

פתרון הבחינה במתמטיקה

חורף תשפ"ב, 2022, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

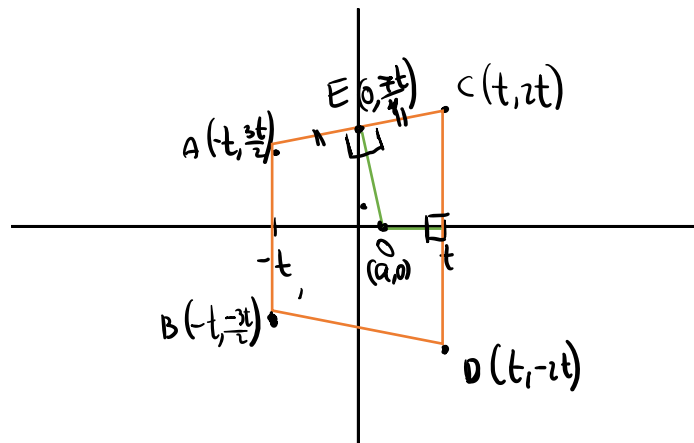
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. הנקודה $(t, 0)$ היא מוקד של פרבולה קנונית ומוקד של אליפסה קנונית. t הוא פרמטר חיובי. אורך הציר הראשי של האליפסה הוא $4t$.
 בסעיפים שלפניך הבע את תשובותיך באמצעות t , אם יש צורך.
 א. מצא את משוואת הפרבולה ואת משוואת האליפסה.
 המדריך של הפרבולה חותך את האליפסה בשתי נקודות, A ו-B. הנקודה A נמצאת מעל לנקודה B.
 ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 ישר המאונך לציר ה-x, עובר במוקד הפרבולה וחותך את הפרבולה בשתי נקודות, C ו-D. הנקודה C נמצאת מעל לנקודה D.
 ג. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
 ד. (1) הסבר מדוע ארבע הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על מעגל אחד.
 (2) מצא את שיעורי מרכז המעגל הזה.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{משוואת הפרבולה} \\ y^2 = 4tx \end{array}} \quad \leftarrow p = 2t \quad \leftarrow p_2 = t \quad \text{נ/קן פרבולה} \quad \frac{1}{c} \\
\text{נ/קן אליפסה} \quad c = t \\
\text{ציר א' ו-ב} \quad a = 2t \quad \leftarrow 2a = 4t \\
\text{נ/קן ציר א' ו-ב} \quad a, c \text{ נימ' למציאת } b \\
c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow t^2 = 4t^2 - b^2 \rightarrow b^2 = 3t^2 \quad b = \sqrt{3}t \\
\boxed{\begin{array}{l} \text{משוואת אליפסה} \\ \frac{x^2}{4t^2} + \frac{y^2}{3t^2} = 1 \end{array}} \\
\text{נ/קן פרבולה ה/א} \quad x = -\frac{p}{2} \quad \text{נ/קן ציר א' ו-ב} \quad x = -t \\
\frac{(-t)^2}{4t^2} + \frac{y^2}{3t^2} = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{y^2}{3t^2} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{3t^2} = \frac{3}{4} \\
\leftarrow y = \pm \frac{3t}{2} \quad \leftarrow y^2 = \frac{9t^2}{4} \\
A(-t, \frac{3t}{2}) \quad B(-t, -\frac{3t}{2}) \\
\text{ע' נ/קן ציר א' ו-ב} \quad x = t \quad \text{נ/קן פרבולה} \\
y^2 = 4tt \rightarrow y = \pm 2t \\
C(t, 2t) \quad D(t, -2t)$$





(1) 3

קיבלו טרנס שווה שוק"ם. בטרנס שווה שוק"ם
 כל שני שוויון נגזיר מש"מ: 180° , ולכן המונח

קר חסמה במעגל.

(2) המעגל מחוסם א-הטרנס, חוסם א-ה ΔACD
 מרכז מעגל חוסם משולש הוא מרכז אנכים אמנע"ם.

האנך האמנעי ע"צ AC הוא ציר x , ולכן נקודה
 החיתוך בין האנך האמנעי ל- AC עדין ציר x
 הוא מרכז המעגל החוסם.

נתאר את מרכז המעגל ב- $O(a, 0)$
 נסמן נקודה E אמנע AC ב- $E(0, \frac{7t}{4})$

כעג נדרוש: $m_{AC} \cdot m_{OE} = -1$

$$\frac{2t - \frac{3t}{4}}{t - (-t)} \cdot \frac{\frac{7t}{4} - 0}{0 - a} = -1$$

$$-\frac{0.5t}{2t} \cdot \frac{7t}{4a} = -1$$

$$\frac{7t}{16a} = 1 \quad \alpha = \frac{7t}{16}$$

מרכז המעגל הוא $(\frac{7t}{16}, 0)$



2. נתונים שני מישורים: $\pi_1: z - 3 = 0$, $\pi_2: ay + z - 8 = 0$, a הוא פרמטר שונה מ-0.

הזווית בין המישורים היא 45° .

א. מצא את הערכים האפשריים בעבור הפרמטר a .

הנקודה $A(2, -2, 6)$ נמצאת על אחד המישורים הנתונים. מן הנקודה A הורידו אנך למישור האחר.

האנך חותך את המישור האחר בנקודה B .

ב. מצא את אורך הקטע AB .

ג. ℓ הוא ישר החיתוך בין שני המישורים π_1 ו- π_2 .

ד. מצא את ההצגה הפרמטרית של ℓ .

הנקודה B העבירו אנך לישר ℓ . האנך חותך את הישר ℓ בנקודה C .

ז. מצא את שטח המשולש ABC (תוכל לסרטט את המשולש במערכת צירים לשם כך).

15. סוגיית יין מישורים מחושבים כך: $\cos \alpha = \frac{|\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2|}{|\underline{h}_1| |\underline{h}_2|}$
 כאשר $\underline{h}_1$ הוא הווקטור $\underline{h}_1 = (0, 0, 1)$ ו- $\underline{h}_2$ הווקטור $\underline{h}_2 = (a, 1, 1)$.
 נתון: $\alpha = 45^\circ$

$$\cos(45^\circ) = \frac{|(0, 0, 1) \cdot (a, 1, 1)|}{|(0, 0, 1)| |(a, 1, 1)|}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1+1}} |1| \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{a^2+1} \rightarrow a^2+1=2 \rightarrow \boxed{a=\pm 1}$$

עבור $a=1$: $\pi_2: y+z-8=0$ אין

עבור $a=-1$: $\pi_2: -y+z-8=0$ אין

הנקודה $A(2, -2, 6)$ נמצאת על π_2 שמקבל עבור $a=-1$

האנך מנקודה A למישור π_2 , מקבל לציב z (כי הווקטור $\underline{h}_2$ במישור

זה הוא $\frac{1}{2}$) ולכן גופה מנקודת A למישור π_2 ושני יק א

שיעור ה- z . שיעור ה- z בנקודה A הוא 6 ושיעור ה- z ב

בנקודה B הוא 3 ולכן המרחק הוא 3 ונקודה B היא $(2, -2, 3)$

* ניתן לחשב את המרחק גם ע"י נוסחה מרחק נקודה A למישור π_2 :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

כך: $a=0$ $b=0$ $c=1$ $d=-3$

$$x_0=2 \quad y_0=-2 \quad z_0=6 \quad d=?$$

$$d = \frac{|0+0+6-3|}{\sqrt{0+0+1}} = 3$$

לסיכום: מרחק A מ- B הוא 3



2. נכנסים ד"ר שני במישורים למתוך מערכת עם מנה
 סמבטא 2 נקודות עם ישר החתך.

$$\begin{cases} \pi_1: z-3=0 & z=3 \\ \pi_2: -y+z-8=0 \end{cases}$$

$$\pi_1 \rightarrow \pi_2 \quad -y+3-8=0 \rightarrow -y=-5$$

3. הנקודות עם ישר החתך הן מהצורה $(x, -5, 3)$
 א-ש-ע-י-א נ"ס-ע-ת-ו-ר כ-י-צ-ו-נ-ו.

הכנס $(0, -5, 3)$! $(1, -5, 3)$ נמצאים עם ישר

החתך. וקטור הכיוון הוא $(1, 0, 0)$.

(הישר מקבל צביון ג)

$$l: \underline{x} = (0, -5, 3) + t(1, 0, 0)$$

3. המישור $z=3$ הוא מישור מקביל למישור $[xy]$

ישר החתך שמצאנו בסעיף קודם מקבל צביון ג ואילו המישור

$z=3$ נקודה ב-גם כן במישור. ה"כ-ה עם

המישור $z=3$ מתקוזה ב-קאנק ע"י-ר החתך

היא ה"כ-ה מקביל ל-צביון ג, וכן. המרחק בין
 נקודות ג ! הוא הסך-ש-ע-ו-י-ג בין

ב-ג-ש-ע-ו-י-ג של הנקודות עם ישר החתך.

$z=3$ ו-ש-ע-ו-י-ג ה-ג עם ישר החתך הוא 5-

חכן המרחק בין ב-ג-ש-ע-ו-י-ג הוא 3.

$$S_{\Delta} = \frac{d_{BC} \cdot d_{AB}}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4.5$$

* צרך נוסבר ל-פגור אל הסעיף הנ"ל:

CD ישר החתך בין המישורים

AB אנק-ל-ש-ע-ו-י-ג π_1

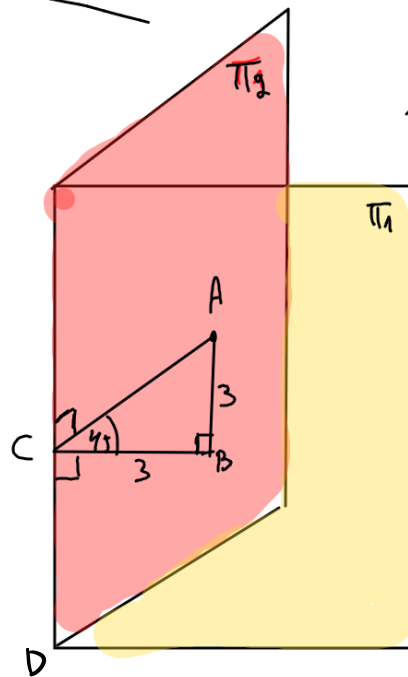
BC אנק-ל-ש-ע-ו-י-ג החתך ומ"כ במישור π_2

BC הוא ההי"ש של AC עם פני מישור π_1



ע"ס משפט שטח האנכים, מאחר והיחס בין BC מאונך
 ע"ס AC הוא 3 משפט AC מאונך ע"ס BC הוא 3 .
 ע"ס BC הוא 3 משפט BC מאונך ע"ס AC הוא 3 .
 ΔABC הוא ישר שווה זווית, $CB=AB=3$

$$S_{\Delta} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4.5$$



3. נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$z_1 = (2a^2 + 5a + 4) + (2a^2 + 3a + 2)i$$

$$z_2 = (a^2 + 8a + 8) + (2 - a^2 + 2a)i$$

 a הוא פרמטר ממשי.

 א. מצא את הערך של a שבעבורו המספרים z_1 ו- z_2 צמודים זה לזה.

 הצב את הערך של a שמצאת, וענה על הסעיפים ב-ג.

 נתונים המספרים: $w_1 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$, $w_2 = \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$. n הוא מספר טבעי.

 ב. הוכח כי לכל n טבעי:

 (1) המספר w_1 הוא מספר ממשי.

 (2) המספר w_2 הוא מספר מדומה טהור.

 ג. נתונה המשוואה: $|z - p| = m$. p ו- m הם פרמטרים ממשיים, z הוא מספר מרוכב.

 מה הם הערכים של p ו- m שבעבורם המשוואה הנתונה מתארת מעגל במישור גאוס שעליו נמצאים המספרים

 w_1 ו- w_2 לכל n טבעי? נמק.

 ט. נניח שניתן בחלקים הראשונים להציג את z_1 ו- z_2 כחלקים הטרנזיטורים.

$$\begin{cases} \text{I} & 2a^2 + 5a + 4 = a^2 + 8a + 8 \\ \text{II} & 2a^2 + 3a + 2 = -(2 - a^2 + 2a) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a^2 - 3a - 4 = 0 \\ & (a-4)(a+1) = 0 \\ & a=4 \quad a=-1 \\ \text{II} & a^2 + 5a + 4 = 0 \\ & (a+4)(a+1) = 0 \\ & a=-4 \quad a=-1 \end{array}$$

נניח שראוי ונראה ש- $a=-1$ נותן פתרון נכון לכל n ולכן $a=-1$ הוא הפתרון.

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis}(45^\circ)$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \operatorname{cis}(-45^\circ)$$

$$w_1 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n} = \left(\frac{\sqrt{2} \operatorname{cis}(45^\circ)}{\sqrt{2}}\right)^{4n} = (\operatorname{cis} 45^\circ)^{4n} = ((\operatorname{cis} 45^\circ)^4)^n = (\operatorname{cis} 180^\circ)^n$$

$$w_1 = (-1)^n = \text{ממשי}$$

$$w_2 = \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2} = \left(\frac{\sqrt{2} \operatorname{cis}(-45^\circ)}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2} = (\operatorname{cis}(-45^\circ))^{4n} \cdot (\operatorname{cis}(-45^\circ))^2$$



$$\omega_2 = ((\text{cis}(-45))^\pi)^\pi \cdot \text{cis}(90) = (\text{cis}(-180))^\pi \cdot (-i) = (-1)^\pi \cdot -i =$$

$$\omega_2 = (-1)^{\pi^2} \cdot i = \text{נצטרך}$$

$$|z-p|=m$$

$$|x+yi-p|=m$$

$$|(x-p)+yi|=m$$

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=m$$

$$(x-p)^2+y^2=m^2$$

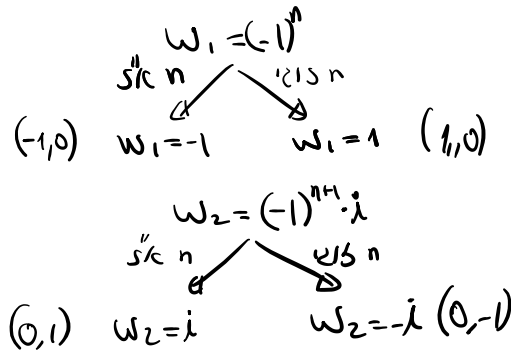
$$(p,0) \text{ נמצא שם}$$

$$m \text{ רדיוס}$$

הבעיה היא כיצד נבחר את ω_1 ו- ω_2 ?

יש לנו ω_1 ו- ω_2 ונצטרך לבדוק.

$$\boxed{p=0, m=1}$$





4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + m}{4}$. m הוא פרמטר.

ידוע כי הישר $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את m .

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)} + 1$.

ג. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון פרמטר t בתחום $0 < t < \ln 4$.

ה. מצא את הערך של t שבעבורו ערך הביטוי $\int_0^t g(x) dx$ הוא מקסימלי. נמק את תשובתך.

1.1. כתוב תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$: $[x, \infty)$ משלי.

2.1. מהקובץ x כולאי האגדרה של הפונקציה $f(x)$ ניתן למיין כי יש לה אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x עבור $x \rightarrow -\infty$. נראה זאת:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{2x} - 3e^x + m}{4} \right) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0 + m}{4} = \frac{m}{4}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$

המשל קצת הבא...



כלומר $y = \frac{m}{4}$ הינו היטלוי גאסימטוטי המקבילי

לכיוון $x \rightarrow -\infty$ הפונקציה $f(x)$ עקור $x \rightarrow -\infty$.

נשווה עישר הנחין: $y = -1$

$$\frac{m}{4} = -1 \Rightarrow \boxed{m = -4}$$

הארה: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x)^2 - 3e^x + m}{4} = \infty$

כיוון ש $(e^x)^2$ שואף ל ∞ יותר מהר מכל שאר החזקות.

כלומר עקור $x \rightarrow \infty$ אין אסימטוטי מקבילי לכיוון x של $f(x)$.

3. חיתוך עם הציר של גרף הפונקציה $f(x)$:

חיתוך עם ציר ה- x : (ציר $m = -4$)

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x - 4}{4} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\frac{e^{2x} - 3e^x - 4}{4} = 0 \quad / \cdot 4$$

$$e^{2x} - 3e^x - 4 = 0 \Rightarrow (e^x)^2 - 3e^x - 4 = 0$$

$$(e^x - 4)(e^x + 1) = 0$$

היטלוי חידוי של x משלי

$$e^x - 4 = 0 \quad / + 4$$

$$e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$$



$$(h4, 0)$$

3.1. הנקודה... חיתוך עם ציר x:

חיתוך עם ציר y:

$$f(0) = \frac{e^{2 \cdot 0} - 3 \cdot e^0 - 4}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(0, -1.5)$$

4.1. נקודות קיצון של $f(x)$:

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x - 4}{4}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 3e^x}{4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2e^{2x} - 3e^x}{4} = 0 \quad / \cdot 4$$

$$2e^{2x} - 3e^x = 0$$

$$e^x(2e^x - 3) = 0$$

↑
חיתוך עם ציר x

$$2e^x - 3 = 0 \quad / +3$$

$$2e^x = 3 \quad / :2$$

$$e^x = \frac{3}{2}$$

$$x = \ln \frac{3}{2}$$

נציור עם גרף:

$$f''(x) = \frac{4e^{2x} - 3e^x}{4}$$



$$x = h^{\frac{3}{2}} \quad \text{נ.ק.}$$

$$f''(h^{\frac{3}{2}}) = \frac{4 \cdot e^{2 \cdot h^{\frac{3}{2}}} - 3 \cdot e^{h^{\frac{3}{2}}}}{4} = \frac{4 \cdot \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2}}{4} = \frac{4.5}{4} > 0$$

סבן נקל לראות כי עבור $x = h^{\frac{3}{2}}$ לא נמצא נקודה קיצונית מסוג מנימוס.

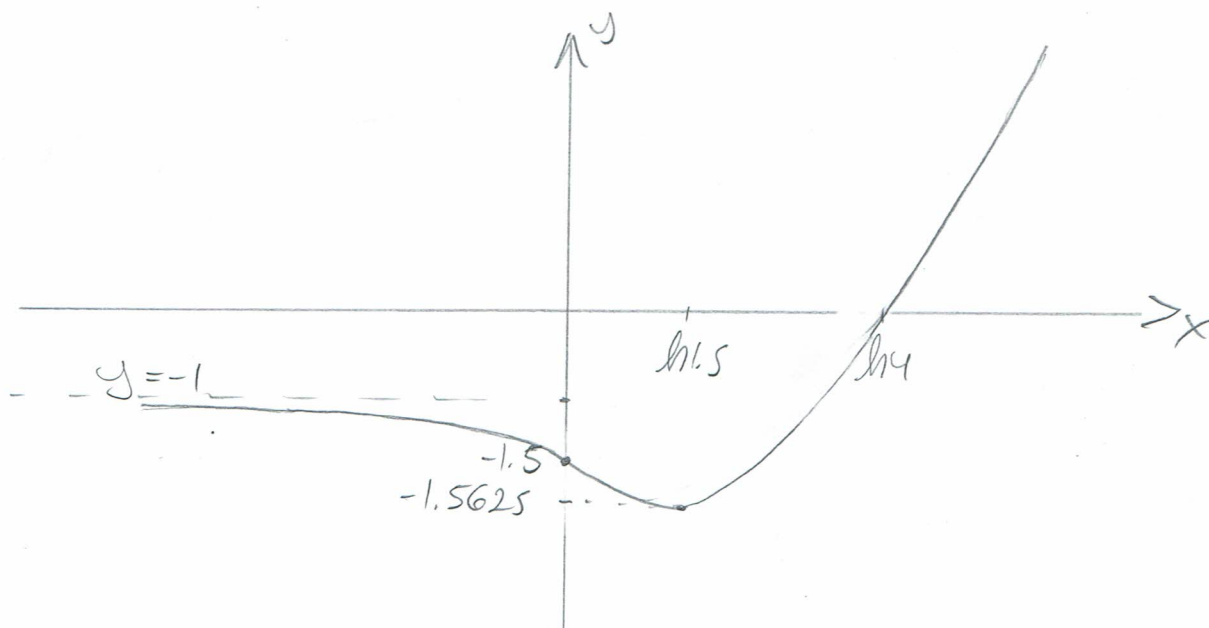
נחשב את ערך הפונקציה בנקודה הקיצונית:

$$f(h^{\frac{3}{2}}) = \frac{e^{2 \cdot h^{\frac{3}{2}}} - 3 \cdot e^{h^{\frac{3}{2}}} - 4}{4} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 4}{4} = -\frac{25}{16}$$

נקודה הקיצונית:

$$\left(h^{\frac{3}{2}}, -\frac{25}{16} \right)_{\min}$$

ד. סימול סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:



$$f(x) = \frac{1}{f(x)} + 1 \quad \text{נשנה הפונקציה}$$

ע.ו. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$
 נדרוש: הנקודה $f(x)$ שונה מאפס:

$$f(x) \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} \text{הפונקציה} \\ f(h_4) = 0 \end{matrix} \quad \boxed{x \neq h_4}$$

ע.2. משוואה אסימפטוטית מאונכת - נניח של $f(x)$:

מאונכת לניי x : תחום ההגדרה של $f(x)$ $\boxed{x = h_4}$
 ערך זה של x מאפס נקודה של $f(x)$ אך לא את הנקודה
 ואכן נובל לקבוע כי זוהי אסימפטוטה של $f(x)$.

מאונכת לניי y :
 עקור $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \infty$$

ואם פירוש הסעיף קודם

עכ $\boxed{y=1}$ אסימפטוטה מאונכת לניי y של $f(x)$ עקור $x \rightarrow \infty$

עקור $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right) = \frac{1}{-1} + 1 = 0$$

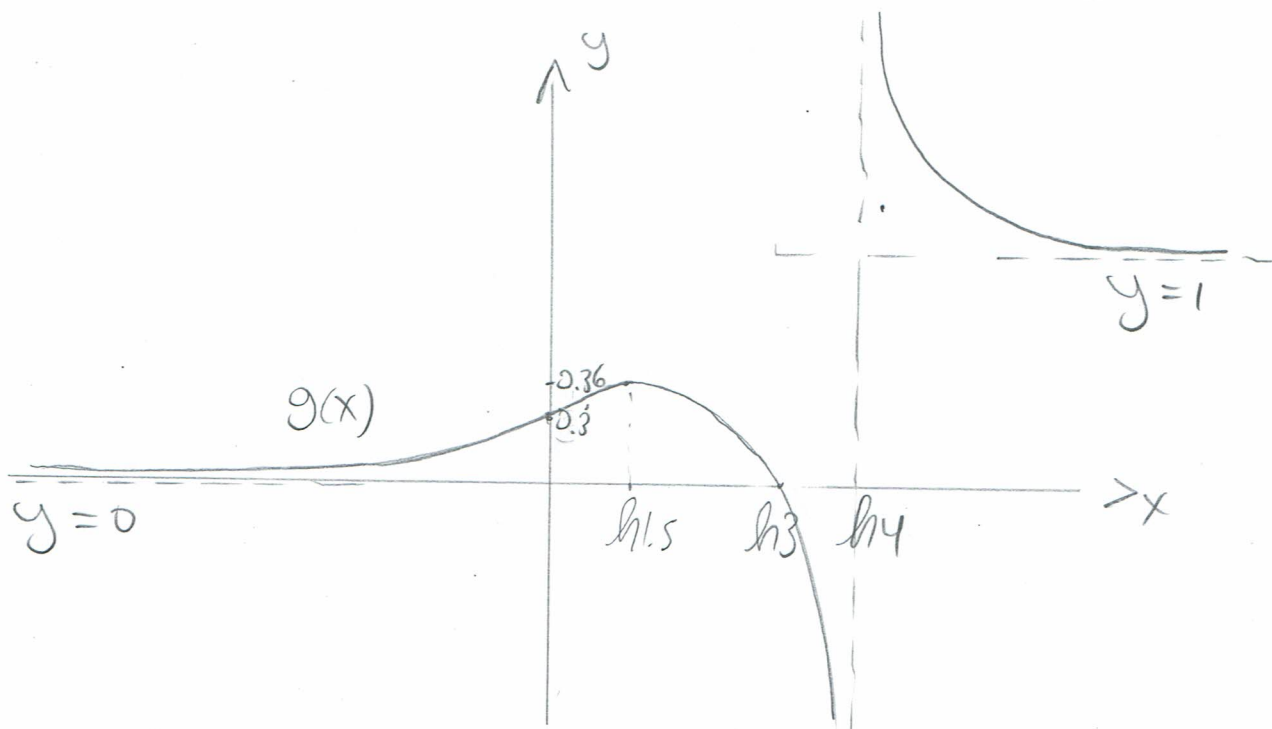
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = -1$$

ואם פירוש הסעיף קודם

עכ $\boxed{y=0}$ אסימפטוטה מאונכת לניי y של $f(x)$ עקור $x \rightarrow -\infty$



ד. סקירה של גיל הפונקציה $g(x)$:



הסדר לשלולית הערך: הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ גינת הפונקציה $f(x)$ - $f(x)$ עבור גיל זה מתהפכת תחומי הערכים והירידה של $f(x)$ (עבור $x \neq 4$)
 הסדר אנליטי: $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$

כאן סעיף הקציון הפוך. עבור $x=1.5$.
 בנוסף ישנה הערה של 1 יח' אנכית - גליל ג-י.

כאן ערך הקציון: $g(1.5) = \frac{1}{f(1.5)} + 1 = -\frac{1}{25} + 1 = \frac{24}{25} = 0.36$

חיזוק ערך גיל ג: $g(0) = \frac{1}{f(0)} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = 0.3$

חיזוק ערך גיל X: $g(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -1 \Rightarrow f(x) = -1$

המשך הערה הבאה...





$$f(x) = -1$$

3. המלך...

$$\frac{e^{2x} - 3e^x - 4}{4} = -1 \Rightarrow e^{2x} - 3e^x - 4 = -4$$

$$e^{2x} - 3e^x = 0$$

$$e^x \cdot (e^x - 3) = 0$$

↑
חיזוק של x ממשי



$$e^x - 3 = 0 \quad | +3$$

$$e^x = 3$$

$$x = \ln 3$$

ה. נתון פונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 3$ בתחום $0 < x < 4$

למצוא את ערכי x בהם הפונקציה שווה לאפס.

$$\int_0^4 f(x) dx$$

הוא מקסימלי.

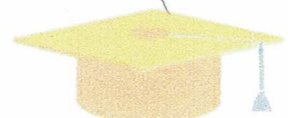
הקטין מביא את ערך הפונקציה למינימום. נבדוק את ערכי x בהם הפונקציה שווה לאפס.

מציא נקודה נוספת בה הפונקציה שווה לאפס. נקודה זו היא $x = 3$.

כעת ייתכן של $f(x)$ יש ערך מינימום בנקודה $x = 2$. נבדוק את ערכי x בהם הפונקציה שווה לאפס.

נמצא את הנקודה בה הפונקציה שווה לאפס. נבדוק את ערכי x בהם הפונקציה שווה לאפס.

פונקציה זו היא פולינום של מעלה 2. נבדוק את ערכי x בהם הפונקציה שווה לאפס. נמצא את הנקודה בה הפונקציה שווה לאפס.



5. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{(\ln(x))^2 - 1}$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

$$\ln^2 x - 1 \neq 0$$

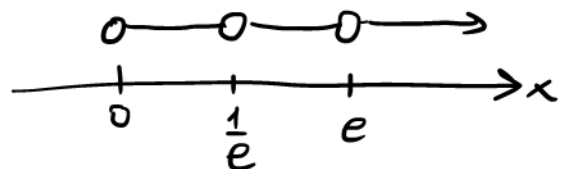
$$\ln^2 x = 1$$

$$\ln x = 1 \quad \ln x = -1$$

$$x = e \quad x = \frac{1}{e} \approx 0.37$$

ב. (1) תחום ההגדרה: $x > 0$

$$x > 0 \text{ וגם } x \neq e \text{ וגם } x \neq \frac{1}{e}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

נקודה א' - הגדרה (0,1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

ב. (2) אסימטות אנכיות
 $x = \frac{1}{e}$, $x = e$
 אסימטות אופקיות
 $y = 1$

ב. (3)

$$f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} (\ln^2 x - 1) - \ln^2 x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln^2 x - 1)^2}$$

$$= \frac{2 \ln x (\ln^2 x - 1 - \ln^2 x)}{x (\ln^2 x - 1)^2} = \frac{-2 \ln x}{x (\ln^2 x - 1)^2}$$



$$f'(x) = \frac{-2 \ln x}{x(\ln^2 x - 1)^2} = 0 \quad \ln x = 0$$

$$x = 1$$

x	0	≈ 0.37	$\frac{1}{e}$	1	e	
$\hat{f}$	///	+	///	+	0	-
f	///	↗	///	↗	max	↘
						///
						↘

$$f'(\frac{1}{2}e) = +$$

$$f'(2) = -$$

$$f'(\frac{1}{2}) = +$$

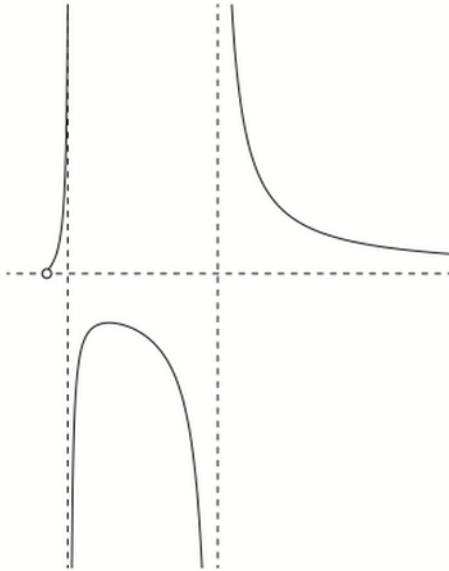
$$f'(e^2) = -$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 < x < \frac{1}{e}, & \frac{1}{e} < x < 1 \\ 1 < x < e, & x > e \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{תאומי צמיחה} \\ \text{תאומי ירידה} \end{array} \right\}$$

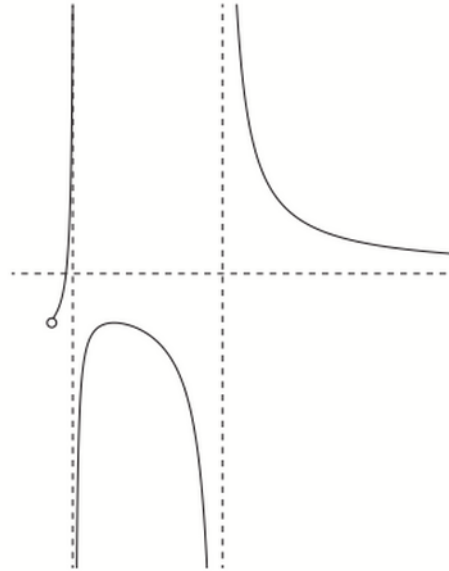


ב. לפניך שלושה גרפים שבהם לא מסומנים הצירים x ו- y . הקווים המרוסקים מייצגים את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, והעיגול הריק מייצג נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת. קבע איזה מן הגרפים מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$, העתק אותו למחברתך, והוסף בו את מערכת הצירים. פרט את שיקולך.

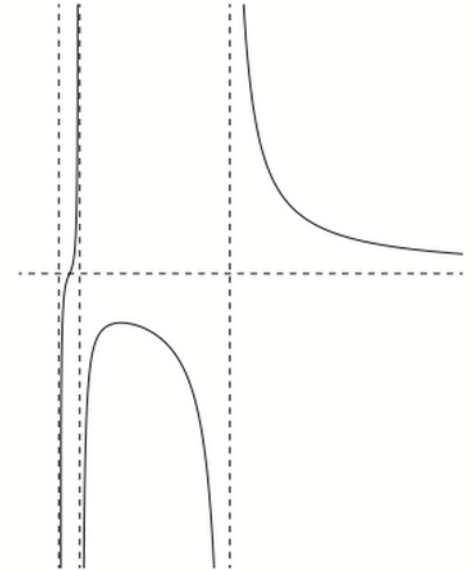
גרף ג



גרף ב



גרף א



משוואה: $y=1$.

סימוליס:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

האסימפטוטה האופקית היא $y=1$ ונקודה
 אי ההגדרה היא $(0,1)$, ציטטו אותה צדק y .



- ג. (1) האם יש פתרון למשוואה $f(x) = 1$? נמק את תשובתך.
 (2) מהו הערך של k שבעבורו יש למשוואה $f(x) = k$ פתרון יחיד? נמק את תשובתך.

ז. (1) אין פתרון למשוואה.

נניח 1 : אין פתרון הפונקציה חייבת ע"מ הישר $y=1$
 לבדוק

נניח 2 : $f(x) = 1$ $\frac{\ln^2 x}{\ln^3 x - 1} = 1$

$$\ln^2 x = \ln^3 x - 1$$

$$-1 = \ln^3 x - \ln^2 x$$

ז. (2) פתרון יחיד יתקבל כך כאשר הישר $y = k$

ישיב פתרון הפונקציה חייבת חתוך היקסימום

$$f(1) = \frac{\ln^2(1)}{\ln^3(1) - 1} = \frac{0}{0-1} = 0 \quad \max(1, 0)$$

$$k = 0$$



נתונות הפונקציות: $g(x) = \frac{1}{f(x)-1}$, $h(x) = (\ln(x))^2 + 1$

נסמן מלבן ABCD. הנקודות A ו-B הן שתי נקודות על ציר ה-x שבהן הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת. הנקודות C ו-D נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.
 ד. מהו שטח המלבן ABCD? נמק את תשובתך.

נתון: ההזכרה של $g(x)$ היא $x > 0$, $x \neq e$, $x \neq \frac{1}{e}$
 ונתון: ההזכרה של $h(x)$ היא $x > 0$
 לכן הנקודות A ו-B הן $(\frac{1}{e}, 0)$, $(e, 0)$

$$h\left(\frac{1}{e}\right) = (-1)^2 + 1 = 2 \qquad AB = e - \frac{1}{e}$$

$$h(e) = 1^2 + 1 = 2 \qquad AC = BD = 2$$

$$S_{ABCD} = 2\left(e - \frac{1}{e}\right) \approx 4.7$$

