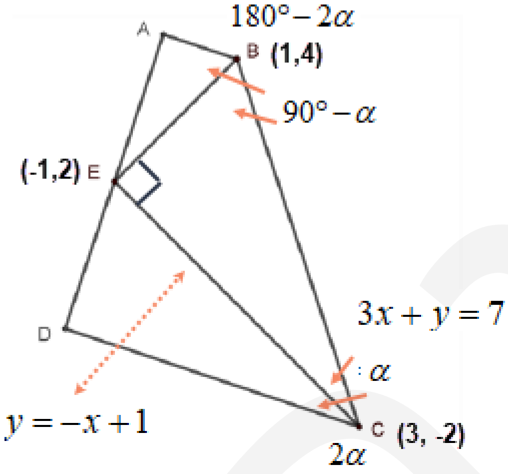
5. $\sphericalangle BCE = \sphericalangle DCE = \alpha$ **6.** $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBE = 90° - \alpha$ **(שניהם על פי הנתונים של חוצי זוויות).**

7. $\sphericalangle BEC = 90°$ **(סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔBEC**).**

תשובה: הוכחנו ש- ΔBEC **הוא משולש ישר זווית.**

ב. נתון: $B(1,4)$, $E(-1,2)$**, ומשוואת הישר** BC **היא** $3x + y = 7$.

(1) $BE \perp EC$**, לכן** $m_{BE} \cdot m_{EC} = -1$ **(שיפועים הופכיים ונגדיים).**



$$m_{BE} = \frac{4-2}{1+1} = 1 \quad \rightarrow m_{EC} = -1$$

$$m_{EC} = -1, \quad E(-1,2)$$

$$y - 2 = -1(x+1)$$

$$y - 2 = -x - 1$$

$$\boxed{y = -x + 1}$$

תשובה: משוואת הישר EC **היא** $y = -x + 1$.

(2) נקודה C **נמצאת הן על הישר** EC **והן על הישר** BC.

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

$$3x - x + 1 = 7$$

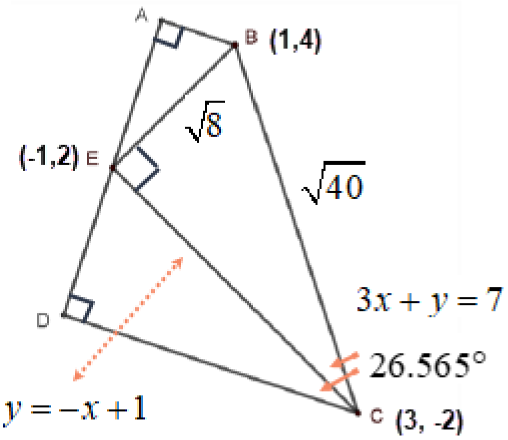
$$2x = 6 \quad /:2$$

$$x = 3$$

$$y = -3 + 1 = -2 \quad \rightarrow \boxed{C(3,-2)}$$

תשובה: $C(3,-2)$.

ג. ונעבור לשילוב של אנליטית וטריגונומטריה.



(1) $BE \perp EC$ **,** ΔBEC **הוא משולש ישר זווית.**

$$BC=\sqrt{(1-3)^2+(4+2)^2}=\sqrt{40}$$

$$BE=\sqrt{(1+1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{8}$$

$$\sin\sphericalangle ECB=\frac{BE}{BC}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{40}}$$

$$\boxed{\sphericalangle ECB=26.565°}$$

תשובה: $\sphericalangle ECB=26.565°$.

(2) ומכיוון ו- $\alpha=26.565°$ **, ניתן למצוא את זוויות הטרפז.**

$$\alpha=26.565° \quad \rightarrow \boxed{\sphericalangle C=53.13°} \quad \rightarrow \boxed{\sphericalangle B=126.87°}$$

תשובה: $\sphericalangle C=53.13°$, $\sphericalangle B=126.87°$, $\sphericalangle A=\sphericalangle D=90°$.

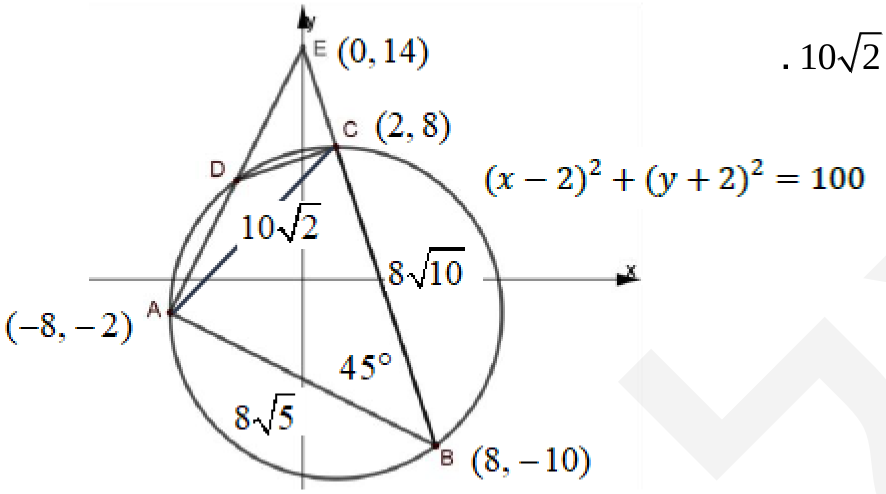
א **מרובע** ABCD **חסום במעגל שמשוואתו** $(x-2)^2+(y+2)^2=100$,

ולכן מרכז המעגל הוא $M(2,-2)$ **ורדיוסו** 10 .

נתון: $A(-8,-2)$, $B(8,-10)$, $C(2,8)$, $E(0,14)$.

(1) $AC=\sqrt{(2+8)^2+(8+2)^2}=10\sqrt{2}$.

תשובה: אורך האלכסון AC **הוא** $10\sqrt{2}$.



(2) ΔABC **על פי משפט הסינוסים.**

$$\frac{AC}{\sin\sphericalangle ABC}=2R$$

$$\frac{10\sqrt{2}}{2\cdot 10}=\sin\sphericalangle ABC$$

$$\boxed{\sphericalangle ABC=45°}$$

הסבר חשוב: $\sphericalangle ABC<90°$ **כי** $x_M=x_C=2$, **ו-** $y_M>y_B$

אז מרכז המעגל החוסם נמצא בתוך ΔABC, **והמשולש חד-זווית.**

<u>פתרון חלופי</u>: על-פי שיעורי מרכז המעגל $M(2,-2)$, **מתקבל** $\sphericalangle AMC=90°$, **ולכן** $\sphericalangle ABC=45°$,

כי זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת (AC) .

תשובה: $\sphericalangle ABC=45°$.

(3) נחשב את שטח ΔABE .

$$BE=\sqrt{(8-0)^2+(-10-14)^2}=8\sqrt{10}$$

$$BA=\sqrt{(8+8)^2+(-10+2)^2}=8\sqrt{5}$$

$$S_{\Delta ABE}=\frac{BE\cdot BA\cdot\sin\sphericalangle ABC}{2}=\frac{8\sqrt{10}\cdot 8\sqrt{5}\cdot\sin 45°}{2}=160$$

תשובה: שטח ΔABE **הוא** 160 **יח"ר.**

ב. נראה כי המשולשים ABE **ו-** CDE **דומים.**

$\sphericalangle E = \sphericalangle E$ **(זווית משותפת) (ז)**

$\sphericalangle ECA + \sphericalangle BCD = 180°$ **(זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$**)**

$\sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB = 180°$ **(זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל-** $180°$**)**

$\sphericalangle ECD = \sphericalangle \sphericalangle DAB$ **(הצבה) (ז)**

$\Delta CDE \sim \Delta ABE$ **(משפט דמיון זווית זווית)**

תשובה: הוכחנו שהמשולשים ABE **ו-** CDE **דומים.**

ג. (1) נמצא את יחס הדמיון בין המשולשים.

$\frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AE} = \frac{DE}{BE}$ **(יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים)**

$$CE = \sqrt{(2-0)^2 + (8-14)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$AE = \sqrt{(-8-0)^2 + (-2-14)^2} = 8\sqrt{5}$$

ובהתאם, יחס הדמיון הוא : $\frac{CE}{AE} = \frac{2\sqrt{10}}{8\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

תשובה: יחס הדמיון הוא $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(2) נחשב את שטח ΔCDE.

$\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABE}} = (\frac{CE}{AE})^2 = (\frac{2\sqrt{10}}{8\sqrt{5}})^2 = (\frac{\sqrt{2}}{4})^2$ **(יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון)**

$$\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABE}} = (\frac{\sqrt{2}}{4})^2 = \frac{1}{8}$$

$$S_{\Delta CDE} = 160 \cdot \frac{1}{8}$$

$$\boxed{S_{\Delta CDE} = 20}$$

תשובה: שטח ΔCDE **הוא** 20 **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2x^2-2x-4$ **, המוגדרת לכל** x .

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, ונקבל** $(0,-4)$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

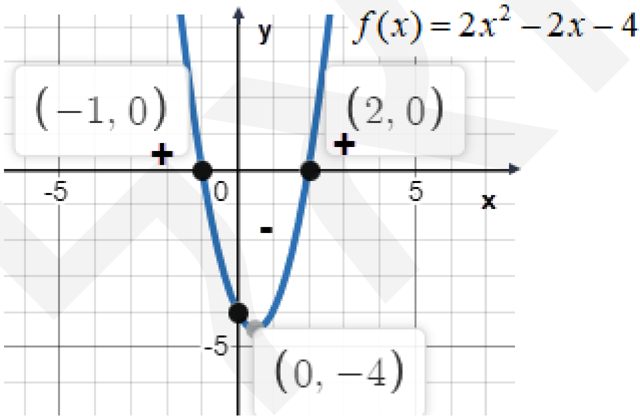
$$0=2x^2-2x-4$$

$$x=2 \quad (2,0)$$

$$x=-1 \quad (-1,0)$$

תשובה: $(0,-4)$, $(2,0)$, $(-1,0)$.

(2) סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה



תשובה: הסרטוט מעל.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{f(x)}$ **, פונקציה אי-שלילית.**

(1) בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי, כלומר $f(x)\ge 0$ **, והתשובה מהסקיצה שבסעיף ב .**

תשובה: $x\ge 2$ **או** $x\le -1$.

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **שאינו בתחום ההגדרה.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ובהתאם, כאשר** $f(x)=0$: $(2,0)$, $(-1,0)$.

תשובה: $(2,0)$, $(-1,0)$.

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה.

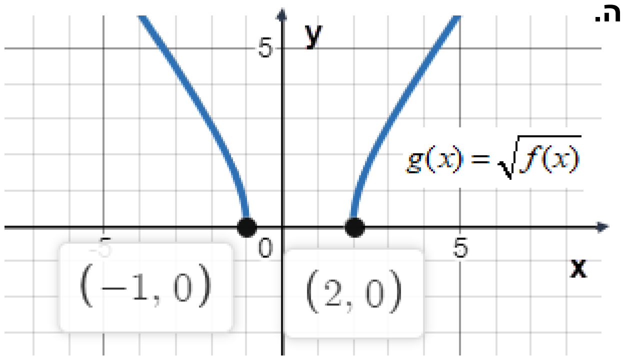
$$\boxed{g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}$$

תחומי העלייה והירידה נשארים זהים, במגבלות תחום ההגדרה, $x\ge 2$ **או** $x\le -1$.

ומתקבלות שתי נקודות קיצון, בקצוות, נקודות האפס.

תשובה: עלייה- $x>2$ **, ירידה-** $x<-1$ **,** $(2,0)$ **מינימום ,** $(-1,0)$ **מינימום .**

(4) ציור סקיצה של גרף הפונקציה.



<u>**דרך פתרון חלופית**</u>

הפונקציה $f(x)=2x^2-2x-4$ **היא בעלת גרף של פרבולת מינימום,**

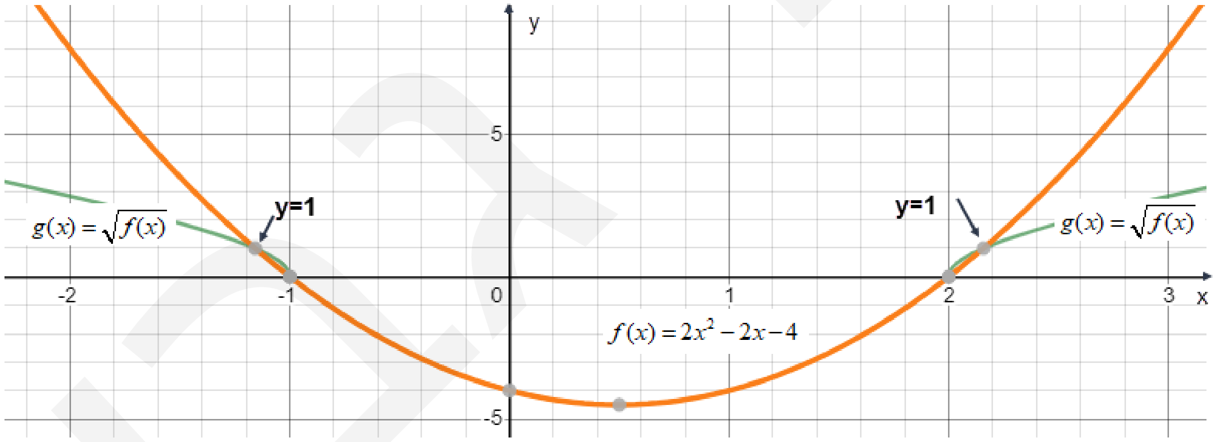
החותך את ציר ה- x **בנקודות** $(2,0)$ **,** $(-1,0)$ **(בסרטוט גרף אדום).**

גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt{f(x)}$ **מתקבלת ישירות מגרף זה,**

כאשר אינו עובר מתחת לציר ה- x **, עקב תחום ההגדרה והעובדה ש-** $\sqrt{f(x)}$ **הוא ביטוי אי-שלילי,**

וחותך את גרף הפרבולה בנקודות ששיעור ה- y **בהן הוא 1, כי אז** $\sqrt{1}=1$ **.**

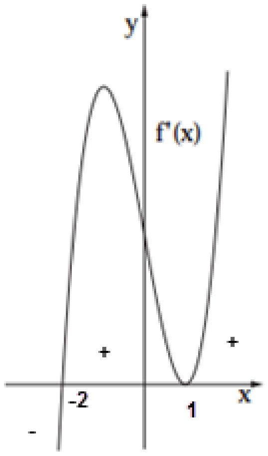
כאשר $0<y<1$ **מתקבל** $\sqrt{y}>y$ **וכאשר** $y>1$ **מתקבל** $\sqrt{y}<y$ **ולכן הגרף (הירוק) נראה כך.**

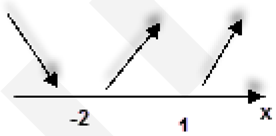


א. בציור מתואר גרף הנגזרת, ונקודות האפס שלה .

על פי תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית הנגזרת,

ניתן לקבוע את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה, המוגדרת לכל x **.**





כאשר $x=-2$ **הוא נקודת מינימום, ו-** $x=1$ **הוא נקודת פיתול.**

תשובה: $x>-2$ **עלייה ,** $x<-2$ **ירידה.**

(2) $x=-2$ **הוא נקודת מינימום.**

(3) נתון כי פונקציית הנגזרת היא $f'(x)=4x^3-12x+8$ **.**

$y=-10$ **בנקודת הקיצון, כלומר שיעורי נקודת הקיצון (מינימום) הם** $(-2,-10)$ **.**

נמצא את הפונקציה הקדומה,

כאשר הצבת שיעורי נקודת הקיצון $(-2,-10)$ **תאפשר למצוא את קבוע האינטגרציה.**

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$f(x)=\int(4x^3-12x+8)\,dx$$

$$f(x)=\frac{4x^4}{4}-\frac{12x^2}{2}+8x+c$$

$$-10=(-2)^4-6(-2)^2+8(-2)+c$$

$$14=c$$

$$\boxed{f(x)=x^4-6x^2+8x+14}$$

תשובה: $f(x)=x^4-6x^2+8x+14$

ב. שיפוע המשיק הוא אפס בנקודות בהן התאפסה הנגזרת, כלומר עבור $x=-2$ **ו-** $x=1$ **.**

$f(-2)=-10$ **, על פי הנתון.**

$$f(1)=1^4-6\cdot1^2+8\cdot1+14=17$$

תשובה: $(-2,-10)$ **,** $(1,17)$ **.**

בגרות פ פברואר 20 דוגמה 1 משרד החינוך שאלון 35471
זהה לבגרות עת יולי 18 מועד קיץ ב שאלון 35481

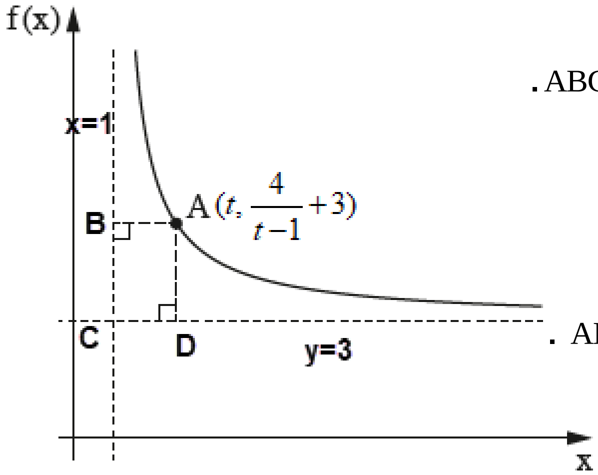
א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4}{x-1}+3$ **והגרף שלה.**

$x=1$ **מאפס את מכנה במחובר השמאלי, ולא את המונה, לכן הישר** $x=1$ **אסימפטוטה המאונכת לציר ה-** x **.**

כאשר $x\to\infty$ **המחובר השמאלי שואף ל-** 0**, ולכן** $f(x)\to 0+3=3$ **,**

ו- $y=3$ **אסימפטוטה המאונכת לציר ה-** y **.**

תשובה: $x=1$ **,** $y=3$ **.**



ב. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *היקף המלבן* ABCD.

נסמן $A(t,\frac{4}{t-1}+3)$ **נקודה על גרף הפונקציה, ברביע הראשון.**

AB **מקביל לציר ה-** x **, ולכן** $AB=x_A-x_B=t-1$ **.**

AD **מקביל לציר ה-** y **, ולכן** $AD=y_A-y_D=\frac{4}{t-1}+3-3=\frac{4}{t-1}$ **.**

$$P_{ABCD}=2AB+2AD$$

$$P_{ABCD}=2(t-1)+2(\frac{4}{t-1})$$

$$\boxed{P_{ABCD}=2t-2+\frac{8}{t-1}}$$

$$\boxed{P'=2-\frac{8}{(t-1)^2}}$$

$$0=2-\frac{8}{(t-1)^2}$$

$$\frac{8}{(t-1)^2}=2$$

$$4=(t-1)^2$$

$$2=t-1\ \to \boxed{t=3}\qquad -2=t-1\ \to \cancel{t=-1}\ \leftarrow t>1$$

$$P'(2)=-6<0\,,\,P'(4)=\frac{10}{9}>0\ \to Min$$

$$f(2)=\frac{4}{3-1}+3=5\ \to \boxed{A(3,5)}$$

תשובה: $A(3,5)$ **, עבורה היקף המלבן מינימלי.**

ב. $AB=3-1=2$ **,** $AD=5-3=2$ **, ושטח מלבן (למעשה, התקבל ריבוע) הוא** $2\cdot 2=4$ **.**

תשובה: שטח המלבן, שהיקפו מינימלי, הוא 4 **יח"ר.**