יואל גבע
לא מתפשרים.

שאלון 35572 מועד
חורף תשפ״ב

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35572 מועד חורף תשפ״ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. הנקודה $(t,0)$ **היא מוקד של פרבולה קנונית, מכאן ש** $p=2t$ **ומשוואת הפרבולה היא** $y^2=4tx$ **.**

$t>0$ **, ולכן גרף הפרבולה עובר ברביע הראשון והרביעי, וכמובן בראשית הצירים.**

הנקודה $(t,0)$ **היא גם מוקד של אליפסה, המוקד הימני, ולכן** $c=t$ **.**

כיוון שהמוקדים $(\pm t,0)$ **מונחים על ציר ה-** x **, אז** $a>b$ **ו-** $c^2=a^2-b^2$ **.**

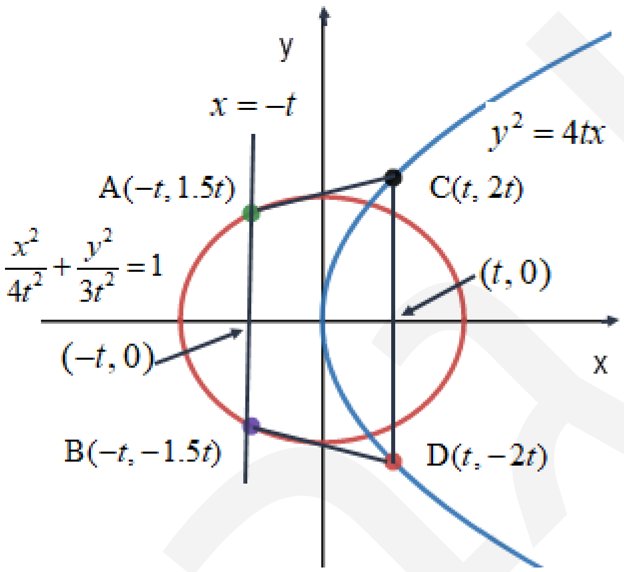
אורך הציר הראשי של האליפסה הוא $4t$ **, ומכאן ש-** $4t=2a\rightarrow a=2t$

$$b^2=a^2-c^2=(2t)^2-t^2=4t^2-t^2=3t^2$$

תשובה: משוואת הפרבולה היא $y^2=4tx$ **, משוואת האליפסה היא** $\frac{x^2}{4t^2}+\frac{y^2}{3t^2}=1$**.**

ב. המדריך של הפרבולה הוא $x=-t\leftarrow$ $x=-\frac{p}{2}$ **.**

נציב $x=-t$ **במשוואת האליפסה.**



$$\frac{(-t)^2}{4t^2}+\frac{y^2}{3t^2}=1$$

$$\frac{\cancel{t^2}^{1}}{4\cancel{t^2}}+\frac{y^2}{3t^2}=1$$

$$\frac{y^2}{3t^2}=\frac{3}{4}$$

$$y^2=\frac{9}{4}t^2$$

$$y=\pm\frac{3}{2}t$$

$$y_A>y_B\rightarrow\begin{cases}\boxed{A(-t,1.5t)}\\\boxed{B(-t,-1.5t)}\end{cases}$$

תשובה: $A(-t,1.5t)$ **,** $B(-t,-1.5t)$ **.**

ג. משוואת הישר העובר במוקד, ומאונך לציר ה- x **, היא** $x=t$ **.**

נציב $x=t$ **במשוואת הפרבולה.**

$$y^2=4t\cdot t$$

$$y^2=4t^2$$

$$y=\pm 2t$$

$$y_C>y_D\rightarrow\begin{cases}\boxed{C(t,2t)}\\\boxed{D(t,-2t)}\end{cases}$$

תשובה: $C(t,2t)$ **,** $D(t,-2t)$ **.**

ד. **(1)** $AB \parallel DC$ כי שניהם מאונכים לציר ה- x .

$AC \nparallel BD$, כי ישר אחד עולה והשני יורד.

שתי הצורות, הפרבולה והאליפסה, סימטריות לציר ה- x , ולכן $AC = BD$.

ניתן גם להראות על ידי חישוב:

$$\left.\begin{aligned} AC &= \sqrt{(t-(-t))^2+(2t-1.5t)^2} = \sqrt{4.25t^2} \\ BD &= \sqrt{(t-(-t))^2+(-2t-(-1.5t))^2} = \sqrt{4.25t^2} \end{aligned}\right\} AC = BD$$

מכאן ש- $ACDB$ טרפז שווה שוקיים.

זוויות בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים, וזוויות שעל השוקיים משלימות ל- 180° ,

מכאן שסכום זוויות נגדיות הוא - 180° , ולכן הטרפז בר חסימה.

תשובה: הוכחנו שהנקודות A , B, C ו- D נמצאות על מעגל אחד.

(2) נמצא את שיעורי מרכז המעגל החוסם, שהוא מפגש אנכים אמצעיים.

לאור הסימטריה לציר ה- x , הרי שציר זה הוא אנך אמצעי לבסיסי הטרפז,

ובהתאם מרכז המעגל הוא $M(a,0)$.

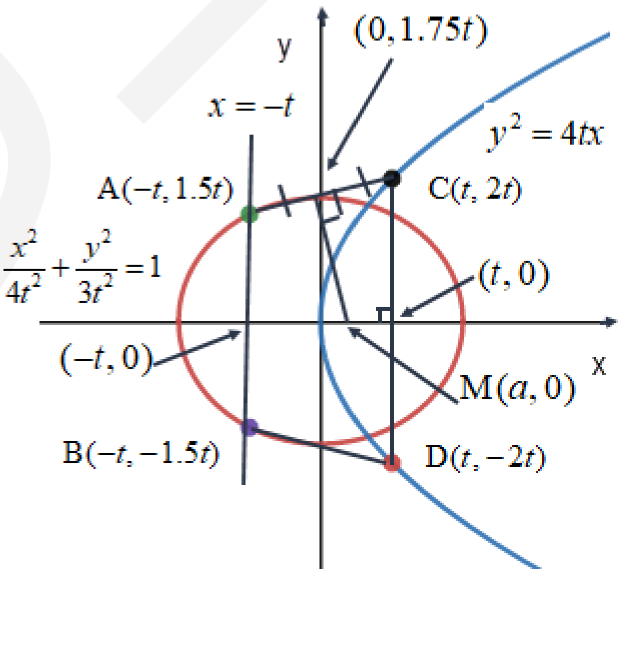
אמצע הצלע AC הוא $(0,1.75t)$.

$m_{AC} = \frac{2t-1.5t}{t-(-t)} = \frac{0.5t}{2t} = \frac{1}{4}$, ובהתאם שיפוע האנך האמצעי הוא (-4) (שיפוע הופכי לנגדי) .

$$-4 = \frac{1.75t-0}{0-a} \quad \rightarrow 4a = 1.75t$$

$$\boxed{a = \frac{7t}{16}}$$

תשובה: שיעורי מרכז המעגל החוסם הם $(\frac{7t}{16}, 0)$.



א. נתון המישור $\pi_1: z-3=0$ **, כלומר** $\pi_1: z=3$ **, שהוא מישור המקביל למישור** $[x, y]$ **.**

נתון המישור $\pi_2: ay+z-8=0$ **, המקביל לציר ה-** x **,**

כי שיעור ה- x **בווקטור המקדמים של המישור** $\underline{n}=(0, a, 1)$ **הוא** 0 **.**

הזווית בין המישורים היא $\measuredangle(\pi_1, \pi_2)=45°$ **.**

$$\cos 45° = \frac{|(0,0,1)(0,a,1)|}{|(0,0,1)||(0,a,1)|}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{0+0+1}{\sqrt{0+0+1}\sqrt{0+a^2+1}}$$

$$0.5(a^2+1)=1 \quad \rightarrow a^2+1=2$$

$$a^2=1 \quad \rightarrow \boxed{a=-1,1}$$

תשובה: $a=-1,1$ **.**

ב. הנקודה $A(2,-2,6)$ **נמצאת על אחד מהמישורים.**

כיוון ש- $z_A \neq 3$ **, הרי שהנקודה אינה על מישור** π_1 **, אלא על מישור** π_2 **.**

$$a\cdot(-2)+6-8=0$$

$$-2a=2$$

$$\boxed{a=-1}$$

ומשוואת המישור היא $\pi_2: -y+z-8=0$

מהנקודה $A(2,-2,6)$ **הורידו אנך למישור** $\pi_1: z=3$ **, המקביל למישור** $[x, y]$**.**

לכן, אורך האנך הוא הערך המוחלט של הפרש שיעורי ה- z **:** $AB=|6-3|=3$ **.**

תשובה: $AB=3$ **.**

ג. נמצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך ℓ **, שבין שני המישורים** π_1 **ו-** π_2 **.**

$$\begin{cases} \pi_1: z=3 \\ \pi_2: -y+z-8=0 \end{cases}$$

$$-y+3-8=0$$

$$y=-5$$

שיעור ה- z **על ישר החיתוך קבוע גם (** $z=3$ **), כך שנקודה אופיינית על ישר החיתוך היא** $(t,-5,3)$ **.**

תשובה: ההצגה הפרמטרית של ישר החיתוך, שבין שני המישורים π_1 **ו-** π_2 **,**

היא $\ell: \underline{x}=(0,-5,3)+t(1,0,0)$ **.**

ד. מן הנקודה B **העבירו אנך לישר** ℓ**. האנך חותך את הישר** ℓ **בנקודה** C **.**

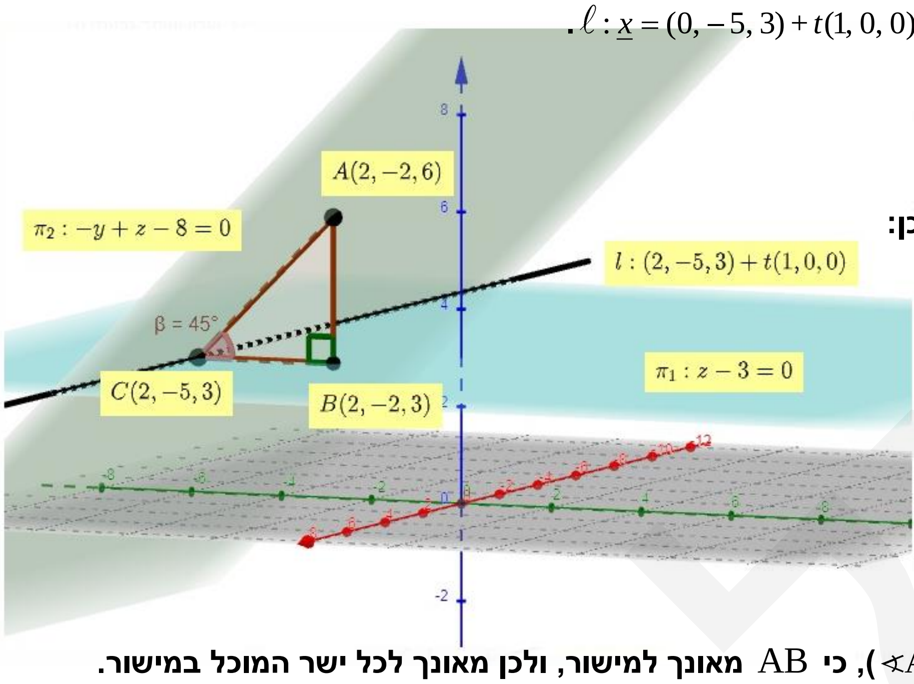
כיוון שהנורמל למישור $\pi_1 : z = 3$ **הוא** $\underline{x} = (0, 0, 1)$ **,**

הרי ששיעורי הנקודה B **, הנמצאת על האנך למישור מהנקודה** $A(2, -2, 6)$ **, הם** $B(2, -2, 3)$**.**

נציג שלוש דרכים למציאת שטח משולש ABC **.**

<u>דרך ראשונה</u>

$C(c, -5, 3)$ **נקודה על ישר החיתוך** $\ell : \underline{x} = (0, -5, 3) + t(1, 0, 0)$**.**



$B(2, -2, 3)$

$$\overrightarrow{BC} = \underline{C} - \underline{B} = \underline{x} : (c - 2, -3, 0)$$

$\overrightarrow{BC}$ **מאונך כמובן לישר החיתוך, ולכן:**

$$(c - 2, 3, 0)(1, 0, 0) = 0$$
$$c - 2 + 0 + 0 = 0$$
$$\boxed{c = 2}$$
$$\boxed{C(2, -5, 3)}$$
$$\boxed{\overrightarrow{BC} = (0, 3, 0)}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3$$

משולש ABC **ישר זווית (** $\sphericalangle ABC = 90°$**), כי** AB **מאונך למישור, ולכן מאונך לכל ישר המוכל במישור.**

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4.5$$

תשובה: שטח משולש ABC **הוא** 4.5 **יח"ר.**

<u>דרך שנייה</u>

$C(c, -5, 3)$ **נקודה על ישר החיתוך** $\ell : \underline{x} = (0, -5, 3) + t(1, 0, 0)$**.**

$B(2, -2, 3)$**.**

כיוון ששתי הנקודות נמצאות על המישור $z = 3$ **,**

וישר החיתוך, שנמצא במישור זה, מקביל לציר ה- x**,**

הרי שהמרחק בין שתי הנקודות הוא הערך המוחלט של הפרשי ה- y

$$BC = |-5 - (-2)| = 3$$

משולש ABC **ישר זווית (** $\sphericalangle ABC = 90°$**), כי** AB **מאונך למישור, ולכן מאונך לכל ישר המוכל במישור.**

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4.5$$

תשובה: שטח משולש ABC **הוא** 4.5 **יח"ר.**

<u>דרך שלישית</u>

C נמצאת על ℓ - ישר החיתוך בין שני המישורים.

$AB \perp \pi_1$

AC הוא משופע למישור π_1.

BC הוא ההיטל, למישור π_1, של המשופע AC.

$BC \perp \ell$, ונמצא במישור π_1.

לכן, על פי משפט שלושת האנכים, גם המשופע AC מאונך לישר החיתוך ℓ.

(אם ישר ℓ מאונך להיטל של משופע AC למישור π_1, אז הישר ℓ מאונך גם למשופע)

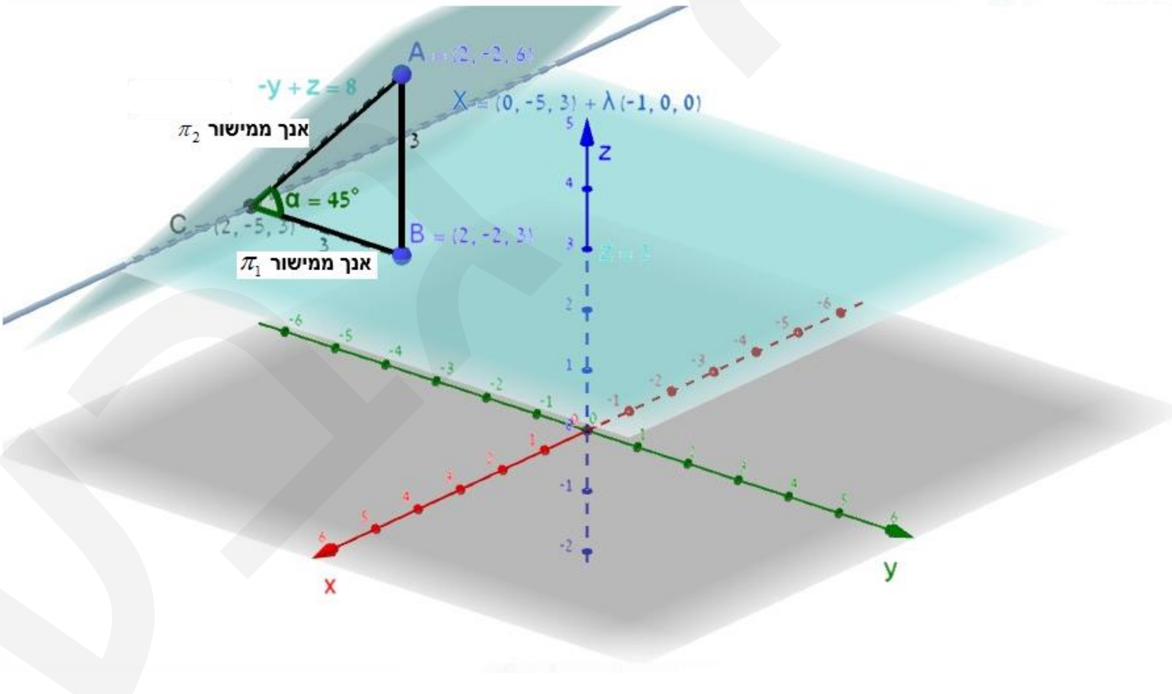
נקבל ש- $\sphericalangle ACB = 45°$, כי היא הזווית שבין המישורים $\sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = 45°$,

הזווית שבין שני אנכים לישר החיתוך: BC אנך ממישור π_1 ו- AC הוא האנך ממישור π_2 .

מכאן שמשולש ABC ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90°$), וגם שווה שוקיים ו- $BC = AB = 3$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4.5$$

תשובה: שטח משולש ABC הוא 4.5 יח"ר.



א. נתונים שני מספרים מרוכבים .

נתון: $z_1=(2a^2+5a+4)+(2a^2+3a+2)i$ **,** **ו-** $z_2=(a^2+8a+8)+(2-a^2+2a)i$ **(** a **פרמטר ממשי).**

שני המספרים צמודים זה לזה, אם החלקים הממשיים שלהם שווים, והחלקים המדומים שלהם שוני סימן.

- $\mathrm{R}: \quad 2a^2+5a+4=a^2+8a+8$

$$a^2-3a-4=0$$
$$(a-4)(a+1)=0$$
$$a=4\,,\,a=-1$$

- $\mathrm{I}: \quad 2a^2+3a+2=-(2-a^2+2a)$

$$2a^2+3a+2=-2+a^2-2a$$
$$a^2+5a+4=0$$
$$(a+4)(a+1)=0$$
$$a=-4\,,\,a=-1$$

- **והפתרון שמקיים את שתי המשוואות הוא** $a=-1$ **.**

תשובה: $a=-1$ **, בעבורו המספרים** z_1 **ו-** z_2 **צמודים זה לזה.**

ב. נציב $a=-1$ **והמספרים המרוכבים הם:** $z_1=1+i$ **,** **ו-** $z_2=1-i$ **.**

נתונים המספרים $w_1=(\frac{z_1}{\sqrt{2}})^{4n}$ **ו-** $w_2=(\frac{z_2}{\sqrt{2}})^{4n+2}$ **(** n **הוא מספר טבעי).**

(1) נוכיח כי לכל n **טבעי: המספר** $w_1=(\frac{z_1}{\sqrt{2}})^{4n}$ **הוא מספר ממשי.**

כידוע $(1+i)^2=2i$ **, ולכן** $(1+i)^4=-4$ **.**

$$w_1=(\frac{z_1}{\sqrt{2}})^{4n}$$
$$w_1=\frac{z_1^{4n}}{\sqrt{2}^{4n}}=\frac{(z_1^{\,4})^n}{(\sqrt{2}^4)^n}$$
$$w_1=\frac{(-4)^n}{(4)^n}=(\frac{-4}{4})^n$$
$$w_1=(-1)^n$$

מכאן ש- w_1 **הוא מספר ממשי, ושווה ל** (-1) **עבור** n **אי-זוגי, או** 1 **עבור** n **זוגי.**

תשובה: הוכחנו כי w_1 **הוא מספר ממשי לכל** n **טבעי.**

(2) נוכיח כי לכל n טבעי: המספר $w_2 = (\frac{z_2}{\sqrt{2}})^{4n+2}$ הוא מספר ממשי.

כידוע $(1-i)^2 = -2i$ **, ולכן** $(1-i)^4 = -4$ **.**

$$w_2 = (\frac{z_2}{\sqrt{2}})^{4n+2}$$

$$w_2 = \frac{{z_2}^{4n}}{\sqrt{2}^{4n}} \cdot \frac{{z_2}^{2}}{\sqrt{2}^{2}} = \frac{({z_2}^4)^n}{(\sqrt{2}^4)^n} \cdot \frac{-2i}{2}$$

$$w_2 = \frac{(-4)^n}{(4)^n} \cdot \frac{-2i}{2} = (-1)^n \cdot \frac{-2i}{2}$$

$$w_2 = (-1)^{n+1} \cdot i$$

מכאן ש- w_2 **הוא מספר מדומה טהור, ושווה ל** i **עבור** n **אי-זוגי, או** $(-i)$ **עבור** n **זוגי.**

תשובה: הוכחנו כי w_2 **הוא מספר מדומה טהור לכל** n **טבעי.**

ג. נתונה המשוואה: $|z-p| = m$ **. (** p **ו-** m **ממשיים,** z **הוא מספר מרוכב.**

על פי סעיף ב, w_1 **ו-** w_2 **הם המספרים** 1 **,** i **,** -1 **ו-** $(-i)$ **, לכל** n **טבעי,**

ולכן נמצאים על מעגל היחידה, המעגל הקנוני $x^2 + y^2 = 1$ **.**

מכאן שכולם במרחק של 1 **מהראשית, כאשר** $|w_1| = |w_2| = 1$**.**

בהתאם, עבור $p = 0$ **ו-** $m = 1$ **נקבל** $|z| = 1$**,**

כאשר המשוואה הנתונה מייצגת מעגל במישור גאוס,

שעליו נמצאים המספרים w_1 **ו-** w_2 **לכל** n **טבעי.**

תשובה: $p = 0$ **,** $m = 1$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=-\frac{e^{2x}-3e^{x}+m}{4}$.

(1) תשובה: תחום ההגדרה של $f(x)$ **הוא כל** x .

(2) ידוע כי הישר $y=-1$ **הוא אסימפטוטה של הפונקציה** $f(x)$.

עבור $x\to-\infty$ **הביטויים** e^{2x}, e^{x} **שואפים ל-** 0 **ולכן** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{0-3\cdot 0+m}{4}=\frac{m}{4}$

$\frac{m}{4}=-1 \quad \to m=-4$.

תשובה: $m=-4$.

נציב $m=-4$ **, ונקבל** $f(x)=\frac{e^{2x}-3e^{x}-4}{4}$.

(3) נמצא את נקודות החיתוך של $f(x)$ **עם הצירים.**

$f(0)=\frac{e^{2\cdot 0}-3\cdot e^{0}-4}{4}=\frac{1-3-4}{4}=-1.5 \quad \to \boxed{(0,-1.5)}$.

$$0=\frac{e^{2x}-3e^{x}-4}{4}$$
$$0=e^{2x}-3e^{x}-4$$
$$0=(e^{x}-4)(e^{x}+1)$$
$$x=\ell n\,4 \quad \to \boxed{(\ell n\,4,0)}$$
$$e^{x}+1>0$$

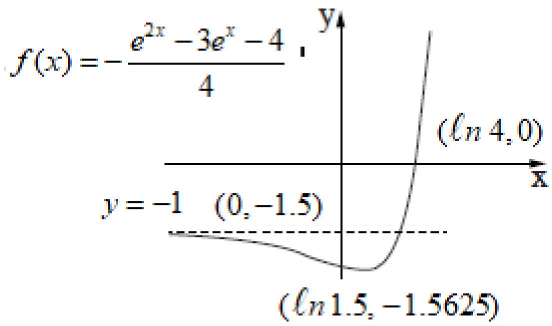
תשובה: נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים הן:** $(0,-1.5)$, $(\ell n\,4,0)$.

(4) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגן.**

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{4}\cdot(2e^{2x}-3e^{x})}$$
$$0=e^{x}(2e^{x}-3)$$
$$e^{x}=1.5 \quad \to x=\ell n\,1.5$$
$$\boxed{f''(x)=\frac{1}{4}\cdot(4e^{2x}-3e^{x})}$$
$$f''(\ell n\,1.5)=1.125>0 \quad \to \boxed{(\ell n\,1.5,-1.5625),\min}$$

תשובה: נקודת הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ **היא** $(\ell n\,1.5,-1.5625)$ **, מינימום.**

ב. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}+1$.

(1) תחום ההגדרה של $g(x)$ **מתבסס על תחום ההגדרה של** $f(x)$ **שהוא כל** x **,**

כאשר $f(x)\neq 0$ **כי אחרת המכנה של** $g(x)$ **יתאפס.**

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ **הוא** $x\neq \ell n\,4$.

(2) במעבר ל $g(x)$ **מ-** $f(x)$ **יש שתי טרנספורמציות.**

הראשונה: $\frac{1}{f(x)}$ **שומרת על סימני הפונקציה ומחליפה תחומי עלייה/ירידה ואת סוג הקיצון.**

השנייה: $\frac{1}{f(x)}+1$ **תזוזה אנכית,** 1 **יחידה, כלפי מעלה.**

עבור $x\to-\infty$ **,** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ **ומכאן ש-** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\frac{1}{-1}+1=0$ **ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

עבור $x\to+\infty$ **,** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ **ומכאן ש-** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0+1=1$ **ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

עבור $x\to\ell n\,4$ **,** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ **ומכאן ש-** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\pm\infty$ **ו-** $x=\ell n\,4$ **אסימפטוטה אנכית.**

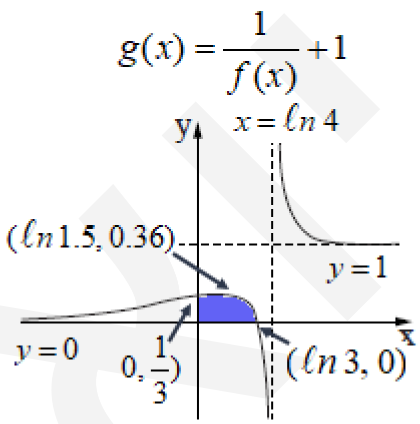
תשובה: $y=0$ **(** $x\to-\infty$ **) ,** $y=1$ **(** $x\to+\infty$ **) ,** $x=\ell n\,4$ **.**

ד. כפי שהסברנו תחומי עלייה וירידה מתחלפים, לרבות סוג הקיצון ($g'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ **).**

$g(\ell n1.5)=\frac{1}{f(\ell n1.5)}+1=\frac{1}{-1.5625}+1=0.36$ **ו-** $(\ell n1.5, 0.36)$ **מקסימום של** $g(x)$ **.**

נקודת החיתוך עם ציר ה- y **היא** $g(0)=\frac{1}{f(0)}+1=\frac{1}{-1.5}+1=\frac{1}{3} \quad \rightarrow (0,\frac{1}{3})$ **.**

בהתאם הסקיצה, כולל סימון נקודת החיתוך עם ציר ה- x **עבור סעיף ה.**



ה. נתון פרמטר t **בתחום** $0<t<\ell n4$ **.**

ערך הביטוי $\int_0^t g(x)\,dx$ **יקבל ערך מקסימלי,**

כאשר $x=t$ **יהיה בנקודת החיתוך של** $g(x)$ **עם ציר ה-** x **, כי במקרה זה הוא יהייה כל השטח הצבוע בכחול בסקיצה, ולאחר מכן יתחיל לצבור שטחים שליליים שמתחת לציר ה-** x **.**

ניתן גם להסביר זאת בכך ש$g(x)$ **היא הנגזרת של פונקציית השטח,**

ועוברת מחיוביות לשליליות בחיתוך עם ציר ה- x**,**

ומכאן שפונקציית השטח עוברת מעלייה לירידה ומתקבל מקסימום.

כיוון ש- t **מוגדר בתחום הפתוח** $0<t<\ell n4$ **, אין קיצון בקצה וזה מקסימום מוחלט.**

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}+1$$
$$0=\frac{4}{e^{2x}-3e^x-4}+1$$
$$0=4+e^{2x}-3e^x-4$$
$$3e^x=e^{2x} \quad /:e^x>0$$
$$e^x=3 \quad \rightarrow x=\ell n3$$
$$\boxed{(\ell n3, 0)}$$

תשובה: $t=\ell n3$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(\ell n\,x))^2}{(\ell n\,x))^2-1}$.

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית חיובי, ולכן $x>0$.

כמו כן מכנה שונה מאפס, לכן $x\neq\frac{1}{e},e \quad \leftarrow \ell n\,x\neq\pm1 \quad \leftarrow (\ell n\,x))^2\neq1$.

תשובה: הפונקציה $f(x)$ **מוגדרת עבור** $x\neq\frac{1}{e},e$, $x>0$.

(2) שתי האסימפטוטות האנכיות הן $x=e$ **ו-** $x=\frac{1}{e}$.

כאשר $x\to+\infty$: $f(x)\to\frac{(\ell n\,x))^2}{(\ell n\,x))^2}=1$, **ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית לימין**

כאשר $x\to0^+$, **נציב** $x=0.00001$ **ונקבל** $f(0.00001)=1.0076\to1$,

והגרף שואף לנקודה $(0,1)$ **ואין אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $x=e$, $x=\frac{1}{e}$, $y=1$ $(x\to+\infty)$.

(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

$$f(x)=\frac{(\ell n\,x))^2}{(\ell n\,x))^2-1}$$

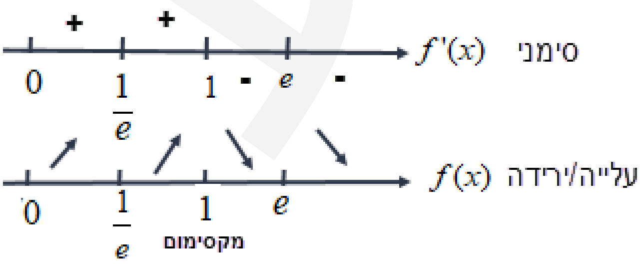
$$f'(x)=\frac{\frac{2\ell n\,x\left[(\ell n\,x))^2-1\right]}{x}-\frac{2\ell n\,x\cdot(\ell n\,x))^2}{x}}{\left[(\ell n\,x))^2-1\right]^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\ell n\,x\cdot(\left[\ell n\,x))^2-1-(\ell n\,x))^2\right]}{x\left[(\ell n\,x))^2-1\right]^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2\ell n\,x}{x\left[(\ell n\,x))^2-1\right]^2}}$$

$$-2\ell n\,x=0$$

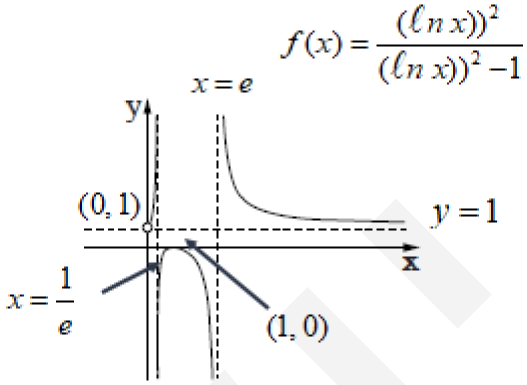
$$\ell n\,x=0 \quad \to x=1 \quad \to \boxed{(1,0),\max}$$



תשובה: עלייה: $\frac{1}{e}<x<1$, **או** $0<x<\frac{1}{e}$, **ירידה:** $x>e$ **או** $1<x<e$.

ב. על פי הניתוח שעשינו בסעיפים הקודמים, גרף ג הוא הגרף המתאים לפונקציה $f(x)$ **.**

כולל שלוש האסימפטוטות, נקודת המקסימום $(1,0)$**, נקודת ה"חור" ב-** $(0,1)$ **, ותחומי עלייה וירידה.**



תשובה: גרף ג, והשרטוט מעל.

ג. (1) $f(x)$ **אינה מוגדרת ב-** $(0,1)$ **ועבור** $x>e$ **מתקיים** $f(x)>1$ **.**

תשובה: למשוואה $f(x)=1$ **אין פתרון.**

(2) פתרון יחיד, למשוואה $f(x)=k$ **יתקיים רק בנקודת המקסימום של** $f(x)$**.**

עבור $k>1$ **, או** $k<0$**, יהיו תמיד שני פתרונות למשוואה,**

ואילו עבור $0<k\le 1$ **אין פתרון למשוואה.**

תשובה: עבור : $k=0$ **, למשוואה** $f(x)=k$ **יש פתרון יחיד.**

ד. נתונות הפונקציות $h(x)=(\ell n\,x))^2+1$ **,** $g(x)=\frac{1}{f(x)-1}$**.**

נסמן מלבן ABCD **. הנקודות** A **ו-** B **הן שתי נקודות על ציר ה-** x **,**

שבהן הפונקציה $g(x)$ **אינה מוגדרת.**

$g(x)$ **מוגדרת, כאשר** $f(x)$ **מוגדרת עבור** $x\neq\frac{1}{e},e$ **,** $x>0$**,**

ומכיוון ש$f(x)\neq 1$ **אז המכנה של** $g(x)$ **אינו מתאפס, ותחומי ההגדרה שלהן זהים.**

לכן מדובר בנקודות $(\frac{1}{e},0)$ **ו-** $(e,0)$**, כי עבור** $x=\frac{1}{e},e$ **מתקיים** $f(x)\to\pm\infty$ **ולכן** $g(x)\to 0$**.**

(עבור $x=0$ **מתקיים** $f(x)\to 1^+$ **ובהתאם** $g(x)\to+\infty$**.)**

תחום ההגדרה של $h(x)$ **הוא** $x>0$ **.**

כיוון שמדובר במלבן, ששניים מקודקודיו על ציר ה- x **, אז** $y_C=y_D=h(e)=(\ell n\,e))^2+1=2$ **.**

שטח המלבן הוא $(e-\frac{1}{e})\cdot 2=\frac{2(e^2-1)}{e}\approx 4.7$ **.**

תשובה: שטח המלבן הוא $\frac{2(e^2-1)}{e}\approx 4.7$ **.**