שאלון 35471 מועד
חורף תשפ״ב

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35471 מועד חורף תשפ״ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. ההצעה הראשונה מתארת סדרה חשבונית, כי כל תשלום גבוה מן התשלום הקודם לו בסכום קבוע.

מחיר האופנוע $43,650$ **שקלים, ובהתאם** $S_n = 43,650$ **.**

על פי ההצעה הראשונה: (1) $a_6 - a_2 = 200$ **(2)** $a_9 = 1.2a_1$ **.**

(1)

$$a_6 - a_2 = 200$$
$$a_1 + 5d - (a_1 + d) = 200$$
$$a_1 + 5d - a_1 - d = 200$$
$$4d = 200$$
$$\boxed{d = 50}$$

(2)

$$a_9 = 1.2a_1$$
$$a_1 + 8d = 1.2a_1$$
$$8 \cdot 50 = 0.2a_1$$
$$400 = 0.2a_1$$
$$\boxed{a_1 = 2,000}$$

תשובה: התשלום הראשון הוא $2,000$ **שקלים.**

ב. נמצא את מספר התשלומים שישלם יוסי בעבור האופנוע לפי ההצעה הראשונה, כאשר ידוע כי $S_n = 43,650$ **.**

על פי סעיף א, $a_1 = 2,000$ **ו-** $d = 50$ **.**

$$\frac{n\left[2 \cdot 2,000 + 50(n-1)\right]}{2} = 43,650 \quad / \cdot 2$$
$$n(4,000 + 50n - 50) = 87,300$$
$$4,000n + 50n^2 - 50n = 87,300$$
$$50n^2 + 3,950n - 87,300 = 0$$
$$n = 18 \quad \cancel{n = -97}$$

הפתרון השני נפסל, כי מספר התשלומים חייב להיות שלם וחיובי (טבעי).

תשובה: מספר התשלומים שישלם יוסי בעבור האופנוע, לפי ההצעה הראשונה, הוא 18.

ג. בהצעה השנייה התשלומים שווים זה לזה, וגם כאן מדובר ב- 18 **תשלומים.**

התשלום הקבוע הוא: $2,425$ **שקלים** $= 43,650 : 18$ **.**

נמצא כמה מן התשלומים שעל יוסי לשלם לפי ההצעה הראשונה,

<u>נמוכים</u> מהתשלום הקבוע שבהצעה השנייה.

$$a_n < 2,425$$
$$a_1 + (n-1)d < 2,425$$
$$2,000 + 50(n-1) < 2,425$$
$$50(n-1) < 425 \quad / : (+50) > 0$$
$$n - 1 < 8.5$$
$$n < 9.5$$
$$\boxed{n = 9}$$

תשובה: תשעה מן התשלומים, שעל יוסי לשלם לפי ההצעה הראשונה,

נמוכים מן התשלום הקבוע שעליו לשלם לפי ההצעה השנייה.

א. הציון הממוצע במתכונת הראשונה היה $\bar{x}=65.05$ **, וסטיית התקן של הציונים הייתה** $s=15$ **.**

הציון שקיבלה שירה במתכונת הראשונה היה 70 **.**

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$z=\frac{70-65.05}{15}=0.33$$

$$p(z<0.33)=0.629=62.9\%$$

$$\boxed{p(x<70)=0.629=62.9\%}$$

תשובה: 62.9% **מן התלמידים קיבלו ציון נמוך מן הציון שקיבלה שירה במתכונת הראשונה.**

ב. (1) גם בבחינת המתכונת השנייה, קיבלו 62.9% **מהתלמידים ציון נמוך משירה, כלומר** $z=0.33$ **.**

סטיית התקן של ציוני המתכונת השנייה הייתה $s=10$ **, כאשר שירה קיבלה ציון** 78 **במתכונת זו.**

$$0.33=\frac{78-\bar{x}}{10}$$

$$3.3=78-\bar{x}$$

$$\boxed{\bar{x}=74.7}$$

תשובה: הציון הממוצע במתכונת השנייה היה 74.7 **.**

(2) גרף ההתפלגות הנורמלית סימטרי סביב הממוצע, לכן הממוצע שווה לחציון ושווה גם לשכיח.

תשובה: החציון של הציונים במתכונת השנייה היה 74.7 **.**

ג. אריאל קיבל ציון זהה בשתי המתכונות.

(1) ידוע כי במתכונת הראשונה קיבלו $0.298=29.8\%$ **מהתלמידים ציון גבוה ממנו.**

לכן, זה הציון ש- $1-0.298=0.702$ **מהתלמידים, קיבלו ציון נמוך ממנו.**

$$z(p<0.702)=0.53$$

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$0.53=\frac{x-65.05}{15}$$

$$7.95=x-65.05$$

$$\boxed{x=73}$$

תשובה: הציון שאריאל קיבל בשתי המתכונות היה 73**.**

(2) במתכונת הראשונה אריאל קיבל ציון 73 **, שהיה מעל לממוצע** 65.05 **.**

גם במתכונת השנייה אריאל קיבל ציון 73 **, אבל הפעם ציון זה היה מתחת לממוצע** 74**.**

תשובה: תשובה: אריאל הצליח יותר במתכונת הראשונה, יחסית לכל התלמידים שנבחנו.

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- בנים** $\bar{A}$ **- בנות**

B **- משתתפים בחוג כדורגל** $\bar{B}$ **- משתתפים בחוג טניס**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

על-מנת למלא טבלה של 2*2 נדרשות שלוש משוואות.

(1) $N(A)=N(\bar{A}) \quad \to P(A)=P(\bar{A})=0.5$

(2) $P(B/A)=0.8 \quad \to P(\bar{B}/A)=0.2$

(3) $N(\bar{A}\cap\bar{B})=3N(\bar{A}\cap B) \quad \to P(\bar{A}\cap\bar{B})=3P(\bar{A}\cap B)$

<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$0.8=\frac{P(B\cap A)}{0.5}$$

$$0.4=P(B\cap A)$$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=3P(\bar{A}\cap B)$$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=\frac{3}{4}P(\bar{A})=\frac{3}{4}\cdot 0.5$$

$$P(\bar{A})=0.375$$

	A **בנים**	$\bar{A}$ **בנות**	
B **משתתפים בחוג כדורגל**	0.4	0.125	0.525
$\bar{B}$ **משתתפים בחוג טניס**	0.1	0.375	0.475
	0.5	0.5	1

$$P(A\cap B)=0.4$$

תשובה: ההסתברות, שנבחר בן המשתתף בחוג כדורגל, היא 0.4 .

ב. נמצא מהי ההסתברות שנבחר בן, אם ידוע שנבחר משתתף בחוג טניס.

$$P(A/\bar{B})=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0.1}{0.475}=\frac{4}{19}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{4}{19}$.

ג. ידוע כי בשני החוגים במרכז הקהילתי יש 200 **משתתפים (בנים ובנות) סך הכול.**

(1) $P(\bar{B})=0.475 \quad \to N(\bar{B})=0.475\cdot 200=95$

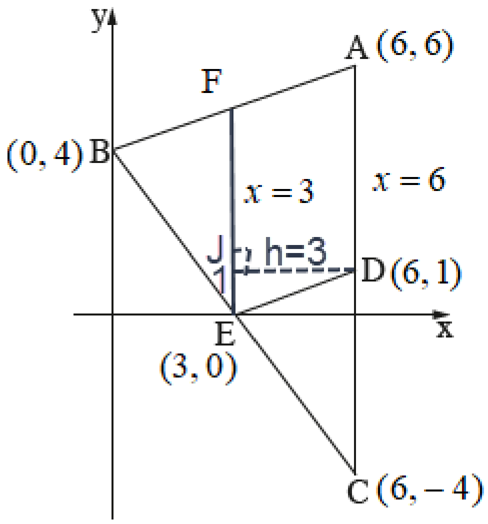
תשובה: בחוג טניס יש 95 **משתתפים סך הכול (בנים ובנות).**

(2) בוחרים שני משתתפים, ללא החזרה, ולכן ההסתברויות משתנות.

$$P(\text{2 tennis players})=\frac{95}{200}\cdot\frac{94}{199}=\frac{893}{3{,}980}\approx 0.224$$

תשובה: ההסתברות, שנבחרו שני משתתפים שמשתתפים בחוג טניס, היא $0.224 \approx \frac{893}{3{,}980}$.

א. נתון כי $AB=\sqrt{40}$ **, הקודקוד** B **על ציר ה-** y **, לכן** $B(0,b)$ **, ו-** $A(6,6)$.



$$\sqrt{40}=\sqrt{(6-0)^2+(6-b)^2}$$
$$40=36+(6-b)^2$$
$$4=(6-b)^2$$
$$2=6-b \quad \to \boxed{b=4} \quad o.k. \quad \leftarrow y_B<6$$
$$-2=6-b \quad \to \cancel{b=8}$$

תשובה: שיעורי הקודקוד B **הם** $(0,4)$.

ב. הנקודה E **על ציר ה-** x **, לכן** $E(e,0)$.

הצלע AC **מקבילה לציר ה-** y **, לכן** $x_C=x_A=6$.

הנקודה E **היא אמצע הצלע** BC **, ולכן** $x_E=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{0+6}{2}=3$.

$$y_E=\frac{y_B+y_C}{2}$$
$$0=\frac{4+y_C}{2} \quad \to y_C=-4 \quad \to C(6,-4)$$

תשובה: $E(3,0)$, $C(6,-4)$.

ג. D **היא אמצע הצלע** AC **, ולכן** ED **קטע אמצעים במשולש** ABC **, וגם** $x_D=x_A=6$.

$$y_D=\frac{y_A+x_C}{2}=\frac{6+(-4)}{2}=1 \quad \to D(6,1)$$.

EF **מקביל לציר ה-** y **, ולכן** $x_F=x_E=3$.

(1) $ED\parallel BA$ **, כי קטע אמצעים מקביל לצלע השלישית.**

$EF\parallel AD$ **, כי שני הקטעים מקבילים לציר ה-** y .

תשובה: $FADE$ **מקבילית, כי היא מרובע עם שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.**

(2) שטח מקבילית שווה למכפלת צלע בגובה שלה, כאשר הגובה הוא המרחק הין צלעות מקבילות.

$$S_{FADE}=AD\cdot h_{AD}=(6-1)\cdot(6-3)=15$$

תשובה: שטח המקבילית $FADE$ **הוא** 15.

ד. נחשב את $\sphericalangle DEF$ **, במשולש הקטן שאורכי ניצביו הם** 3 **ו-** 1.

$$\Delta JED: \quad \tan\sphericalangle DEJ=\frac{3}{1}=3 \quad \to \sphericalangle DEF=71.565°$$

תשובה: $\sphericalangle DEF=71.565°$.

א. נוכיח כי $\Delta ABC \sim \Delta OAC$.

$\sphericalangle CAO = 90°$ **(המשיק מאונך לקוטר בנקודת ההשקה)**

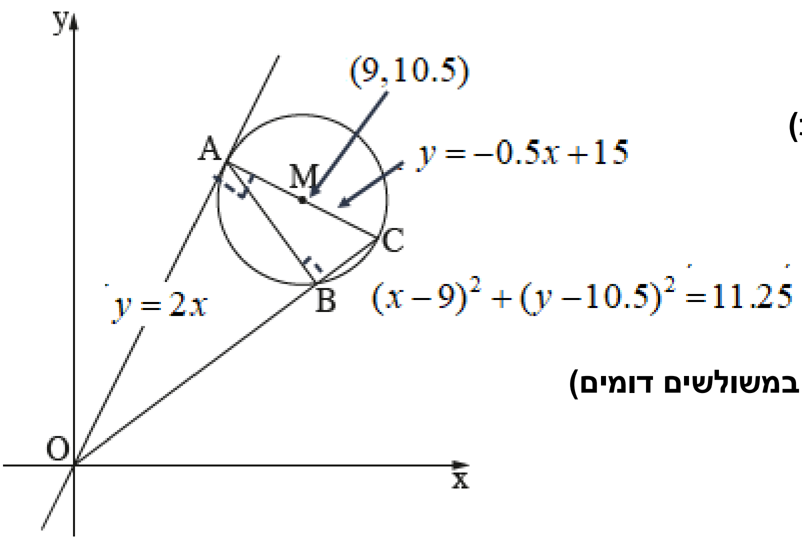
$\sphericalangle CBA = 90°$ **(זווית היקפית הנשענת על הקוטר היא זווית ישרה)**

$\sphericalangle CBA = \sphericalangle CAO$ **(כלל המעבר)**

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACO$ **(זווית משותפת)**

$\Delta ABC \sim \Delta OAC$ **(משפט דמיון זווית זווית)**

תשובה: הוכחנו כי $\Delta ABC \sim \Delta OAC$.



ב. נתון $BC = 3$, $OC = 15$.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{OC} = \frac{AB}{OA}$$ **(יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים)**

$$(AC)^2 = BC \cdot OC = 3 \cdot 15 = 45$$

$$\boxed{AC = 3\sqrt{5}}$$

תשובה: אורך AC **הוא** $3\sqrt{5}$.

ג. מרכז המעגל הוא $M(9,10.5)$ **. רדיוס המעגל הוא** $\frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

משוואת המעגל היא $(x-9)^2 + (y-10.5)^2 = (\frac{3\sqrt{5}}{2})^2 = 11.25$.

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-9)^2 + (y-10.5)^2 = 11.25$.

ד. נתון: משוואת המשיק למעגל בנקודה A **היא** $y = 2x$.

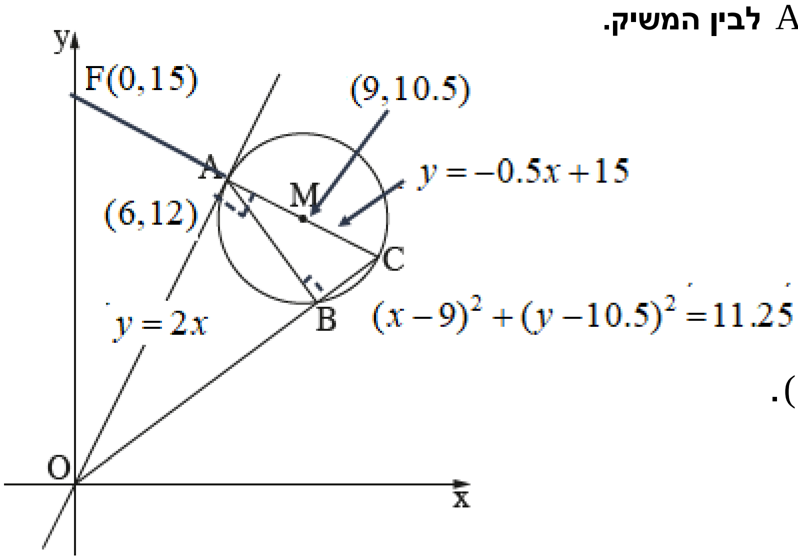
(1) שיפוע הרדיוס AM **, המאונך למשיק, הוא** $-\frac{1}{2}$ **(שיפוע הופכי לנגדי).**

$$y - 10.5 = -0.5(x-9)$$

$$y - 10.5 = -0.5x + 4.5$$

$$\boxed{y = -0.5x + 15}$$

תשובה: משוואת הישר AM **היא** $y = -0.5x + 15$.



(2) הנקודה A **היא נקודת החיתוך בין** AM **לבין המשיק.**

$$A\begin{cases} y=2x \\ y=-0.5x+15 \end{cases}$$

$$2x=-0.5x+15$$

$$2.5x=15$$

$$x=6 \quad \rightarrow \boxed{A(6,12)}$$

תשובה: שיעורי הנקודה A **הם** $(6,12)$.

ה. הישר $AM: y=-0.5x+15$ **חותך את ציר ה-** y **בנקודה** F**, ולכן** $F(0,15)$.

נחשב את $\sphericalangle OFA$.

$$AO=\sqrt{(6-0)^2+(12-0)^2}=\sqrt{180}$$

$$FO=15-0=15$$

נעבור קצת לטריגו.

$\underline{\Delta OFA}$

$$\sin\sphericalangle OFA=\frac{AO}{FO}=\frac{\sqrt{180}}{15}$$

$$\boxed{\sphericalangle OFA=63.435^\circ}$$

תשובה: גודל הזווית OFA **הוא** 63.435°.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4}{4x^2-1}+b$

בתחום ההגדרה, המכנה שונה מאפס: $4x^2-1\neq 0 \quad \rightarrow x^2\neq\frac{1}{4} \quad \rightarrow x\neq\pm 0.5$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq\pm 0.5$.

ב. (1) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **(אם יש כאלה).**

נשים לב ש- $f(x)$ **היא פונקציה זוגית, והגרף שלה סימטרי לציר ה-** y **,**

ומכיוון שהיא מוגדרת עבור $x=0$ **נקבל נקודת קיצון על ציר ה-** y **.**

$$f'(x)=\frac{0-4\cdot 8x}{(4x^2-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-32x}{(4x^2-1)^2}}$$

$$0=-32x$$

$$x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,-4+b)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0.1)=\frac{(+)}{(+)}>0 \\ f'(0.1)=\frac{(-)}{(+)}<0 \end{array}\right\} \boxed{(0,-4+b),\max}$$

$$f'(-0.6)=\frac{(+)}{(+)}>0 \quad \nearrow$$

$$f'(0.6)=\frac{(-)}{(+)}<0 \quad \searrow$$

מצאנו כבר תחומי עלייה וירידה, עבור תת סעיף (2)

תשובה: $(0,-4+b),\max$ **, מקסימום.**

(2) תשובה: עלייה - $-0.5<x<0$ **או** $x<-0.5$ **, ירידה -** $x>0.5$ **או** $0<x<0.5$.

ג. נתון כי הישר $y=-2$ **משיק לגרף הפונקציה** $f(x)$ **בנקודת הקיצון שלה, ולכן** $-4+b=-2 \quad \rightarrow \boxed{b=2}$.

תשובה: $b=2$.

ד. נציב $b=2$ **והפונקציה היא** $f(x)=\frac{4}{4x^2-1}+2$ **, ונקודת המקסימום היא** $(0,-2)$ **.**

(1) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ **.**

אסימפטוטות מקבילה לציר ה- y **: הישרים** $x=0.5$ **ו-** $x=-0.5$ **.**

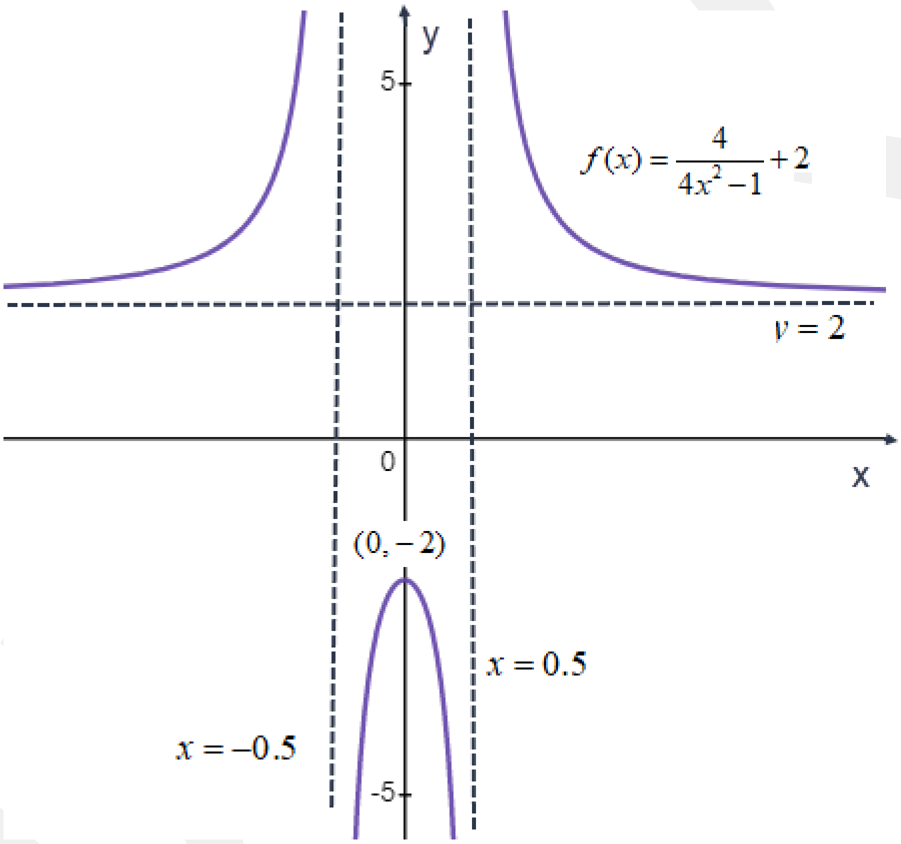
(מספרים אלו מאפסים מכנה ולא מונה).

אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x **:** $y=2$ **.**

(חזקת מונה (0) קטנה מחזקת מכנה (2) במחובר השמאלי, ולכן , $y\to 0+2=2$ **).**

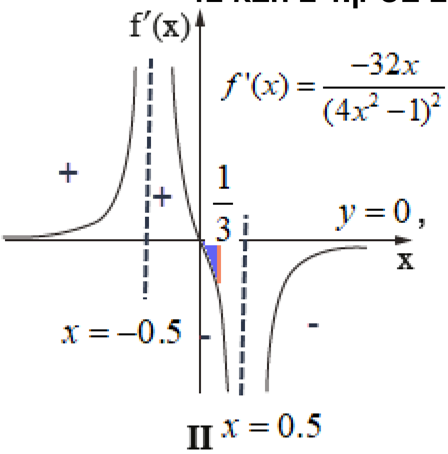
תשובה: $x=0.5$ **,** $x=-0.5$**,** $y=2$ **.**

(2) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל

ה. כאשר מציירים, או בוחרים, את גרף הנגזרת $f'(x)=\frac{-32x}{(4x^2-1)^2}$, נעזרים בשיקולים הבאים:



- תחום הגדרה: $x\neq\pm0.5$
- אסימפטוטות: $x=0.5$, $x=-0.5$, $y=0$.
- נקודות אפס: $(0,0)$.
- סימני נגזרת, בהתאם לעלייה/ירידה של $f(x)$,

$f'(x)>0$ כאשר $-0.5<x<0$ או $x<-0.5$.

$f'(x)<0$ כאשר $x>0.5$ או $0<x<0.5$.

תשובה: הגרף המתאים הוא גרף II (בסרטוט מופיע כבר השטח עבור סעיף ו).

ו. נחשב את השטח המבוקש (צבוע בכחול):

$$S=\int_0^{\frac{1}{3}}(0-f'(x))\,dx=-f(x)\Big]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}:\quad -f(\frac{1}{3})=5.2 \\ x=0:\quad -f(0)=2 \end{array}\right\} S=5.2-2=3.2\rightarrow \boxed{S=3.2}$$

תשובה: גודל השטח, המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

על ידי הישר $x=\frac{1}{3}$, ועל ידי ציר ה- x , הוא 3.2 יח"ר.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x\cdot\sqrt{x+18}$ **.**

בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

$x+18\geq 0$

$\boxed{x\geq -18}$

תשובה: $x\geq -18$.

ב. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל את הנקודה** $(0,0)$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל את הנקודות** $(0,0)$ **,** $(-18,0)$ **.**

תשובה: $(0,0)$ **,** $(-18,0)$ **.**

ג. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן. $(-18,0)$ **בהכרח נקודת קיצון קצה.**

$$f'(x)=\sqrt{x+18}+\frac{x}{2\sqrt{x+18}}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+18)+x}{2\sqrt{x+18}}$$

$$f'(x)=\frac{2x+36+x}{2\sqrt{x+18}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{3x+36}{2\sqrt{x+18}}}$$

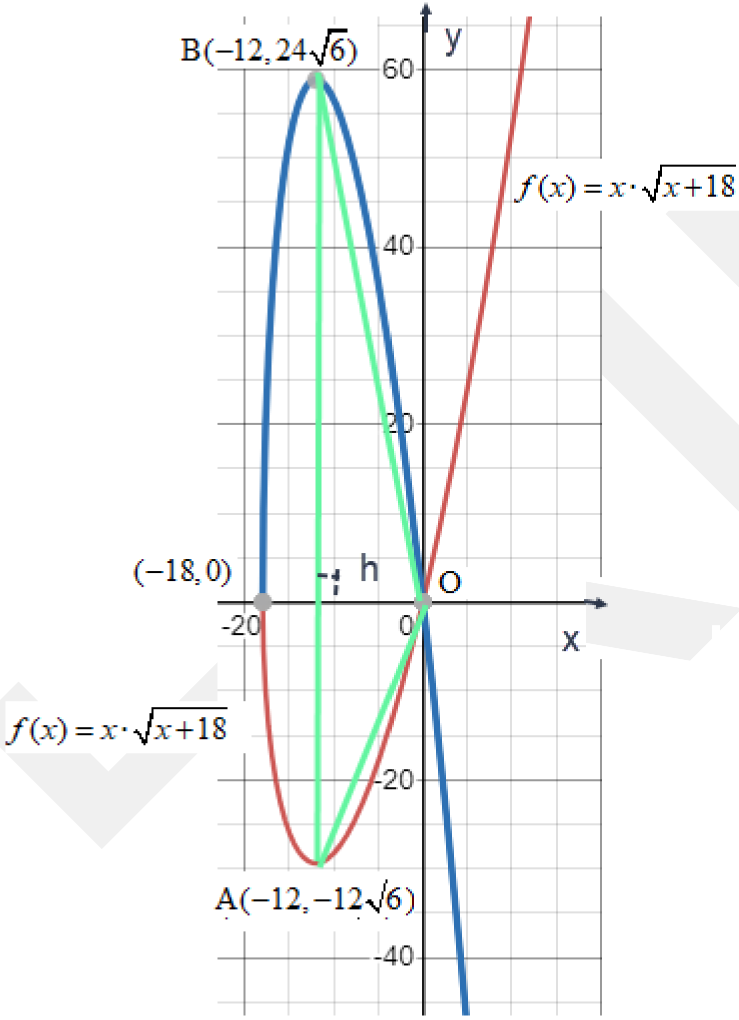
$$0=3x+36 \quad \rightarrow x=-12 \quad \rightarrow (-12,-12\sqrt{6})$$

$$f'(-13)<0\ ,\ f'(-11)>0 \quad \rightarrow \boxed{(-12,-12\sqrt{6}),\min}$$

כיוון שהפונקציה יורדת מנקודת הקצה $(-18,0)$ **לנקודת המינימום, הרי שנקודת הקצה היא נקודת מקסימום.**

תשובה: $(-12,-12\sqrt{6})$ **מינימום ,** $(-18,0)$ **מקסימום.**

ד. הסקיצה של $f(x)=x\cdot\sqrt{x+18}$ **, כולל הפונקציה הנדרשת לסעיף ה.**



ה. נתונה הפונקציה $g(x)=-2f(x)$ **,**

שהיא הכפלה פי 2 **של** $f(x)$ **, לאחר סיבוב סביב ציר ה-** x **שנובע מהכפל במספר שלילי.**

כתוצאה מהסיבוב סביב ציר ה- x **מתחלפים תחומי החיוביות והשליליות,**

וגם תחומי העלייה והירידה מתחלפים, דבר שניתן לראות גם מ- $g'(x)=-2f'(x)$ **.**

ניתן לסרטט, בהתאם, את גרף הפונקציה של $g(x)$ **, כפי שמופיע בסרטוט מעל.**

(1) נקודות הקיצון, מחליפות את סוגן, עבור אותו שיעור x **, כאשר ערך הפונקציה מוכפל פי** (-2) **.**

תשובה: $(-12, 24\sqrt{6})$ **מקסימום,** $(-18, 0)$ **מינימום.**

(2) נחשב את שטח המשולש ABO **(צבוע בירוק בסרטוט).**

$$S_{\Delta\text{ABO}}=\frac{\text{AB}\cdot\text{h}}{2}=\frac{(24\sqrt{6}-(-12\sqrt{6}))\cdot(0-(-12))}{2}=\frac{36\sqrt{6}\cdot12}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta\text{ABO}}=216\sqrt{6}\approx529.09}$$

תשובה: שטח המשולש ABO **הוא** $216\sqrt{6}\approx529.09$ **יח"ר.**

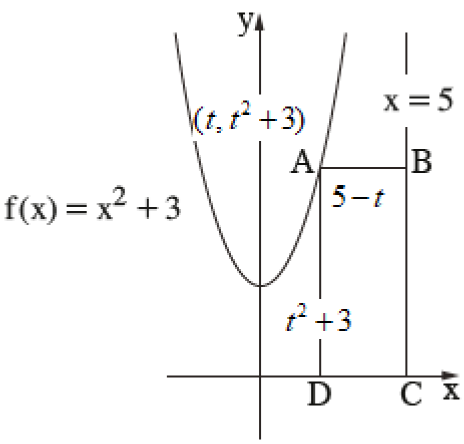
א. הפונקציה שיש להביא ל*מקסימום* שטח המלבן $ABCD$.

נסמן ב- t **את שיעור ה-** x **של הנקודה** A**, הנמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)=x^2+3$.

בהתאם שיעורי הנקודה הם $A(t,t^2+3)$.

אורך הצלע AB **של המלבן** $ABCD$**, המקבילה לציר ה-** x **, הוא** $x_B-x_A=5-t$.

אורך הצלע AD **של המלבן** $ABCD$**, המקבילה לציר ה-** y **, הוא** $y_A-y_D=t^2+3-0=t^2+3$.



$$S(t)=(5-t)(t^2+3)$$
$$S(t)=5t^2+15-t^3-3t$$
$$\boxed{S(t)=-t^3+5t^2-3t+15}$$

תחום ההגדרה של פונקציית השטח הוא $0<t<5$.

$$\boxed{S'(t)=-3t^2+10t-3}$$
$$-3t^2+10t-3=0$$
$$t=3 \quad t=\frac{1}{3}$$
$$\boxed{S''(t)=-6t+10}$$
$$S''(3)=-6\cdot3+10<0 \quad \rightarrow Max$$
$$S''(\frac{1}{3})=-6\cdot\frac{1}{3}+10>0 \quad \rightarrow Min$$

תשובה: $t=3$**, עבורו שטח המלבן** $ABCD$ **יהיה מקסימלי.**

ב. נמצא את ערכו של השטח המקסימלי, על ידי הצבת $t=3$ **בפונקציית השטח:**

$$S(3)=-3^3+5\cdot3^2-3\cdot3+15=24$$

בתחום ההגדרה, $0<t<5$**, אין נקודות קצה, ולכן** 24 **הוא הערך המקסימלי (קיצון מוחלט).**

מכאן שהשטח המקסימלי של המלבן $ABCD$ **הוא** 24 **, ולא ייתכן מלבן ששטחו** 30.

תשובה: לא ייתכן מלבן $ABCD$ **, שנבנה באופן המתואר בציור, ושטחו הוא** 30.