

פתרון הבחינה במתמטיקה

חורף תשפ"ב, 2022, שאלון: 35581

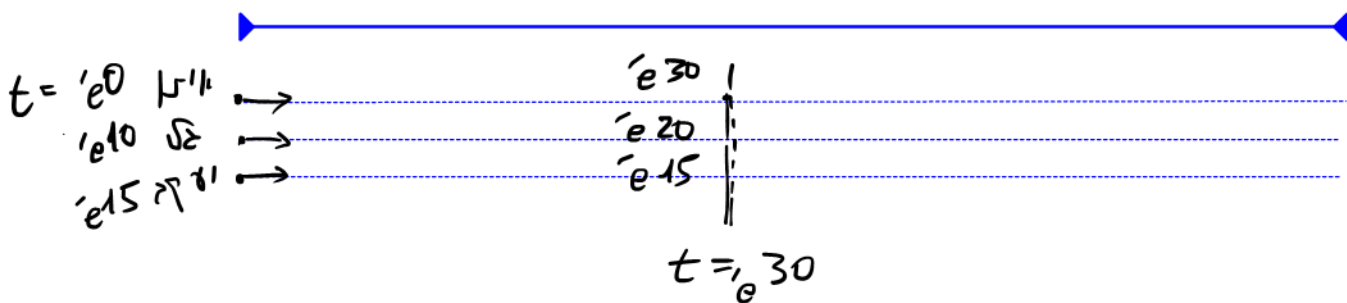
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. שלושה שחיינים – איתן, גל ויעקב – מתאמנים בשחייה בבריכה שאורכה 50 מטרים.
- כל שחיין מתחיל את שחייתו בתחילת הבריכה, שוחה עד סוף הבריכה, ומייד מסתובב ושוחה חזרה לתחילת הבריכה. מהירות השחייה של כל אחד מן השחיינים היא קבועה.
- ביום א' התחיל כל אחד משלושת השחיינים את שחייתו בזמן אחר.
- גל התחיל לשחות 10 שניות אחרי איתן.
- יעקב התחיל לשחות 15 שניות אחרי איתן.
- 15 שניות אחרי שהתחיל יעקב לשחות, עברו כל השחיינים את אותו המרחק מתחילת הבריכה, אך עדיין לא הגיעו לסוף הבריכה.
- מייד לאחר שהגיע גל לסוף הבריכה, הוא הסתובב והתחיל לשחות חזרה לתחילת הבריכה. בדרכו חזרה, הוא פגש את איתן במרחק של 4 מטרים מסוף הבריכה.
- א. חשב את המהירות של כל אחד משלושת השחיינים.
- ב. במרחק של כמה מטרים מסוף הבריכה נפגשו איתן ויעקב בפעם השנייה?
- ביום ב' התחילו גל ויעקב את שחייתם באותו זמן בתחילת הבריכה, וכל אחד מהם שחה באותה מהירות שבה שחה ביום א'. כשהגיע כל אחד משני השחיינים לסוף הבריכה, הוא הסתובב מייד ושחה לכיוון תחילת הבריכה, וכשהגיע לשם, הסתובב שוב ושחה לכיוון סוף הבריכה, וחוזר חלילה. שני השחיינים הפסיקו לשחות ברגע שהם נפגשו בתחילת הבריכה.
- ג. כמה מטרים שחה יעקב ביום זה?

 ~ 50


a, b, c מהירותיהם של איתן, גל ויעקב בהתאמה

$$30a = 20 \cdot b = 15 \cdot c$$



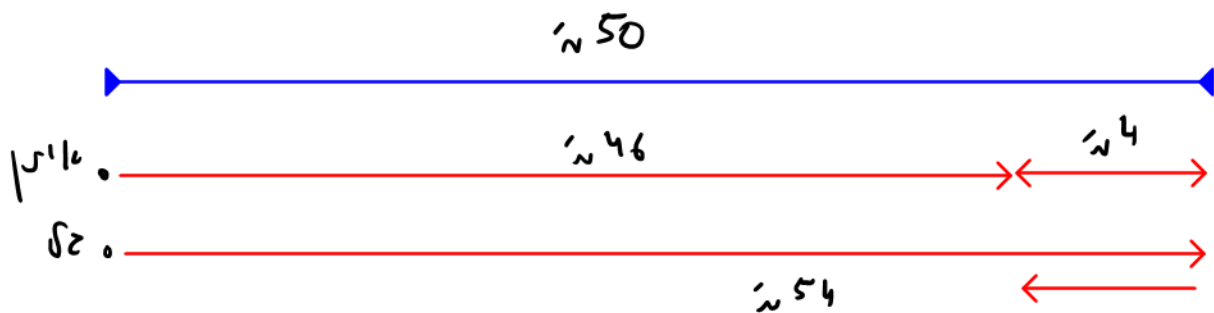
$$30a = 20b = 15c \quad (\div 5) \Rightarrow 3c = 4b = 6a$$

$$3c = 5a$$

$$4b = 6a$$

מייד לאחר שהגיע גל לסוף הבריכה, הוא הסתובב והתחיל לשחות חזרה לתחילת הבריכה. בדרכו חזרה, הוא פגש את איתן במרחק של 4 מטרים מסוף הבריכה.

א. חשב את המהירות של כל אחד משלושת השחינים.



זמן (s)	מהירות (m/s)	מרחק (m)	שחיין
46	a	$\frac{46}{a}$	איתן
54	b	$\frac{54}{b}$	גל

הפסג
זמן
6
10
סליו

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{46}{a} = \frac{54}{b} + 10 \\ 4b = 6a \quad b = 1.5a \end{array} \right.$$

$$\frac{46}{a} = \frac{54}{1.5a} + 10$$

$$\frac{54}{1.5} = 36$$



$$\frac{46}{a} = \frac{36}{a} + 10$$

$$3c = 6a$$

$$\frac{10}{a} = 10$$

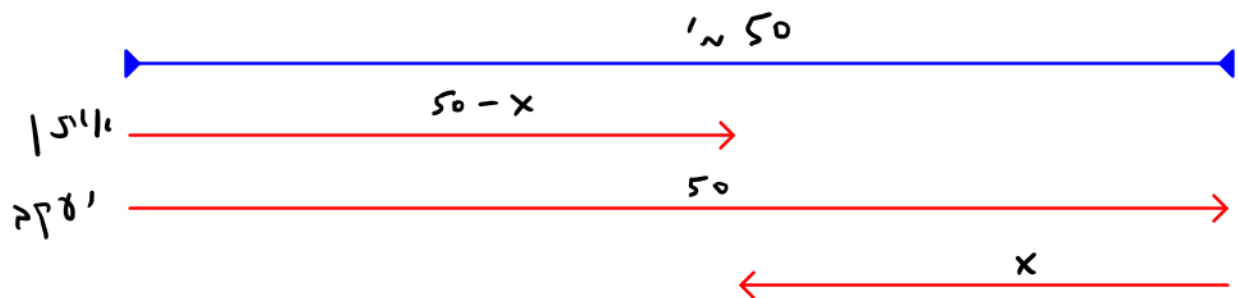
$$a = \frac{1}{\text{שנייה}} \quad b = 1.5 \text{ מל"ש}$$

$$c = 2a$$

$$c = 2 \text{ מל"ש}$$

מהירות של איטן היא 1 מל"ש, קל על 1.5 מל"שניים ושל יעקב 2 מל"שניים

ב. במרחק של כמה מטרים מסוף הבריכה נפגשו איתן ויעקב בפעם השנייה?



ש	מל"שניים	t	
50 - x	1	$\frac{50-x}{1}$	איטן
50 + x	2	$\frac{50+x}{2}$	יעקב

לפני
זמנים
15
שניות

$$\frac{50+x}{2} + 15 = \frac{50-x}{1}$$

$$50 + x + 30 = 100 - 2x$$

$$3x = 20$$

$$x = 6\frac{2}{3} \text{ מל"ש}$$

יעקב ואיטן נפגשו
קבוצת השניים
במרחק $6\frac{2}{3}$ מל"ש
מסוף הבריכה



ביום ב' התחילו גל ויעקב את שחייתם באותו זמן בתחילת הבריכה, וכל אחד מהם שחה באותה מהירות שבה שחה ביום א'. כשהגיע כל אחד משני השחינים לסוף הבריכה, הוא הסתובב מייד ושחה לכיוון תחילת הבריכה, וכשהגיע לשם, הסתובב שוב ושחה לכיוון סוף הבריכה, וחוזר חלילה. שני השחינים הפסיקו לשחות ברגע שהם נפגשו בתחילת הבריכה.

ג. כמה מטרים שחה יעקב ביום זה?

$$\frac{c}{b} = \frac{2}{1.5}$$

יחס מהירותים הוא $2:1.5$
 גל יעקב

בין כזם שיעקב ימצא לתחילת הבריכה
 גל יסחה 1.5 פעמים את אורך הבריכה.

יעקב	גל
2	1.5
4	3
6	4.5
8	6

כגור כדיבור
 שלמה

יעקב יסחה 8 כדיבור
 וגל יסחה 6 כדיבור

דין אל
 נכנסו בתחילת
 הבריכה

ביום זה יעקב סחה 400 מטר



2. נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$, וקפרשה d . מסמנים ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A, לכל n טבעי. מגדירים סדרה נוספת, B, שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, \dots$. איברי הסדרה B מקיימים $b_n = S_{n+1} - S_n$, לכל n טבעי.

א. (1) האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמק.

(2) האם הסדרה B זהה לסדרה A? נמק.

מסמנים ב- T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B, לכל n טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \dots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d}$$

$$\text{נתון: } b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$$

$$T_5 = -20$$

ג. חשב את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי-זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי שלם? נמק.

א. (1) האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמק.

$S_{n+1} - S_n$ נגזר אל a_{n+1} שהוא איבר
 ב- S_n בסדרה חשבונית קבוע כמובן
 להסדרה B סדרה חשבונית.

(2) האם הסדרה B זהה לסדרה A? נמק.

א. הסדרה חשבונית.

אך הפרש S זהה.
 (B היא הסדרה A)

$$b_n = a_{n+1}$$

$$b_1 = a_2 \quad \text{כמובן}$$

$$b_2 = a_3$$

$\vdots$



ב. הוכח כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \dots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d}$$

נמאנו והסדרה B היא סדרה חשבונית.
 כעבור נניח סדרה A.

$$b_1 - b_2 = -d$$

$$b_3 - b_4 = -d$$

$$\vdots$$

$$b_{n-1} - b_n = -d$$

נניח:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(-d) + (b_3 + b_4)(-d) + \dots + (b_{n-1} + b_n)(-d)}{-d}$$

$$T_n = \frac{(-d)[b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_{n-1} + b_n]}{(-d)}$$

$$T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$$

 ג. חשב את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

$$b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{29}^2 - b_{30}^2 = -95$$

$$T_5 = -20$$

נניח a ו b הם למשל קבועים

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$T_n = \frac{b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{n-1}^2 - b_n^2}{-d}$$





אם (3 יב $n=40$, n כן כן :

$$T_{40} = \frac{b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{39}^2 - b_{40}^2}{-d}$$

$$T_{40} = \frac{-95}{-d} = \frac{95}{d}$$

- נתאם את סכום סדרה ראשונה T_{40}

(נוסחה סכום סדרה חסומה ושלל T_{40} :

$$I \quad \frac{40(2b_1 + 39d)}{2} = \frac{95}{d}$$

איב ראשון: b_1

הפרש: d

כמות: 40

- כעס נתאם את סכום 5 האיברים הראשונים

נ. נוסחה סכום ושלל T_5 :

$$II \quad \frac{5(2b_1 + 4d)}{2} = -20$$

איב ראשון: b_1

הפרש: d

כמות: 5

- כעס נתאם את הממוצע

$$II \quad 2b_1 + 4d = \frac{-20 \cdot 2}{5}$$

$$2b_1 + 4d = -8$$

$$2b_1 = -8 - 4d$$

(3 יב ראשון ושלל I

$$\frac{40(-8 - 4d + 39d)}{2} = \frac{95}{d}$$

$$20(35d - 8) = \frac{95}{d} \quad | :5 \quad | d$$



$$4d(35d-8)=19$$

$$140d^2 - 32d - 19 = 0$$

$$\boxed{d = \frac{1}{2}} \quad d = \frac{-19}{20}$$

נסת
A סביר אולי!

$$b_1 = -4 - 2d$$

$$b_1 = -4 - 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{b_1 = -5}$$

סכיבום :

הערש הסדרה : $\frac{1}{2}$

איבר ראשון בסדרה B : $b_1 = -5$

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי שלם? נמק.

אנחנו יוצאים ? $b_1 = a_2$

ניבץ שהאיבר הראשון בסדרה A הוא

$$a_1 = -5.5$$

נבדוק כמה איברים עלינו לסכום על-מנת

שהסכום יתאפס, וכך נסיק מה כמה האיברים

יש לחבר על-מנת שיהיה סכום יצא חיובי שלם.

$$0 = \frac{n(2 \cdot (-5.5) + (n-1) \cdot 1)}{2} \quad a_1 = -5.5$$

הערש : 1

$$0 = -11 + n - 1$$

כמה : n

$$12 = n$$

כאשר סוממים 12 איברים הסכום הוא אפס.

$$a_{13} = a_1 + 12d = 6.5$$

$$a_{14} = a_1 + 13d = 7.5$$

מאחר והאיברים בסדרה אנם שלמים, עלינו להוסיף עוד שני איברים על-מנת שהסכום יהיה חילוי (שלם). סכיבום: 14 איברים

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

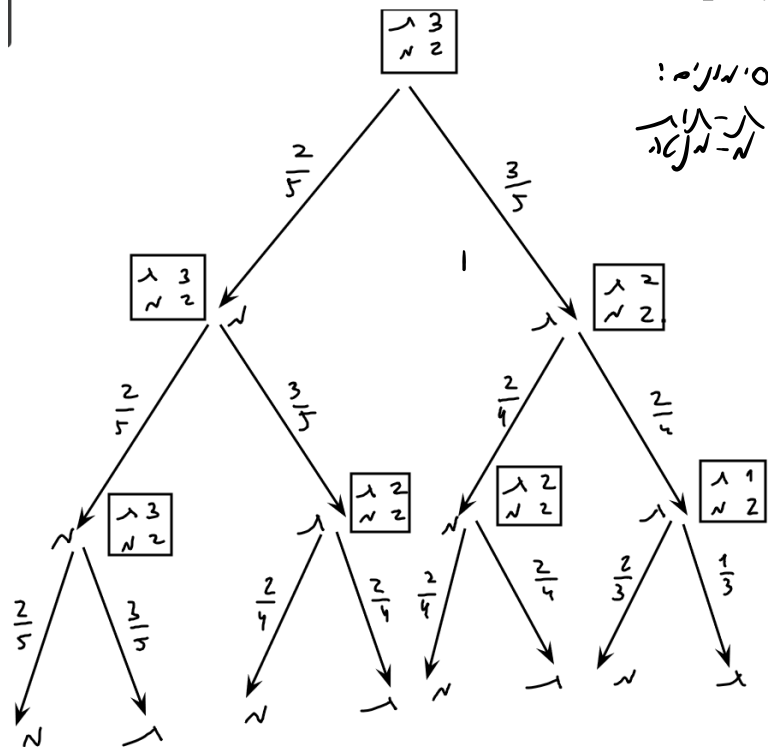
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.

אל תתפשר עליה.



3. בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה. ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה. אם הסוכרייה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה, ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.
- א. ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.
- (1) חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.
- (2) חשב את ההסתברות שליאור אכל את הסוכרייה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.
- ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה. הבע בעזרת n את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.
- ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה. ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה. חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

נסתח בתיאור גרפי: $p(\text{סוכרייה}) = \frac{2}{5}$ ויאל גבע



$$p\left(\binom{3}{1}\right) = p\left(\binom{1}{1}\right) + p\left(\binom{2}{1}\right) + p\left(\binom{2}{1}\right) \quad (1) / c$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{183}{500} = 0.366$$

הסתברות שאכל יאכל בדיוק סוכרייה אחת היא 0.366



א (2) המסלולים האפשריים הם המסלולים שמכילים גור אחד ושני מנכ"ר. המסלול הנדרש מתוכם הוא מנכ"ר מנכ"ר

$$P\left(\frac{\text{אכל} / \text{השנה}}{\text{סוכריה אחר}}\right) = \frac{P\left(\frac{\text{אכל}}{\text{השנה}}\right)}{P\left(\frac{\text{אכל}}{\text{השנה}}\right) + P\left(\frac{\text{סוכריה}}{\text{השנה}}\right) + P\left(\frac{\text{גור}}{\text{השנה}}\right)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}}{0.366} = \frac{20}{61}$$

הסתברות של אכל גור בשנה, בהינתן שאכל סוכריה בנצח, היא $\frac{20}{61}$

ב הסיכוי של אכל סוכריה אחר לפרט אחד מתוך קבוצת אכל המסלולים בעל שתיים לפרט אחד אחד. גור מעביר גם במסלול בעל שני מנכ"ר המסלול השמאלי שמכיל רק מנכ"ר המסלול השמאלי הוא המאונץ הנדרש. בעל בן ח נזמין הסתברות המסלול שמכיל רק מנכ"ר היא $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ חזן המסלול הוא $1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

ג הסיכוי של אכל של שני סוכריה גור מקונסה כלשהי היא $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$ והסתברות של אכל של שני מנכ"ר היא $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

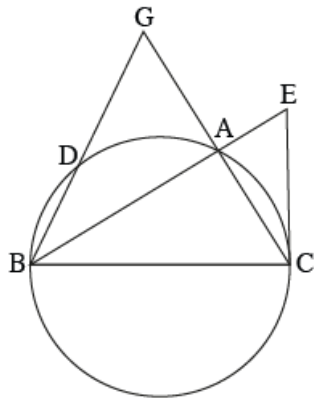
ה שני, ישנן 2 אופציות בקבוצה:

אופציה א': מקונסה א' נשלח 3 גור ומקונסה ב' 3 מנכ"ר אופציה ב': מקונסה א' נשלח 3 מנכ"ר ומקונסה ב' 3 גור

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{8}{25} + \frac{8}{25} \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{625}$$

ד סיכום: הסיכוי הנדרש בסוף הנ"ל הוא $\frac{8}{625}$





4. משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראה סרטוט).

הצלע BC היא קוטר במעגל.

AG הוא המשך הצלע CA.

הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D.

נתון: $GA = AC$.

א. הוכח כי הישר AB חוצה את $\angle GBC$.

ב. הוכח כי $\triangle GBC \sim \triangle GAD$.

נתון כי $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

ג. הבע באמצעות R את אורך הצלע AC.

דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E.

ד. חשב פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC.

מספר	טענה	נימוק
1	BC קוטר במעגל	נתון
2	$AC = GA$	נתון
3	AB תיכון לצלע GC במשולש GBC	הגדרת תיכון. לפי 2
4	$\angle BAC = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה 90° לפי 1
5	AB גובה לצלע GC במשולש GBC	הגדרת גובה לפי 4
6	משולש GBC שווה שוקיים ($BC = GC$)	משולש שבו התיכון מתלכד עם הגובה הוא משולש שווה שוקיים. לפי 3, 5
7	AB חוצה את זווית GBC	במשולש שווה שוקיים תיכון לבסיס הוא גם חוצה זווית הראש. לפי 3, 6
8	נעביר מיתר AD	בניית עזר
9	$\angle BGC = \angle AGD$	זווית שווה לעצמה
10	$\angle ADB = 180^\circ - \angle GCB$	במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות הוא 180°
11	$\angle GDA = 180^\circ - \angle ADB$	זוויות צמודות משלימות 180°
12	$\angle GDA = \angle GCB$	כלל המעבר
13	$\triangle GBC \sim \triangle GAD$	משפט דמיון ז.ז לפי 9, 12
14	$\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$	נתון
15	$S_{GBC} = S_{GAD} + S_{DBCA}$	חיבור שטחים
16	$\frac{S_{GBC}}{S_{GAD}} = 16$	חישוב. לפי 14, 15
17	$\frac{BC}{AG} = \frac{GC}{GD} = \frac{BG}{AD}$	יחס הצלעות המתאימות במשולשים דומים. לפי 13
18	$\left(\frac{BC}{AG}\right)^2 = 16$	יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הצלעות המתאימות. לפי 13, 16, 17
19	$\frac{BC}{AG} = 4$	חישוב. לפי 18

חישוב. לפי 1, 19	$AG = \frac{R}{2}$	20
לפי 2, 20	$AC = \frac{R}{2}$	21 מ.ש.ל ג'
נתון	CE משיק למעגל בנקודה C	22
משיק מאונך לרדיוס אל נקודת ההשקה. לפי 1, 22	$\angle BCE = 90^\circ$	23
לפי 4, 23	$\angle BCE = \angle BAC$	24
זווית שווה לעצמה	$\angle CBE = \angle CBA$	25
משפט דמיון ז.ז לפי 24, 25	$\triangle BCE \sim \triangle BAC$	26
יחס הצלעות המתאימות במשולשים דומים. לפי 26	$\frac{BC}{BA} = \frac{CE}{AC} = \frac{BE}{BC}$	27
משפט פיתגורס. לפי 4	$AB^2 + AC^2 = BC^2$	28
חישוב. לפי 1, 21, 28	$AB = \frac{\sqrt{15}}{2} R$	29
הצבה. לפי 27, 29	$\frac{2R}{\frac{\sqrt{15}}{2} R} = \frac{BE}{2R}$	30
חישוב	$BE = \frac{8}{\sqrt{15}} R$	31
יחס השטחים של משולשים בעלי גובה משותף שווה ליחס הבסיסים	$\frac{S_{BCE}}{S_{ABC}} = \frac{BE}{AB}$	32
חישוב. לפי 29, 31, 32	$\frac{S_{BCE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{15}$	33

5. AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O. המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F. המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הקוטר AB בנקודה E (ראה סרטוט).
נסמן: $\angle ADE = \alpha$.

א. הראה כי $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$.

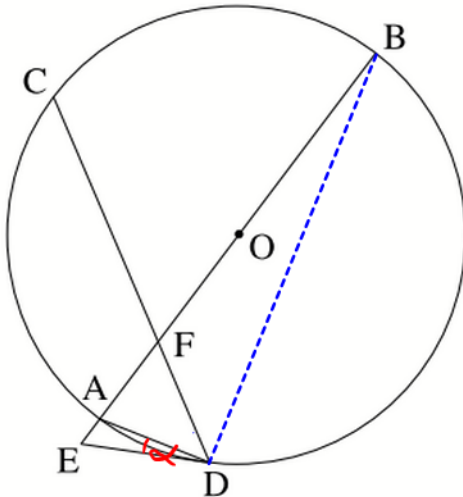
נתון כי $ED = FD$.

ב. הבע באמצעות α את גודל $\angle CDA$.

ג. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש AFD.

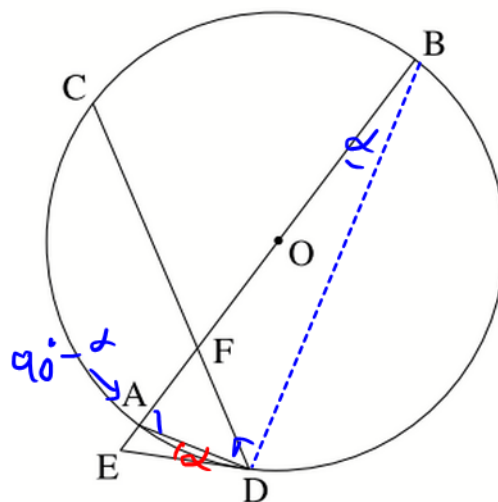
ד. (1) הבע באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

$$(2) \text{ נתון כי } \frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3} \text{ מצא את } \alpha.$$



ה.

$\angle ADE = \angle ADB = \alpha$ כי הם נשענים על אותו קו ישר
 $\angle ADB = 90^\circ$ כי AB הוא קוטר
 $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$ כי סכומם זווית ישרה בקוטר
 נ.ע.י.



$$ED = FD \quad \text{נתון} \quad \text{ב.}$$

$$\angle BDE + \angle ADE \quad \text{חוקי זווית} \quad \angle BDE = 90^\circ + \alpha$$

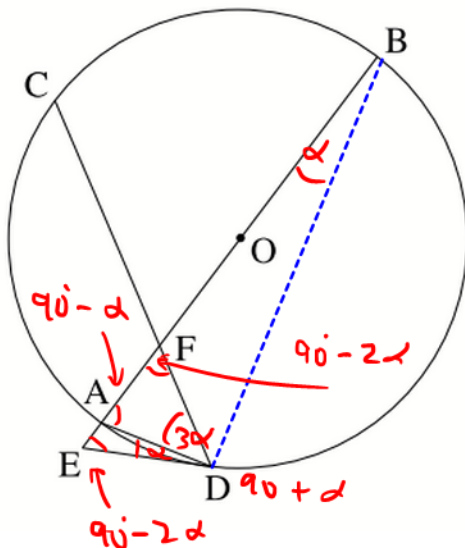
$$\text{BDE במשולש} \quad \text{סכום זווית 180} \quad \angle BED = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) - \alpha$$

$$\angle BED = 90^\circ - 2\alpha$$

$$\text{FDE במשולש} \quad \angle AFD = \angle BED = 90^\circ - 2\alpha$$

$$\text{AFD במשולש} \quad \angle ADF = 180^\circ - (90^\circ - 2\alpha) - (90^\circ - \alpha) = 3\alpha$$

$$\angle ADC = 3\alpha$$



ג. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש AFD.

$$\triangle ADB: \quad \frac{AD}{\sin \alpha} = 2R$$

$$AD = 2R \sin \alpha$$

$$\triangle AFD: \quad \frac{AD}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{FD}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$\frac{AD}{\cos 2\alpha} = \frac{FD}{\cos \alpha}$$

$$FD = \frac{AD \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2R \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$FD = \frac{R \cdot \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = R \tan 2\alpha$$

$$S_{\triangle AFD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot FD \cdot \sin 3\alpha$$



$$S_{\Delta AFD} = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \alpha \cdot R \tan 2\alpha \cdot \sin 3\alpha$$

$$S_{\Delta AFD} = R^2 \sin \alpha \tan 2\alpha \cdot \sin 3\alpha$$

$$= R^2 \frac{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$= 2R^2 \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha \sin 3\alpha}{\cos 2\alpha}$$

2022/11/10

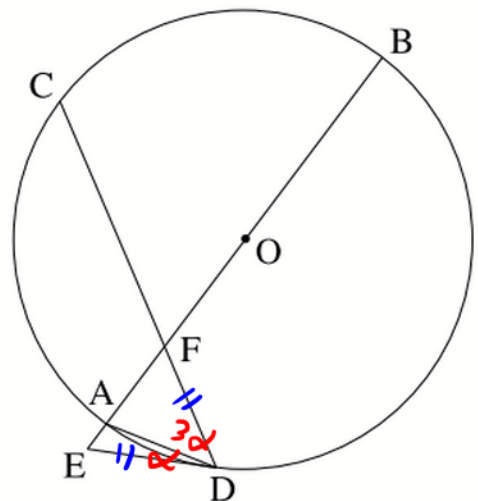
 ד. (1) הבע באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

כק"ר

 נ"ן $FD = DE$

$$\frac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta AED}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot FD \cdot \sin 3\alpha}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE \cdot \sin \alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta AED}} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$$



7. (1) הבע באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

(2) נתון כי $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$

מצא את α .

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\frac{\sin(\alpha + 2\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\cancel{\sin \alpha} \cos 2\alpha}{\cancel{\sin \alpha}} + \frac{\cos \alpha \cdot 2 \cancel{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha}{\cancel{\sin \alpha}}$$

$$= \cos 2\alpha + 2\cos^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 + 2\cos^2 \alpha$$

$$= 4\cos^2 \alpha - 1 = 1 + \sqrt{3}$$

$$4\cos^2 \alpha = 2 + \sqrt{3}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \approx 0.933$$

$$\cos \alpha = 0.966$$

$$\alpha = 15^\circ$$

$$\cos \alpha > 0$$

זקור

$$0 < \alpha < 90^\circ$$



6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = (-1)$.

ב. מצא את הערך של m .

הצב בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאת, וענה על הסעיפים ג-ה.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = k \cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x .

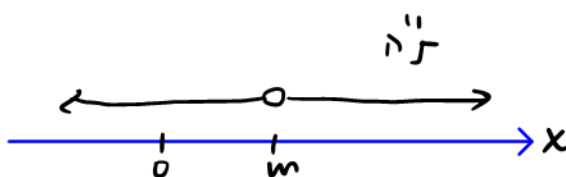
נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x הוא 1 (השטח שמימין

לאנך).

מצא את הערך של k .

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - m)^2}, \quad m > 0 \quad (1) \quad \text{א.}$$

$$x^3 \neq m$$



תחום הגדרה

$$x \neq \sqrt[3]{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$x = \sqrt[3]{m}$
אסימפטטה אנכית

$y = 0$
אסימפטטה אופקית

(2) אסימטות



ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = (-1)$. $\Leftrightarrow f'(-1) = 0$

ב. מצא את הערך של m .

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - m)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 - m)^2 - x^2 \cdot 2(x^3 - m) \cdot 3x^2}{((x^3 - m)^2)^2}$$

$$= \frac{(x^3 - m) \cdot [2x(x^3 - m) - 6x^4]}{(x^3 - m)^4}$$

$$= \frac{(x^3 - m) \cdot (2x^4 - 2mx - 6x^4)}{(x^3 - m)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x^3 - m)(-2mx - 4x^4)}{(x^3 - m)^4}$$

$$f'(-1) = \frac{(-1 - m)(2m - 4)}{(-1 - m)^4} = 0$$

$$-1 - m = 0 \quad || \quad 2m - 4 = 0$$

$$m = -1 \quad || \quad m = 2$$

נתן כי m חיובי ולכן

$$m = 2$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 2)(-4x - 4x^4)}{(x^3 - 2)^4}$$



הצב בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאת, וענה על הסעיפים ג-ה.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^3-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^3-2)(-4x-4x^4)}{(x^3-2)^4} = 0$$

תזכור הנצרך

$$x \neq \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{2} \approx 1.26$$

$$x = \sqrt[3]{2}$$

נסתקן

תחום

הנצרך

$$-4x - 4x^4 = 0$$

$$x(-4 - 4x^3) = 0$$

$$x = 0$$

$$-4 = 4x^3$$

$$x^3 = -1$$

$$x = -1$$

x		-1		0		$\sqrt[3]{2} \approx 1.26$		
f'	+	0	-	0	+		-	
f	↗	max	↘	min	↗		↘	

$$f'(-2) = +$$

$$f'(-\frac{1}{2}) = -$$

$$f'(1) = +$$

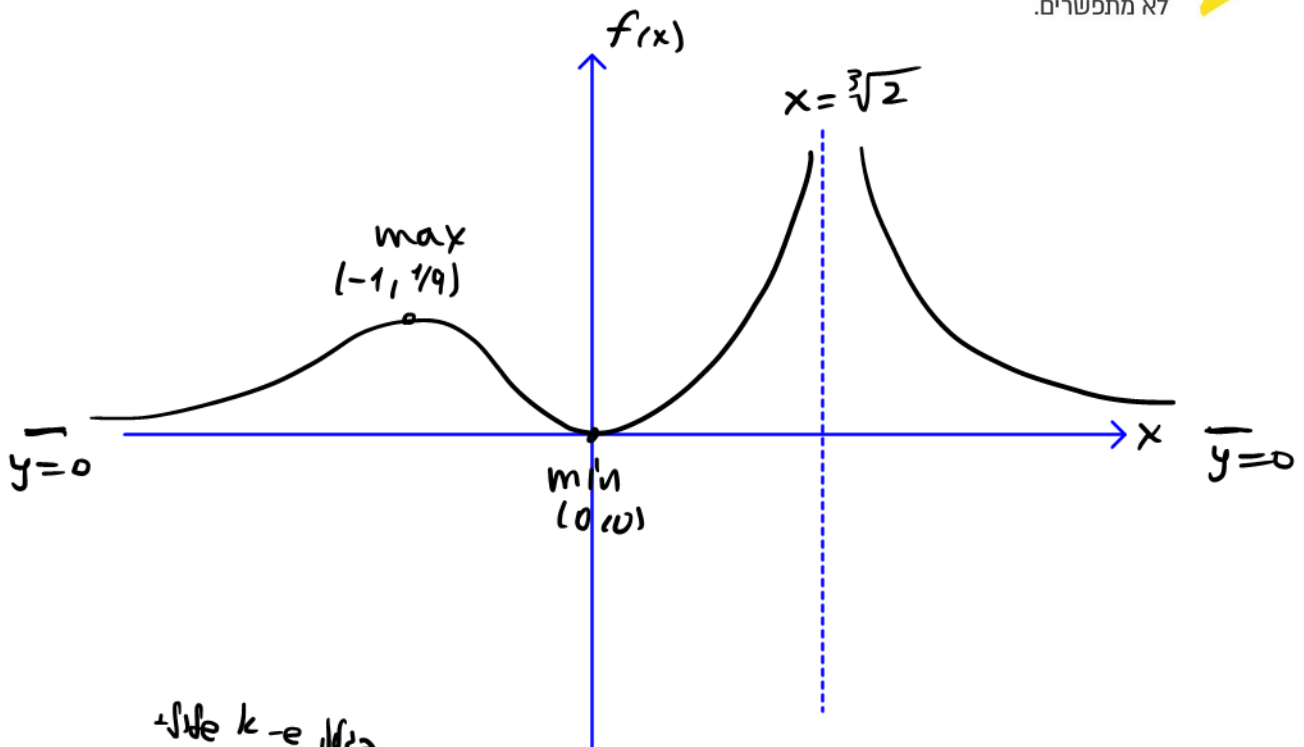
$$f'(2) = -$$

$$f(0) = 0$$

$$f(-1) = \frac{1}{9}$$

$$\left\{ \max(-1, \frac{1}{9}); \min(0, 0) \right\}$$

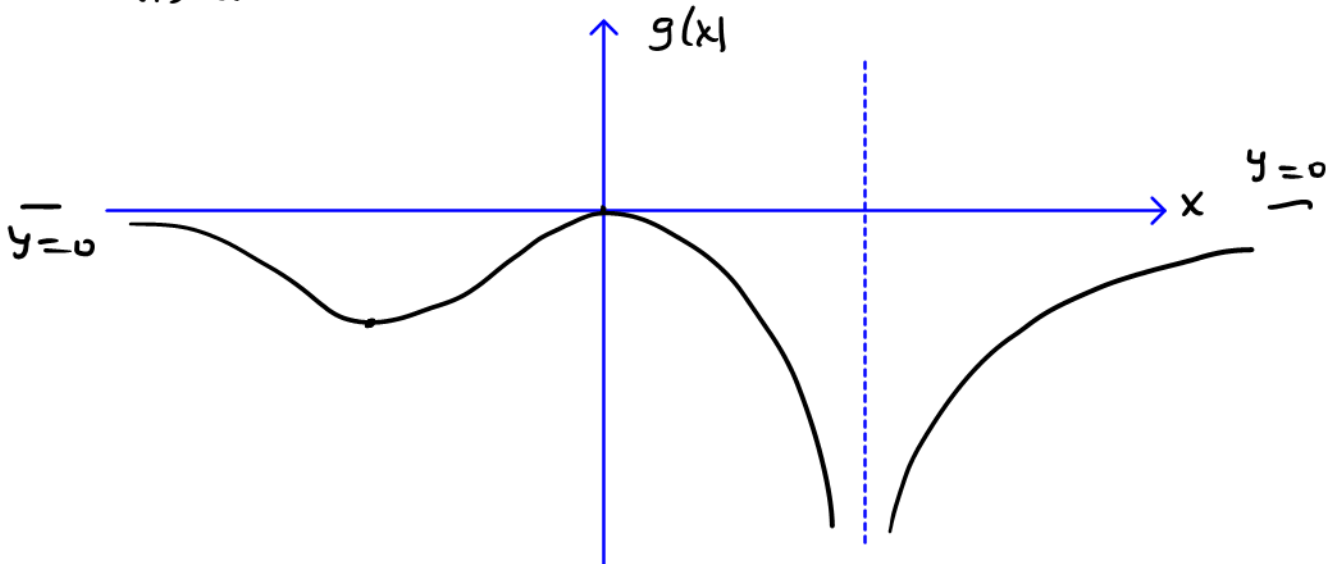




בגלל $k = e$ שלילי
 $g(x)$ עיקול
 +
 מתיחה או כיווץ
 של $f(x)$

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = k \cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.



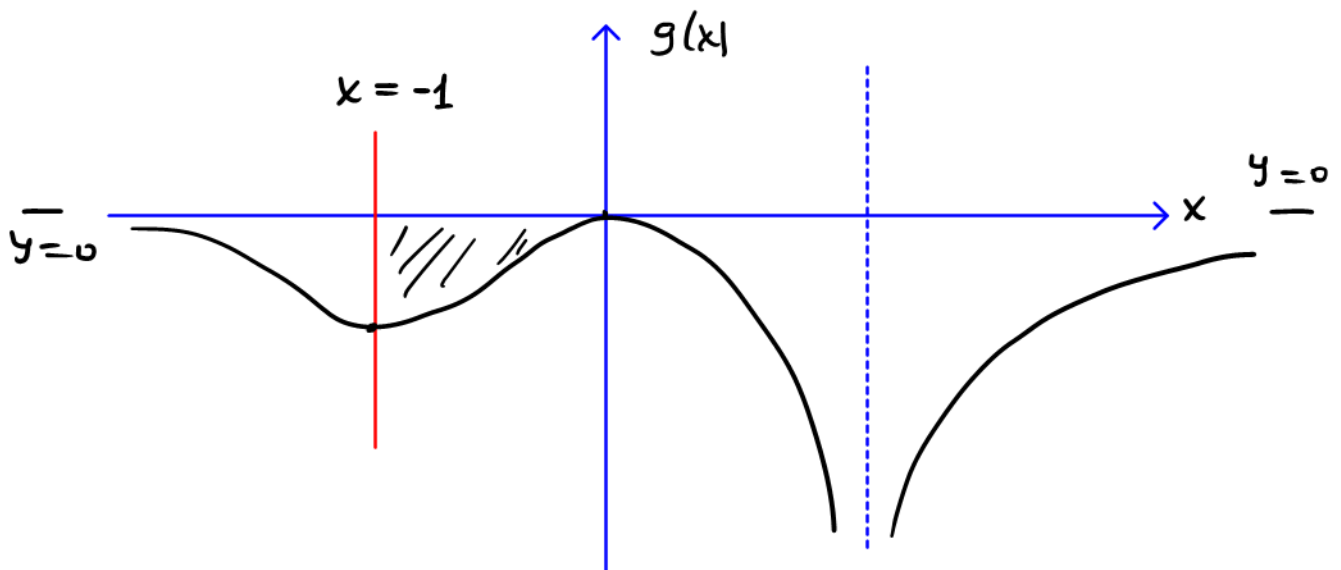
ה. נתונה הפונקציה $g(x) = k \cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x .

נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x הוא 1 (השטח שמימין לאנך).

מצא את הערך של k .



$$S = - \int_{-1}^0 g(x) dx = -k \int_{-1}^0 f(x) dx$$

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^2}{(x^3 - 2)^2} dx$$



$$\int f(x) dx = \int \frac{x^2}{(x^3-2)^2} dx = \int x^2 (x^3-2)^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int (3x^2) (x^3-2)^{-2} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3-2)^{-1}}{-1} =$$

$$\int f(x) dx = \frac{-1}{3(x^3-2)} + C$$

$$S = -k \cdot \frac{-1}{3(x^3-2)} \Big|_{-1}^0 = k \cdot \frac{1}{3(x^3-2)} \Big|_{-1}^0$$

$$= k \cdot \left[-\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{9} \right) \right] = -\frac{1}{18} k$$

נניח כי $S=1$ ונכון

$$-\frac{1}{18} k = 1$$

$$k = -18$$





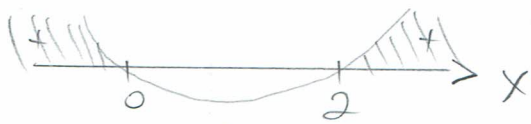
7. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 (3) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 (4) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה- x .
 בתשובתך דייק שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.
 (5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, אם ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.
- ב. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
 (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. האם ייתכן שישיר שמשוואתו $y = 4x + c$ (פרמטר c) ישיק לגרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

פתרון -
 נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$

א.1. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$: כדי שהביטוי תחת השורש יהיה חיובי:
 (ביטוי: $x^2 - 2x$) חייב להיות מספר חיובי יבסיס - א' - חיובי:

$$0 \leq x^2 - 2x = x(x-2)$$



$$x \leq 0 \quad \text{או} \quad 2 \leq x$$





2.א. תחום ההגדרה של פונקציית הנצירה $f(x)$:

$$f(x) = 3 \cdot x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$f'(x) = 3 + 2 \cdot \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = 3 + \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$$

תחום הגדרה הנצירה: (דנא):

הביטוי מתחת לשורש יהיה אי-שלילי

מכנה שונה מאפס.

חיתוך הישרים לא

$$0 < x^2 - 2x$$

$$0 < x(x-2)$$



פתרון המשוואה: $x < 0$ או $2 < x$

3. אסימפטוטות מאונכות לקרייט של פונקציית הנצירה $f(x)$:

מאונכות לקרייט x : "חלודות" בקרייט תחום ההגדרה: $x=2$, $x=0$

ערכים אלו של x מאפסים את מכנה הנצירה

אך לא את המונה $(2x-2)$ ולכן נשאר לקדוע כי

$x=0$ ו- $x=2$ הינן אסימפטוטות מאונכות לקרייט x של פונקציית הנצירה $f(x)$.

המשק הפתרון דגם הבא...

נחידע על פסיכומטרי

ביואל גבע

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים

אל תתפשר עליה



אסימטוטה מאונכית לבירי y של $f(x)$:

$$\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}} \quad \text{זכילוי}$$

והבדוק עבור $x \rightarrow -\infty$ -

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \quad \text{מקו זכילוי (אם קיים)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x \cdot (1 - \frac{1}{x})}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x \cdot (1 - \frac{1}{x})}{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \right) \stackrel{\infty \times}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x \cdot (1 - \frac{1}{x})}{x \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \right) = \frac{1-0}{\sqrt{1-0}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f'(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + 2 \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \right) = 3 + 2 \cdot 1 = 5 \quad \text{זכילוי}$$

ונסיק כי $y=5$ אסימטוטה אנכית של $f(x)$ עבור $x \rightarrow \infty$.

עבור $x \rightarrow -\infty$ נחשב בביטוי המקורי:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f'(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + 2 \cdot \frac{x \cdot (1 - \frac{1}{x})}{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \right) \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + 2 \cdot \frac{x \cdot (1 - \frac{1}{x})}{-x \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \right) = 3 - 2 \cdot \frac{1-0}{\sqrt{1-0}} = 1$$

נכל את הסיק כי $y=1$ אסימטוטה אנכית של $f(x)$ עבור $x \rightarrow -\infty$.

הארה: ניתן להעריך גם על ידי שיטת ההצטנן.



4.6. שיעורי נקודה - חיתוך של ערך פונקציה הנגזרת
 $f'(x)$ עם ציר ה- x :

$$f'(x) = 0$$

$$3 + \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}} = 0 \Rightarrow \frac{2-2x}{\sqrt{x^2-2x}} = 3 \quad / \cdot \sqrt{x^2-2x} \neq 0$$

$$2-2x = 3 \cdot \sqrt{x^2-2x}$$

נשים לב לכך שנסתה את שני האגפים בריבוע,
 שלא נעזר שיתקיים שילווין (ערכים ממשיים)

ברור כי אגף שמאל יהא חיובי (השורש באגף ימין אינו מאבד)

$$0 < 2-2x$$

$$2x < 2$$

$$x < 1$$

מחילופין - ניתן לפתור ולגזור במחנה לגדירה גלגל לפני
 שהסתנן בריבוע:

$$2-2x = 3 \cdot \sqrt{x^2-2x} \quad / ()^2$$

$$4-8x+4x^2 = 9 \cdot (x^2-2x)$$

$$4-8x+4x^2 = 9x^2-18x \quad / -4x^2+8x-4$$

$$5x^2-10x-4=0$$

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100+80}}{10} = 1 \pm \frac{\sqrt{180}}{10}$$

$$1 - \frac{\sqrt{180}}{10} \approx -0.342$$

$$1 + \frac{\sqrt{180}}{10} \approx 2.342$$

בתור זה נבסל
 יאה הסדור לעיל:



4. המסקנה: שיטת נק' חיתוך של גרף סוקרטית -
הנצירה (א'f) של ציר ה-x:

$$\left(1 - \frac{\sqrt{180}}{10}, 0\right) \approx (-0.34, 0)$$

5. שיטת גרף (א'f) כושר יפוצ שלטן לא'f נק' ק'בון.

יפוצ: ✓ חתום יקרה $2 < x$ או $x < 2$

✓ נק' חיתוך של ציר ה-x (לעיל).

✓ אסימטות - מקדמו - לבניה.

נבדוק קנוס - חתום - שלטון.

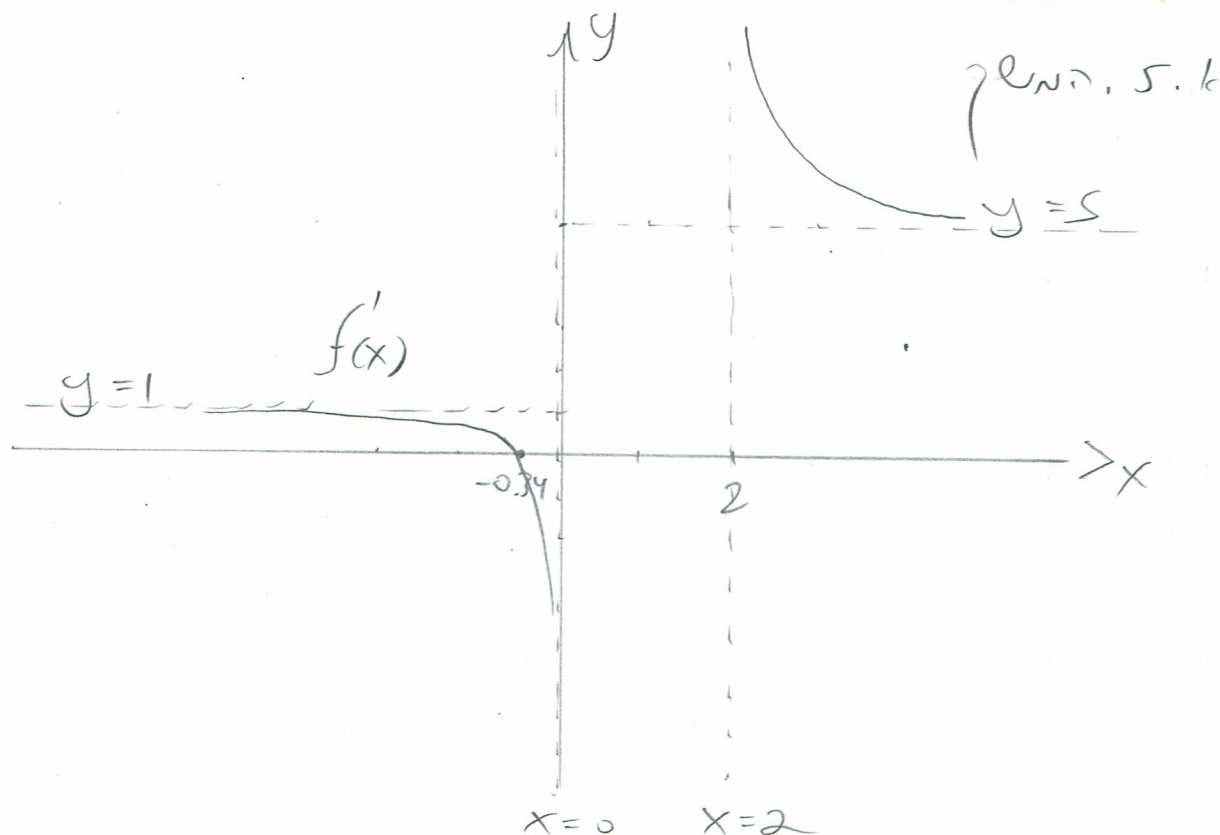
x	$x < 1 - \frac{\sqrt{180}}{10}$	$1 - \frac{\sqrt{180}}{10} < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$\text{sign}(f'(x))$	+	0	-	+

$$f'(-1) = 3 + \frac{2 \cdot (-1) - 2}{\sqrt{(-1)^2 - 2 \cdot (-1)}} = 3 - \frac{4}{\sqrt{3}} > 0$$

$$f'(-0.3) = 3 + \frac{2 \cdot (-0.3) - 2}{\sqrt{(-0.3)^2 - 2 \cdot (-0.3)}} = 3 - \frac{2.6}{\sqrt{0.69}} < 0$$

$$f'(3) = 3 + \frac{2 \cdot 3 - 2}{\sqrt{3^2 - 2 \cdot 3}} = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} > 0$$





ב.ו. שיטת נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וסוגן.

נה' קיצון פנימי:

משרת $f'(x)$ דסעיל הקורב נה' להסיק כי פונקציה הנצרי

$f'(x)$ מחליפה סימן מחיובי ללילילי דיק אפס סביב $x = 1 - \frac{\sqrt{180}}{10}$

לומר $f(x)$ עוקר מחליפה לירידה סביב $x = 1 - \frac{\sqrt{180}}{10}$

משמע יש לה שם נקודת קיצון מסוג מקסימום.

נחשד א- שיטת ה- y.

$$f\left(1 - \frac{\sqrt{180}}{10}\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{180}}{10}\right) + 2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{180}}{10}\right)^2 - 2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{180}}{10}\right)} = 3 - \sqrt{5} \approx 0.764$$

$$\left(1 - \frac{\sqrt{180}}{10}, 3 - \sqrt{5}\right)_{\max} \approx (-0.34, 0.76)_{\max}$$





ב.ו. העלוקה...

נקודות קיצון בקצה תחום: עבור $x=0$:

$$f(0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot \sqrt{0^2 - 2 \cdot 0} = 0$$

שיעור הי-ג: סוג הקיצון - מינימום שכן נק' הקיצון הפנימי - לפניה - היא מסל מקסימום.

min (0,0)

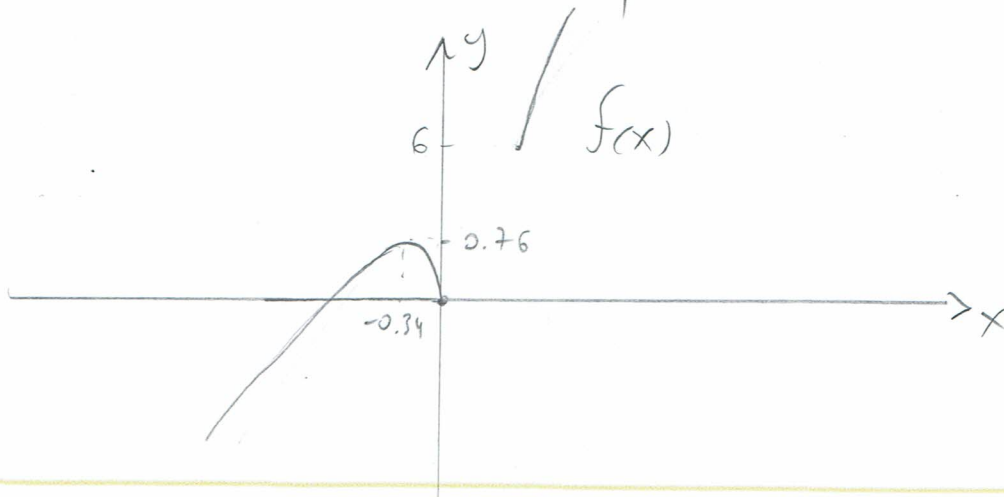
עבור $x=2$:

$$f(2) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{2^2 - 2 \cdot 2} = 6$$

ומכיון ש- $f'(x) < 0$ עבור $2 < x$ (מחקירה קיצונית) נקבע כי f עולה במרחב $2 < x$ ועבור $x=2$ סוג הקיצון הוא מינימום.

min (2,6)

ד. 2. ג. $f(x)$, שמש במסלול קיצוני וקסימן העצמי במרחב הלוגי:



ג. האם ייתכן שישו משולב $y = 4x + c$

(כ פהמל) יסיק לגיל הפונקציה $f(x)$?

נבדוק האם קיימת נקודה על גיל $f(x)$ זה שיפוע

המשק שווה לשיפוע הישר הנ"ל: $m = 4$.

נחמל $f'(x) > 4$:

$$f'(x) = 4$$

$$3 + \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}} = 4 \quad / -3$$

$$\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}} = 1 \quad / \cdot \sqrt{x^2-2x} + 0$$

$$2x-2 = \sqrt{x^2-2x}$$

הסמך נכח $x < 1$

$$2x-2 = \sqrt{x^2-2x} \quad / ()^2$$

$$4x^2 - 8x + 4 = x^2 - 2x \quad / -x^2 + 2x$$

$$3x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 36 - 48 < 0$$

אין פתרונות ממשיים.

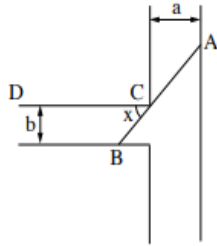
מסקנה: לא ייתכן שישו משולב $y = 4x + c$

יסיק לגיל הפונקציה $f(x)$.

ברק נוספת: פתרון גרפי: נגדל $f'(x)$ ניין זואל כי $f'(x) \neq 4$

לכא קמחם הגדול הנצחית $f(x)$.

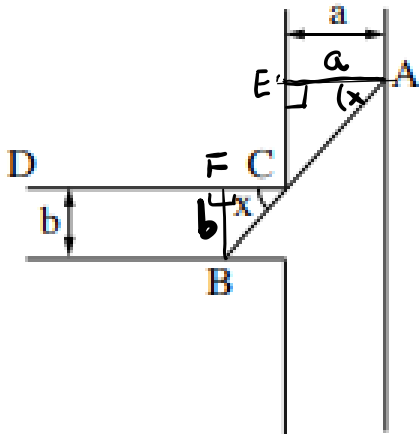




8. תעלת מים ראשית ברוחב קבוע a מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע b . הנקודה C היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית ובין דופן של התעלה המשנית (ראה סרטוט). מהנקודה מתכננת סכר ישר, שיצא מן הנקודה A שבדופן התעלה הראשית, יעבור דרך הנקודה C ויגיע עד הנקודה B שבדופן התעלה המשנית. הסכר ייצור זווית שגודלה x עם הדופן CD של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.
- א. הבע באמצעות a , b ו- x את אורך הסכר AB .

נתון כי $a = 2b$.

- ב. מצא את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.
 ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8. מצא את b .



$$\triangle EAC: \cos(x) = \frac{a}{AC} \quad | \cdot AC$$

$$AC = \frac{a}{\cos x}$$

$$\triangle FCB: \sin(x) = \frac{b}{BC}$$

$$BC = \frac{b}{\sin(x)}$$

$$AB = AC + BC = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$$

$$AB = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x} : \text{אורך } AB$$

$$a = 2b : \text{נתון}$$

עלנו להניח פונקציה של אורך הסכר, לחקוק אותה ולמצוא את המינימום (המחלף שלה).

$$f(x) = \frac{2b}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{0 - (-\sin x) \cdot 2b}{\cos^2 x} + \frac{0 - \cos x \cdot b}{\sin^2 x} = \frac{2b \sin x}{\cos^2 x} - \frac{b \cos x}{\sin^2 x}$$



$$f'(x) = \frac{2b \sin^3 x - b \cos^3 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = 0$$

$$b(2 \sin^3 x - \cos^3 x) = 0$$

$$2 \sin^3 x = \cos^3 x \quad | : \cos^3 x$$

הערה: $\cos x \neq 0$ קוואל מואתנ וואל קיימט וואל
 עקסיונס וסינוס מואלנס בוי עקוואל.

$$\tan^3(x) = \frac{1}{2}$$

$$\tan(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$x = 38.439^\circ$$

x	38°	38.43°	39°
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	מינימום	↗

ע 3 יג גענוי א שטונד א נאך
 (הינאמא, אנאלוג א גענוי 8.8)

$$f(x) = \frac{b}{\sin x} + \frac{2b}{\cos x} = b \left[\frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\cos x} \right]$$

$$8 = b \left[\frac{1}{\sin(38.439)} + \frac{2}{\cos(38.439)} \right] \rightarrow \boxed{b = 1.922}$$

