

# שאלון 35572 מועד חורף נבצרים תשפ"ב

מורים יקרים,  
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי  
התוכנית החדשה במתמטיקה.  
להלן השינויים:

שאלון 182 (801) שונה ל- 172  
שאלון 381 (802) שונה ל- 371  
שאלון 382 (803) שונה ל- 372  
שאלון 481 (804) שונה ל- 471  
שאלון 482 (805) שונה ל- 472  
שאלון 581 (806) שונה ל- 571  
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35572 מועד  
חורף נבצרים תשפ"ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. לאחר סרטוט הישרים  $AB \equiv 2x + y - 13 = 0$  ו-  $AC \equiv -x + 2y + 4 = 0$ ,

ולאור הנתון שראשית הצירים נמצאת בתוך  $\Delta ABC$ ,

ניתן להבין שמרכז המעגל נמצא מתחת לצלע  $AB$  (והמרחק "שלילי" ומעל לצלע  $AC$  (והמרחק "חיובי").

כל זאת, כאשר המקדם של  $y$  בשתי הצלעות חיובי.

מרכז המעגל נמצא על הישר  $y = x - 1$ , ובהתאם נסמן  $M(m, m - 1)$ .

מרכז המעגל נמצא במרחק שווה, אורך הרדיוס, משתי הצלעות.

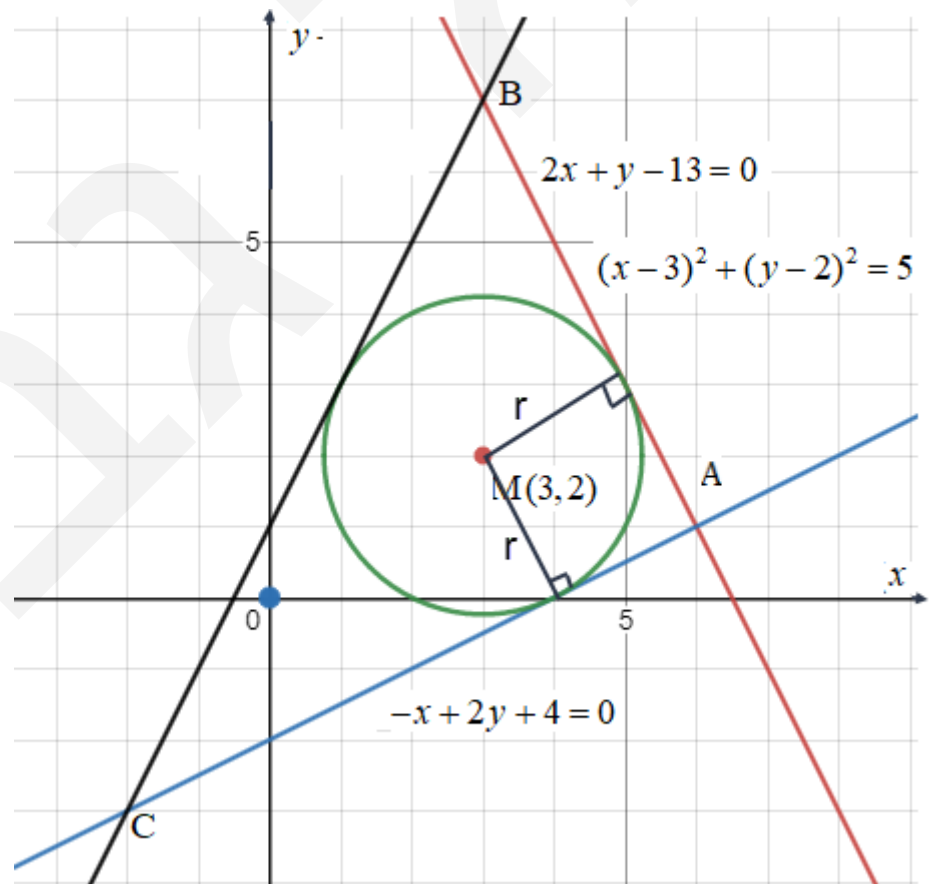
$$-\frac{2a + a - 1 - 13}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = +\frac{-a + 2(a - 1) + 4}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$-3a + 14 = a + 2$$

$$-4a = -12$$

$$a = 3 \rightarrow \boxed{M(3, 2)}$$

$$R = -\frac{2 \cdot 3 + 3 - 1 - 13}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$



תשובה: משוואת המעגל החסום ב-  $\Delta ABC$  היא  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$ .

ב. נתון כי הישר BM מאונך לציר ה- $x$ , לכן  $B(3, 7) \rightarrow x_B = x_M = 3$  (לאחר הצבה במשוואת AB).

מרכז המעגל  $M(3, 2)$  הוא מפגש חוצי זוויות,

ולכן BM הוא חוצה זווית, וכיוון שהוא מאונך לציר ה- $x$ ,

אז המשכו הוא גם גובה למשולש שמתקבל על ידי קודקוד B ונקודות החיתוך עם ציר ה- $x$ .

לכן  $\triangle BPQ$  שווה שוקיים, שבו זוויות הבסיס שוות,

ומכיוון ש- $m_{AB} = -2$  אז  $m_{BC} = 2$ .

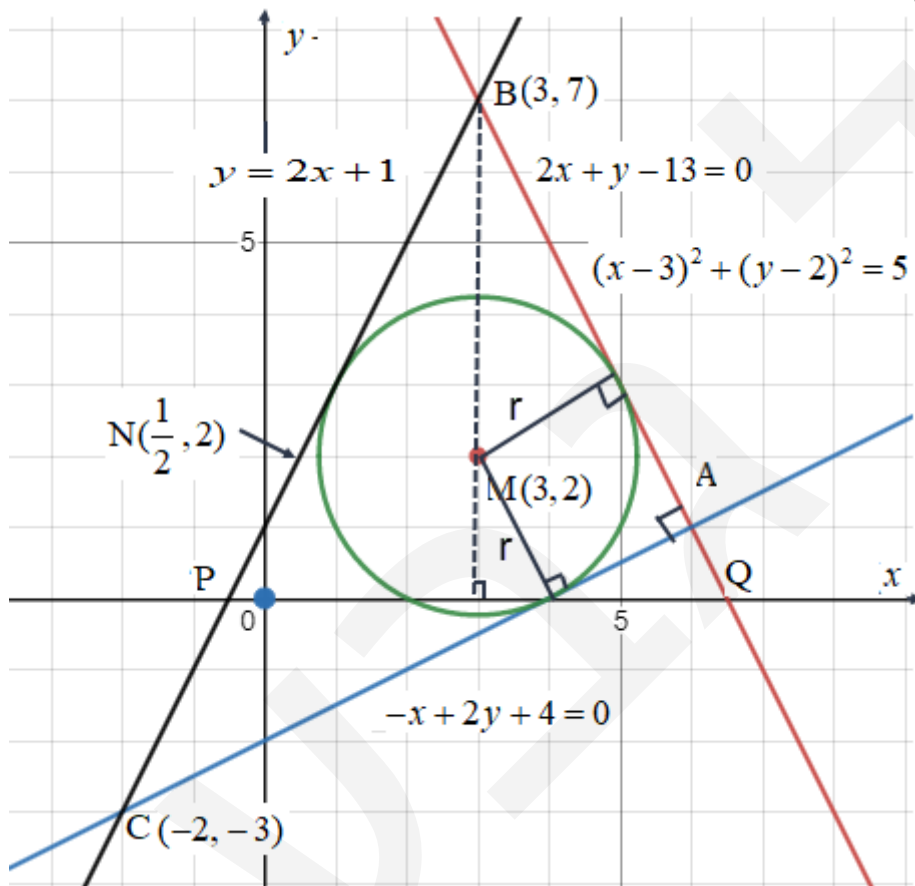
$$y - 7 = 2(x - 3)$$

$$\boxed{y = 2x + 1}$$

תשובה: משוואת הצלע BC היא  $y = 2x + 1$ .

ג. נשים לב ש- $\triangle ABC$  ישר זווית, כי  $m_{AB} \cdot m_{BC} = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$ .

מכאן, שמרכז המעגל החוסם הוא באמצע היתר BC.



$$C \begin{cases} -x + 2y + 4 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$-x + 2(2x + 1) + 4 = 0$$

$$3x = -6 \rightarrow x = -2$$

$$\boxed{C(-2, -3)}$$

נמצא את מרכז המעגל החוסם.

$$\left. \begin{aligned} x_N &= \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \\ y_N &= \frac{7-3}{2} = 2 \end{aligned} \right\} \boxed{N(\frac{1}{2}, 2)}$$

התקבל ש- $y_N = y_M = 2$ ,

ולכן המרחק בין שני מרכזי המעגלים הוא:

$$x_M - x_N = 3 - 0.5 = 2.5$$

תשובה: המרחק, בין מרכז המעגל החוסם ב- $\triangle ABC$  ובין מרכז המעגל החוסם את המשולש הזה, הוא 2.5.

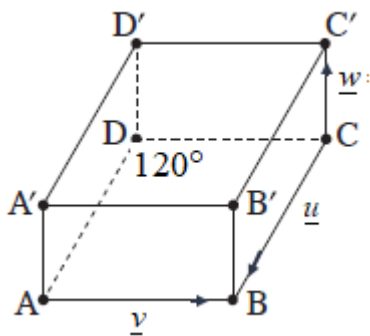
א. בסיס המנסרה הישרה הוא מעוין, שאורך צלעו 4.

הזווית שבין צלעות המעוין היא  $\angle ADC = 120^\circ$ , כלומר  $\angle(\underline{u}, \underline{v}) = 120^\circ$ .

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 120^\circ = 4 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$$

המקצועות הצדדיים מאונכים לבסיסים.

נרשום בינתיים את מה שידוע, ואת השאר נחשב בהמשך.



$$\overline{DA} = \underline{u} \quad |\underline{u}| = 4 \quad \underline{u}^2 = 16$$

$$\overline{DC} = \underline{v} \quad |\underline{v}| = 4 \quad \underline{v}^2 = 16$$

$$\overline{DD'} = \underline{w} \quad |\underline{w}| = ? \quad \underline{w}^2 = ?$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = -8$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w}$$

$$\overline{D'F} = t \overline{D'A} + \frac{1}{4} \overline{D'C}$$

$$\overline{D'F} = t(\underline{u} - \underline{w}) + \frac{1}{4}(\underline{v} - \underline{w})$$

$$\overline{D'F} = t\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \left(-t - \frac{1}{4}\right)\underline{w}$$

$$\overline{DF} = \overline{DD'} + \overline{D'F}$$

$$\overline{DF} = t\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \left(-t - \frac{1}{4}\right)\underline{w} + \underline{w}$$

$$\overline{DF} = t\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \left(-t + \frac{3}{4}\right)\underline{w}$$

תשובה:  $\overline{DF} = t\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \left(-t + \frac{3}{4}\right)\underline{w}$ .

ב.  $\overline{DF}$  מאונך למישור  $ACD'$ , לכן, למשל,  $\overline{DF} \cdot \overline{AC} = 0$ , כי  $\overline{DF}$  מאונך לכל וקטור במישור זה.

$$\overline{DF} \cdot \overline{AC} = \left(t\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \left(-t + \frac{3}{4}\right)\underline{w}\right) \cdot (-\underline{u} + \underline{v})$$

$$0 = -t\underline{u}^2 + t\underline{u}\underline{v} - \frac{1}{4}\underline{u}\underline{v} + \frac{1}{4}\underline{v}^2 \leftarrow \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

$$0 = -16t - 8t + 2 + 4 \leftarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = -8$$

$$24t = 6$$

$$t = \frac{1}{4}$$

תשובה:  $t = \frac{1}{4}$ .

ג. נחשב את אורך הגובה של המנסרה.

$\overline{DF}$  מאונך למישור  $ACD'$ , לכן, למשל,  $\overline{DF} \cdot \overline{AD}' = 0$ , כי  $\overline{DF}$  מאונך לכל וקטור במישור זה.

$$\overline{DF} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} : t = \frac{1}{4} \text{ עבור}$$

$$\overline{DA} = \underline{u} \quad |\underline{u}| = 4 \quad \underline{u}^2 = 16$$

$$\overline{DC} = \underline{v} \quad |\underline{v}| = 4 \quad \underline{v}^2 = 16$$

$$\overline{DD}' = \underline{w} \quad |\underline{w}| = 2 \quad \underline{w}^2 = 4$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = -8$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w}$$

$$\overline{DF} \cdot \overline{AD}' = \left(\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}\right) \cdot (-\underline{u} + \underline{w})$$

$$0 = -\frac{1}{4}\underline{u}^2 - \frac{1}{4}\underline{u}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}^2 \leftarrow \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

$$0 = -4 + 2 + \frac{1}{2}\underline{w}^2 \leftarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = -8$$

$$4 = \underline{w}^2$$

$$|\underline{w}| = 2$$

שטח בסיס מנסרה הוא:

$$S_{ABCD} = AD \cdot DC \cdot \sin \angle ADC$$

$$S_{ABCD} = 4 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = 8\sqrt{3}$$

נפח המנסרה שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה המנסרה.

$$V = S_{ABCD} \cdot AA'$$

$$V = 8\sqrt{3} \cdot 2 = 16\sqrt{3}$$

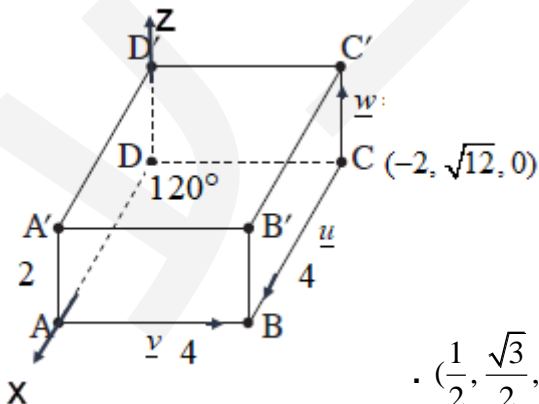
תשובה: נפח המנסרה הוא  $16\sqrt{3}$ .

ד. הנקודה D היא ראשית הצירים.

הנקודות A נמצא על החלק החיובי של ציר ה-x, לכן:  $\underline{u} = (4, 0, 0)$ .

הנקודות D' נמצא על החלק החיובי של ציר ה-z, לכן:  $\underline{w} = (0, 0, 2)$ .

$$\underline{v} = (-2, \sqrt{12}, 0) \text{ , לכן: } C = (-2, \sqrt{12}, 0)$$



$$\overline{DF} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$$

$$\overline{DF} = \frac{1}{4} \cdot (4, 0, 0) + \frac{1}{4} \cdot (-2, \sqrt{12}, 0) + \frac{1}{2} \cdot (0, 0, 2)$$

$$\overline{DF} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

$\overline{DF}$  יוצא מראשית הצירים, ולכן שיעורי הנקודה F הם  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ .

תשובה: שיעורי הנקודה F הם  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ .

א. נפתור את המשוואה  $(z+i)^2 - 2 - 2\sqrt{3}i = 0$ .

$$(z+i)^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$$

נעביר את המספר המרוכב, שבאגף ימין, להצגה קוטבית.

$$R = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{2 + 2\sqrt{3}i = 4 \operatorname{cis} 60^\circ} \leftarrow 1st \text{ quadrant}$$

$$(z+i)_k = \sqrt{4} \operatorname{cis} \frac{60^\circ + 360^\circ k}{2}$$

$$z_1 + i = 2 \operatorname{cis} 30^\circ = \sqrt{3} + i \rightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{3}}$$

$$z_2 + i = 2 \operatorname{cis} 210^\circ = -\sqrt{3} - i \rightarrow \boxed{z_2 = -\sqrt{3} - 2i}$$

תשובה: פתרונות המשוואה הם:  $\sqrt{3}$ ,  $-\sqrt{3} - 2i$ .

ב.  $a_1 < a_2$  כאשר שניהם הם החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה, שקבלנו בסעיף א.

$$\text{מכאן ש- } a_2 = \sqrt{3}, a_1 = -\sqrt{3}.$$

II. נתון המקום הגיאומטרי  $|z - ia_2| = \sqrt{3}$ .

נסמן  $z = x + yi$ , כאשר  $a_2 = \sqrt{3}$ .

$$|z - ia_2| = \sqrt{3}$$

$$|x + yi - i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$|x + (y - \sqrt{3})i| = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2 + (y - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3}$$

זזה מעגל שמרכזו  $(0, \sqrt{3})$ , ורדיוסו  $\sqrt{3}$ .

I. נתון המקום הגיאומטרי  $|z - ia_1| = \sqrt{3}$ .

נסמן  $z = x + yi$ , כאשר  $a_1 = -\sqrt{3}$ .

$$|z + ia_1| = \sqrt{3}$$

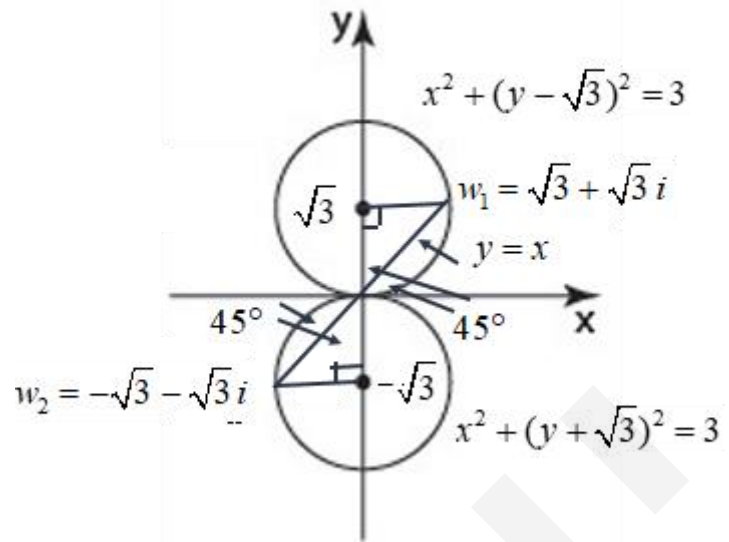
$$|x + yi + i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$|x + (y + \sqrt{3})i| = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2 + (y + \sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{x^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 3}$$

זזה מעגל שמרכזו  $(0, -\sqrt{3})$ , ורדיוסו  $\sqrt{3}$ .



תשובה: הסרטוט מעל, כולל הנדרש לסעיף ג.

ג. הישר  $y = x$  חותך את שני המעגלים בראשית הצירים,

ובנקודות המיוצגות על ידי המספרים המרוכבים  $w_1$  ו-  $w_2$ .

כיוון ששיפוע הישר הוא 1, אז הוא יוצר זווית  $45^\circ$  עם ציר ה-  $x$ ,

ומתקבלים שני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים,

ומכאן ש-  $w_1 = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$  ו-  $w_2 = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$  (מבלי להגביל את הכלליות).

נזכור ש-  $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ .

$$z^3 = w_1 \cdot \bar{w}_1 \cdot w_2 \cdot \bar{w}_2$$

$$z^3 = (\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2) \cdot ((-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3}^2))$$

$$z^3 = 36$$

$$z^3 = 36 \text{ cis } 0^\circ$$

$$z_k = \sqrt[3]{36} \text{ cis } 120^\circ k$$

$$z_1 = \sqrt[3]{36}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{36} \text{ cis } 120^\circ$$

$$z_3 = \sqrt[3]{36} \text{ cis } 240^\circ$$

תשובה: פתרונות המשוואה הם -  $\sqrt[3]{36}$ ,  $\sqrt[3]{36} \text{ cis } 120^\circ$ ,  $\sqrt[3]{36} \text{ cis } 240^\circ$ .

א. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax}{\ln x - a}$  (פרמטר,  $a > 0$ ).

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית חיובי, ולכן  $x > 0$ .

כמו כן מכנה שונה מאפס, לכן  $\ln x - a \neq 0 \rightarrow \ln x \neq a \rightarrow x \neq e^a$ .

תשובה: הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת עבור  $x > 0, x \neq e^a$ .

(2) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .

$$f'(x) = a \cdot \frac{\ln x - a - \frac{x}{x}}{(\ln x - a)^2}$$

$$f'(x) = a \cdot \frac{\ln x - a - 1}{(\ln x - a)^2}$$

$$\ln x - a - 1$$

$$\ln x = a + 1 \rightarrow x = e^{a+1}$$

$$f(e^{a+1}) = \frac{a \cdot e^{a+1}}{\ln e^{a+1} - a} = \frac{a \cdot e^{a+1}}{a+1-a} = a \cdot e^{a+1} \rightarrow (e^{a+1}, a \cdot e^{a+1})$$

$a > 0$ , המכנה חיובי, ולכן סימני הנגזרת נקבעים על פי  $\ln x - a - 1$ .

הפונקציה  $\ln x$  עולה ועוברת משליליות לחיוביות עבור  $x = 1$ .

הפונקציה  $\ln x - a - 1$  היא הזזה אנכית ב  $a + 1$  יחידות כלפי מטה,

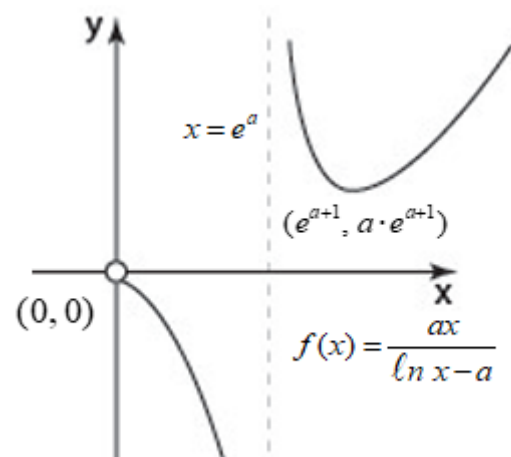
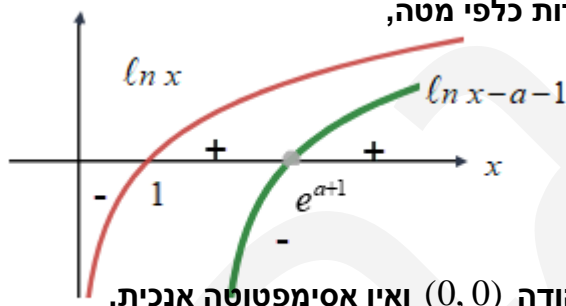
ועוברת משליליות לחיוביות עבור  $x = e^{a+1}$ .

עלייה:  $x > e^{a+1}$ , ירידה:  $e^a < x < e^{a+1}$  או  $0 < x < e^a$ .

תשובה:  $(e^{a+1}, a \cdot e^{a+1})$ , מינימום.

(3) כאשר  $x \rightarrow 0^+$ ,  $f(x) \rightarrow \frac{0}{-\infty} = 0$ , הגרף שואף לנקודה  $(0, 0)$  ואין אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה אנכית:  $x = e^a$ .



תשובה: הסרטוט מעל.



ב. נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ .

(1) הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת עבור  $x > 0, x \neq e^a$ .

כיוון ש-  $f(x) \neq 0$  על פי הגרף, אז תחום ההגדרה של  $g(x)$  זהה.

תשובה: הפונקציה  $g(x)$  מוגדרת עבור  $x > 0, x \neq e^a$ .

(2) כאשר  $f(x)$  עולה, המכנה של  $g(x)$  יורד, וגם להפך.

לכן, תחומי עלייה וירידה מתהפכים.

ניתן לראות גם על פי הנגזרת:  $g'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ .

לכן, נקודת המינימום הופכת להיות נקודת מקסימום, כאשר שיעור ה-  $y$  הופכי.

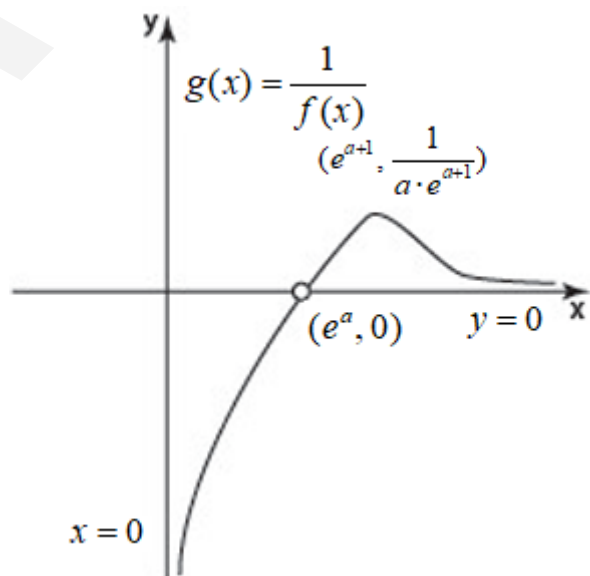
תשובה:  $(e^{a+1}, \frac{1}{a \cdot e^{a+1}})$ , מקסימום.

(3) כאשר  $x \rightarrow 0^+, f(x) \rightarrow 0^-, g(x) \rightarrow -\infty$  ו-  $x = 0$  אסימפטוטה אנכית.

כאשר  $x \rightarrow e^a, f(x) \rightarrow \pm\infty, g(x) \rightarrow \pm 0$ ,

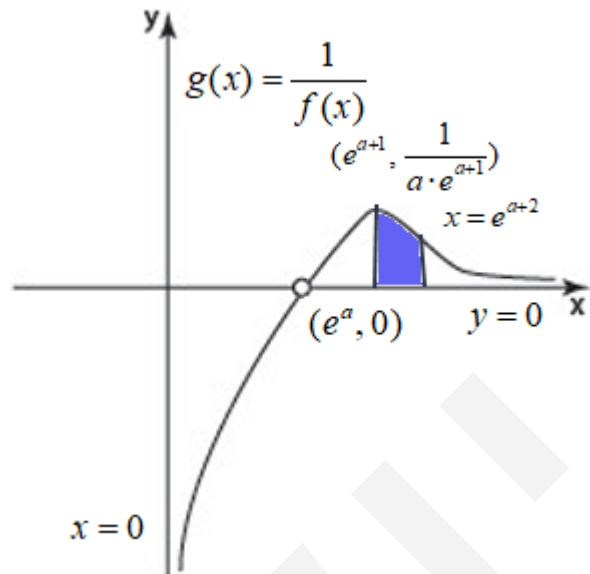
והגרף של  $g(x)$  שואף לנקודת אי רציפות סליקה ("חור") -  $(e^a, 0)$ .

כאשר  $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow 0$  ו-  $y = 0$  אסימפטוטה אופקית לימין.



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. נתון כי השטח, הצבוע בכחול, הוא 3.



נביע את השטח המוגבל באמצעות  $a$ , בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית, ולאחר מכן נשווה ל-3.

$$S = \int_{e^{a+1}}^{e^{a+2}} \left( \frac{\ln x - a}{ax} - 0 \right) dx =$$

$$S = \int_{e^{a+1}}^{e^{a+2}} \frac{1}{a} (\ln x - a) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$S = \left. \frac{(\ln x - a)^2}{2a} \right|_{e^{a+1}}^{e^{a+2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = e^{a+2} : \frac{(a+2-a)^2}{2a} = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a} \\ x = e^{a+1} : \frac{(a+1-a)^2}{2a} = \frac{1}{2a} \end{array} \right\} S = \frac{2}{a} - \frac{1}{2a} \rightarrow \boxed{S = \frac{3}{2a}}$$

$$\frac{3}{2a} = 3 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

תשובה:  $a = \frac{1}{2}$ .

א. נתונה הפונקציה  $f(x) = 9^{-x} - 6 \cdot 3^{-x} + m$ , המוגדרת לכל  $x$ .

נעבוד עם התבנית הבאה:  $f(x) = 3^{-2x} - 6 \cdot 3^{-x} + m$ , כי נוח לעבוד עם בסיסים זהים.

(1) תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$  הוא כל  $x$ .

(2) כאשר  $x \rightarrow +\infty$ ,  $3^{-x}, 3^{-2x} \rightarrow 0$  ומכאן ש  $y = m$  אסימפטוטה אופקית לימין.

תשובה:  $y = m$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , ונקבע את סוגו.

$$f'(x) = -2 \cdot 3^{-2x} \cdot \ln 3 + 6 \cdot 3^{-x} \cdot \ln 3$$

$$f'(x) = 2 \cdot 3^{-x} \cdot \ln 3 \cdot (-3^{-x} + 3)$$

$$0 = -3^{-x} + 3$$

$$3^{-x} = 3 \rightarrow -x = 1 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, m-9)$$

הוא ביטוי חיובי.

היא פונקציה עולה, העוברת משליליות לחיוביות עבור  $x = -1$ ,

ולכן  $f(x)$  עוברת מירידה לעלייה ו-  $(-1, m-9)$  היא נקודת מינימום.

תשובה:  $(-1, m-9)$ , מינימום.

ב. נתון כי גרף הפונקציה  $f(x)$  משיק לציר ה- $x$ , כלומר  $f'(x) = 0$  וגם  $f(x) = 0$ .

$$m - 9 = 0 \rightarrow m = 9$$

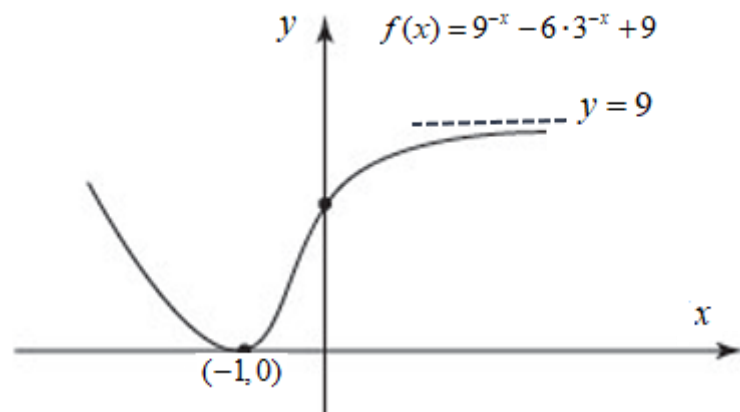
תשובה:  $m = 9$ .

$$f(x) = 9^{-x} - 6 \cdot 3^{-x} + 9$$

(1) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

אסימפטוטה אופקית  $y = 9$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

נקודת מינימום  $(-1, 0)$ .



תשובה: הסרטוט מעל.

(2) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $\ln f(x)$ .

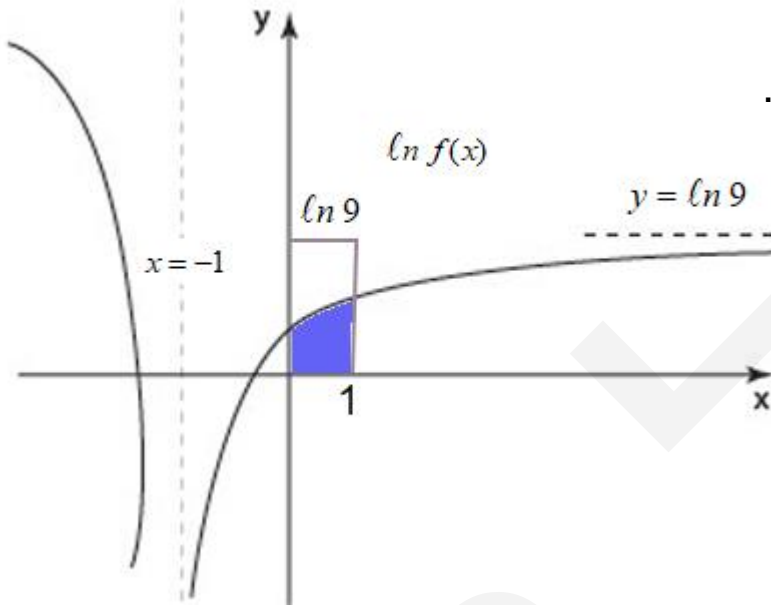
תחום ההגדרה של  $\ln f(x)$  הוא  $x \neq -1$ , כי  $f(x) > 0$  לכל  $x \neq -1$ .

אסימפטוטה אופקית  $y = \ln 9$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

כאשר  $x \rightarrow -1^-$ ,  $f(x) \rightarrow 0^+$ ,  $\ln f(x) \rightarrow -\infty$  ו-  $x = -1$  אסימפטוטה אנכית.

ותחומי עלייה וירידה ללא שינוי, עבור  $x \neq -1$ ,  $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ .

תשובה: הסרטוט משמאל, כולל סימון שטח עבור סעיף ד.



ד. נסביר מדוע  $\int_0^1 [\ln f(x) - \ln 4] dx < \ln \frac{9}{4}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\ln f(x) - \ln 4] dx &= \\ \int_0^1 [\ln f(x)] dx - \int_0^1 [\ln 4] dx &= \\ \int_0^1 [\ln f(x)] dx - x \ln 4 \Big|_0^1 &= \\ \int_0^1 [\ln f(x)] dx - \ln 4 \end{aligned}$$

המחובר השמאלי מייצג את השטח הצבוע מכחול, שקטן משטח המלבן שהוא  $\ln 9$ .

לכן:

$$\int_0^1 [\ln f(x) - \ln 4] dx < \ln 9 - \ln 4$$

$$\boxed{\int_0^1 [\ln f(x) - \ln 4] dx < \ln \frac{9}{4}}$$

תשובה: הסברנו מדוע  $\int_0^1 [\ln f(x) - \ln 4] dx < \ln \frac{9}{4}$ .