

פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף נבצרים תשפ"ב, 2022, שאלון: 35581

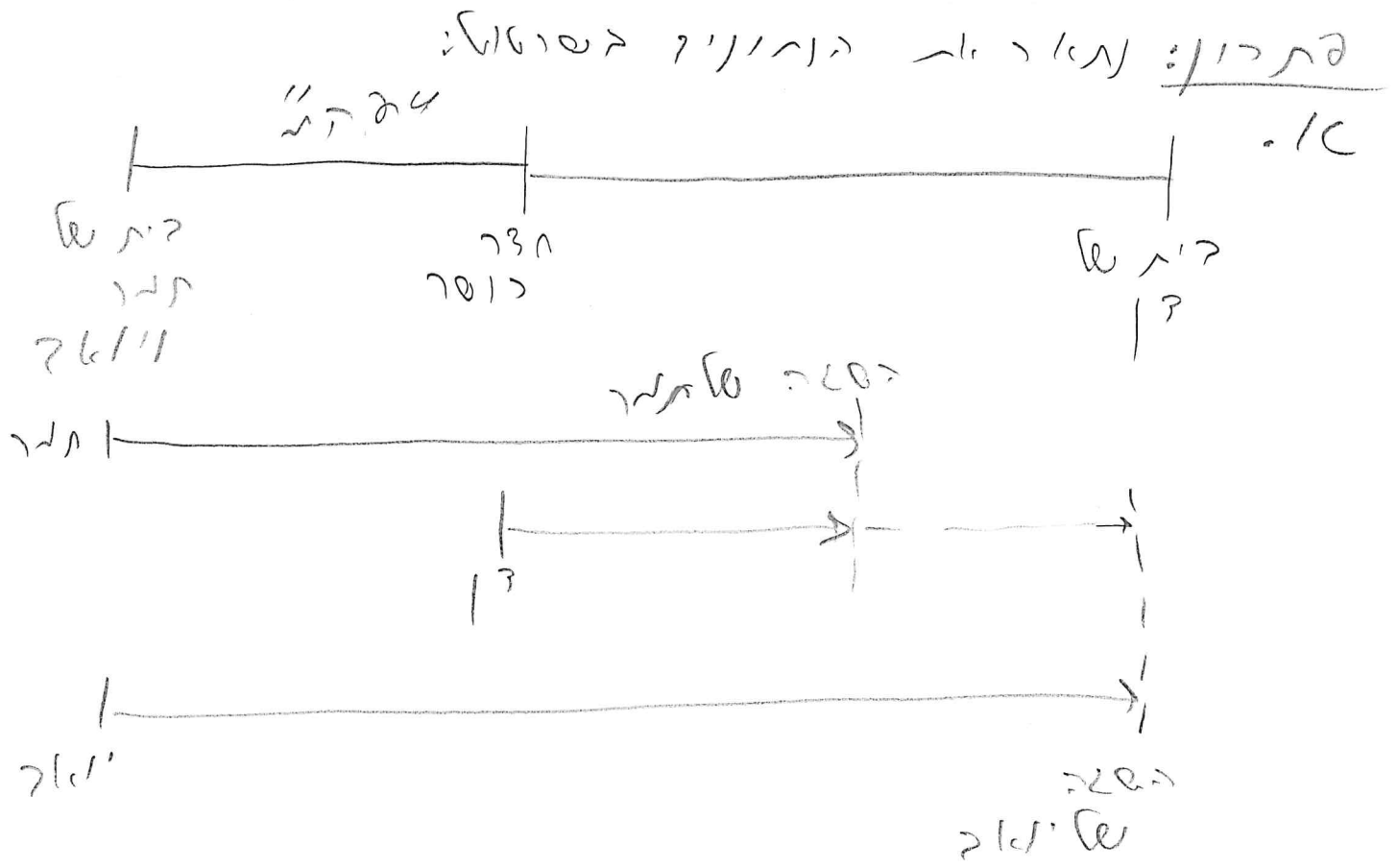
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. בין הבית של תמר ויואב לבין ביתו של דן יש שביל אופניים.
 לאורך שביל האופניים, בין שני הבתים, נמצא חדר כושר. המרחק בין חדר הכושר ובין הבית של תמר ויואב הוא 24 ק"מ.
 תמר יצאה מן הבית בשעה 6:00 ורכבה על אופניים במהירות קבועה לעבר ביתו של דן.
 בשעה 7:00 יצא יואב גם הוא מן הבית ורכב על אופניו לעבר ביתו של דן במהירות שגבוהה ב-5 קמ"ש ממהירות הרכיבה של תמר.
 בשעה 7:30 יצא דן מחדר הכושר ורכב על אופניו במהירות קבועה לעבר ביתו.
 תמר, יואב ודן רכבו שלושתם על אותו שביל אופניים.
 תמר השיגה את דן וחלפה על פניו בשעה 8:00.
 יואב ודן הגיעו שניהם לביתו של דן בשעה 9:15.
 א. מצא את המהירות של כל אחד משלושת הרוכבים.
 ב. מה היה המרחק בין יואב ובין דן כאשר תמר הגיעה לביתו של דן?



נסמן את המהירות של תמר ב-x ו-30/130

א- הנתיבים בסבלה:

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



<u>צד</u>	<u>מהירות</u>	<u>נש</u>	<u>תאור התנועה</u>
$2x$	x	2	תנועת שכיטה
$2x - 24$	$\frac{2x-24}{2} = 4x - 48$	$\frac{1}{2}$	צד שמתקדם השכיטה
$2\frac{1}{4}x + 11\frac{1}{4}$	$x + 5$	$2\frac{1}{4}$	י.א. > צד הצד של צד
$7x - 84$	$4x - 48$	$1\frac{3}{4}$	צד צד הצד של

משוואה - צדדים עם הכנסה של יואל קצת:

$$2\frac{1}{4}x + 11\frac{1}{4} = 7x - 84 + 24$$

||

$$4\frac{3}{4}x = 71\frac{3}{4}$$

||

$$x = 15$$

המהירות - ה.א. - 15 קמ"ש, יואל 20 קמ"ש
- 13 - 12 קמ"ש

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



ב. הריק מתוך הכושר לביתו של צן הוא

$$2x - 84 = 7$$

הריק מהבית של ג'ו לביתו של צן הוא

$$2x + 24 = 45$$

חמי נובה ב שני $(\frac{45}{24})$ וכן הציגה

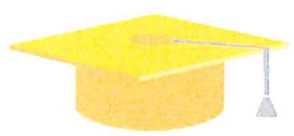
לביתו של צן ב שני 00:55, כלומר רבג שני

לפני שקן וי/אק הציגו לביתו של צן.

מכאן ש י/אק היה ל ד"ר $(\frac{24}{4})$ לביתו של צן

וצן היה קד"ר $(\frac{12}{4})$ לביתו שלו.

כך התרחק ביניהם היה $2 \frac{1}{2}$



2. נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם a_1, a_2, a_3, \dots ומנתה היא q. כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

א. האם הסדרה $\dots, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}$ היא סדרה הנדסית? הוכח את תשובתך.

ב. (1) מסמנים ב- S_n את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A (n טבעי).

$$\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

הוכח כי לכל n מתקיים:

(2) נתון: $a_1 = 1, q = 3$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה A גדול פי 6561 מן הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$

מצא את n.

הסדרה B מתקבלת מן הסדרה A על ידי הפיכת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A.

איברי הסדרה B הם b_1, b_2, b_3, \dots .

נסמן ב- T_m את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה B. נתון כי m הוא מספר טבעי אי-זוגי.

ג. נתונה נוסחה: $\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots + \frac{1}{a_m}$

קבע אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכח את תשובתך.

פתרון:

א. האיבר הכללי של הסדרה הנדסית

הוא $\frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{a_{n+1}}$

המשוואה:

$$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q}$$

הסדרה הנדסית עם $q = \frac{1}{2}$.



ה. (ז) מכיוון שהגזרת של הסדרה החזרה
 היא $\frac{1}{q}$ (הפינו את a מהסוף למהחלה
 $|a| < 1$ הגזרת תהיה q והאיבר הראשון
 יהיה $\frac{1}{a_n}$.
 נחשב את הסכום:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a_1}(q^n - 1)}{q - 1}$$

הסכום של הסדרה הנקראת הנוא:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{S_n}{a_1}$$

1.3 > בסכום שהיסקנו וזה כלל:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{S_n}{a_1} = \frac{S_n}{a_1 \cdot a_1}$$



(2) נתון: $a_1 = 1, q = 3$.

כאן n איז כולל הסדרה האחרונה

אז $a_n = 6561$ מכיון שהסדרה

שהיא $a_n = 6561$ (1). לפי:

$$\frac{S_n}{a_1 \cdot q^n} \cdot 6561 = S_n$$

$$a_1 \cdot q^n = 6561$$

$$a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = 6561$$

$$3^{n-1} = 6561$$

$$n-1 = \log_3 6561 = 8$$

$$n = 9$$



ד. נתון הסדרה ב:

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \dots = a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$$

סכום הסדרה הוא T_m .

הסדרה הזו היא סדרה הנדסית

הגורם הוא $-q$, ולכן:

$$T_m = \frac{a_1 \cdot ((-q)^m - 1)}{-q - 1}$$

נתון כי m אי זוגי ולכן:

$$T_m = \frac{a_1 (-q^m - 1)}{-q - 1} \Rightarrow T_m = \frac{a_1 (q^m + 1)}{q + 1}$$

כעת נשתמש בשיטת ההפרה:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots + \frac{1}{a_m} = \frac{1}{a_m} - \dots - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} =$$

$$= \frac{1}{a_m} \frac{((-q)^m - 1)}{-q - 1} = \frac{1}{a_m} \cdot \frac{q^m + 1}{q + 1} = \frac{1}{a_m} \cdot \frac{T_m}{a_1} =$$

$$= \frac{T_m}{a_1 \cdot a_m} = \frac{T_m}{b_1 \cdot b_m}$$

הנוסחה נכונה



3. כדי להתקבל ללימודים במכללה מסוימת יש לעבור מבחן קבלה. כל השאלות במבחן הן מתוך מאגר שיש בו n שאלות שונות. לנבחנים יש גישה למאגר והם יכולים להתכונן למבחן באמצעותו. ביום הבחינה, כל נבחן מוציא באקראי מתוך קופסה מלאה בפתקים שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה. בכל אחד מן הפתקים כתובה שאלה אחת מתוך מאגר השאלות. מספר הפתקים שבקופסה שווה למספר השאלות שבמאגר, ובכל פתק כתובה שאלה אחרת. לאחר שהוציא הנבחן שלושה פתקים מן הקופסה וקרא את שלוש השאלות, הוא מחזיר את שלושת הפתקים לקופסה. הנבחן יתקבל למכללה אם הוא יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא. נתנאל התכונן למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון רק על 20 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון. ידוע כי ההסתברות של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים שהוא הוציא היא $\frac{34}{69}$.

א. מצא את n . (1)

ב. מהי ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה? (2)

ג. אם ידוע כי נתנאל התקבל למכללה, מהי ההסתברות שהוא לא ענה נכון על השאלה שבפתק הראשון שהוא הוציא? רמי התכונן גם הוא למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון על 40 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ד. האם ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי גדולה פי 2 מן ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי? נמק את תשובתך.

$$P(\text{נבחן ענה נכון על שתי שאלות}) = 1 - P(\text{נבחן ענה נכון על אחת או שום שאלה}) = 1 - \frac{n-20}{n} \cdot \frac{n-21}{n-1}$$

$$1 - \frac{n-20}{n} \cdot \frac{n-21}{n-1} = \frac{34}{69}$$

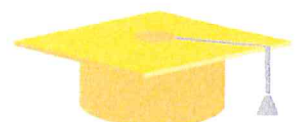
$$\frac{35}{69} = \frac{(n-20)(n-21)}{n(n-1)} \rightarrow 35n(n-1) = 69(n-20)(n-21)$$

$$35n^2 - 35n = 69n^2 - 2829n + 28980 \rightarrow 34n^2 - 2794n + 28980 = 0$$

$$\left(\begin{matrix} n=70 \\ n=207 \end{matrix} \right) \quad n = \frac{207}{2} \notin \mathbb{N}$$

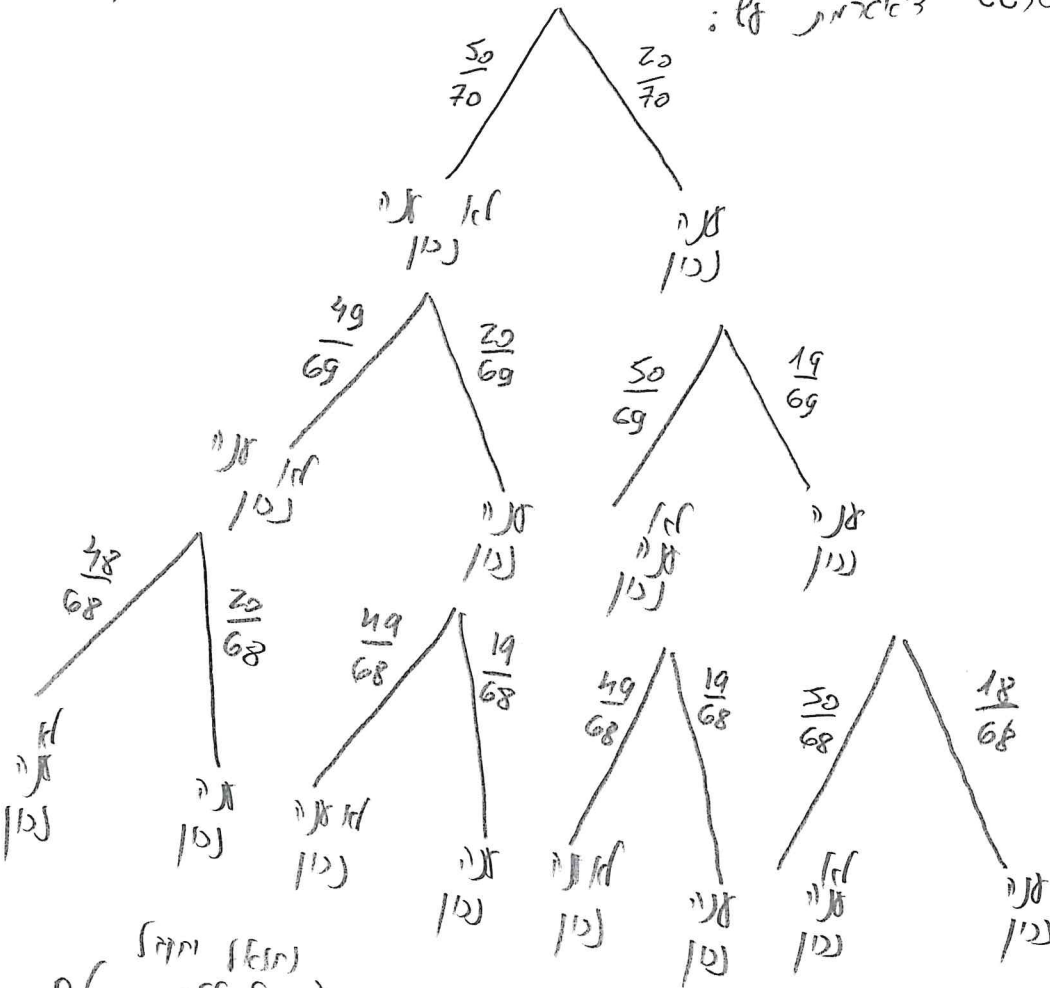
נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.**



3/1(2)

(סכום) ביאגראם של:

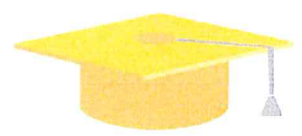


$$P(\text{תנאי יחידה אחרת}) = \frac{20}{70} \cdot \frac{19}{69} + \frac{20}{70} \cdot \frac{50}{69} \cdot \frac{19}{68} + \frac{50}{70} \cdot \frac{20}{69} \cdot \frac{19}{68} = \frac{76}{391}$$

ב) $P(\text{אז אתה ניין} \mid \text{ניין} \text{ ו} \text{תנאי יחידה אחרת}) = \frac{P(\text{אז אתה ניין} \cap \text{ניין} \cap \text{תנאי יחידה אחרת})}{P(\text{תנאי יחידה אחרת})} = \frac{\frac{50}{70} \cdot \frac{20}{69} \cdot \frac{19}{68}}{\frac{76}{391}} = \frac{25}{84}$

נמידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



ג) 3

$$P(\text{שלוש כדורים שחורים}) = \frac{40}{70} \cdot \frac{39}{69} \cdot \frac{38}{68} = \frac{494}{2737}$$

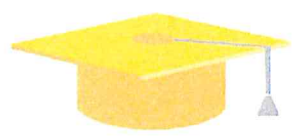
$$P(\text{שלוש כדורים לבנים}) = \frac{20}{70} \cdot \frac{19}{69} \cdot \frac{18}{68} = \frac{57}{2737}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{494}{2737}}{\frac{57}{2737}} \neq 2$$

ההסתברות שרמי יזכה בכדור שחור או שלוש כדורים שחורים היא 2/3
 ההסתברות שרמי יזכה בכדור לבן או שלוש כדורים לבנים היא 1/3

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

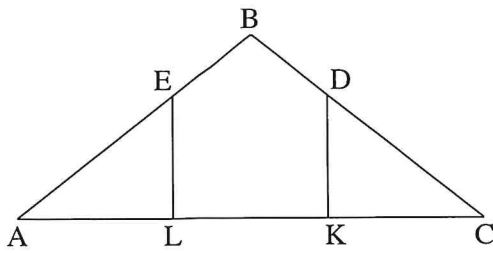


4. בצירוף שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $BA = BC$.

מנקודה D הנמצאת על השוק BC הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה K .

מנקודה E הנמצאת על השוק BA הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה L .

נתון: $AL = LK = KC$.



א. חשב את $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו- EK נפגשים בנקודה G .

ב. הוכח כי המרובע $BDGE$ הוא דלתון.

נתון: $AC = 45$.

היקף המרובע $EDKL$ הוא 54.

ג. חשב את אורך הקטע BG .

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על הישר BG שעבורה המרובע $BDFE$ הוא בריחסימה במעגל?

נמק את תשובתך.

פתרון:

טענה

① $\angle AKC = \angle ELA = 90^\circ$

② $AL = LK = KC$

③ נוקיט לזקה BH

AC ק"ל 5

④ $AC = 6x$

⑤ $AB = CB$

⑥ $AH = CH = 3x$

⑦ $AL = LK = KC = 2x$

נימוק

ניון $EL \perp AC, DK \perp AC$ ניון

ניון

$AC = 6x = 2x + 2x + 2x$

(סיווג)
קטע AL (סיווג)

סימון

ניון

זכה לסימון במעגל שווה קוואל
לפי P ו- S סימון.

סימון $AL = LK = KC = 2x$



נילוי

מיטוי האלק. אפי 7, 6

אפי 3, 7

אם בין שני ישרים נישו

לשי שחוקן אלה יש

15 זוויות מבוטאות של
אם הישרים מקבילים

משפט זאס. אפי 10

חישוב. אפי 7, 8

טענה

$HK = x$ (8)

$\angle DKC = \angle BHC = 90^\circ$ (9)

$BH \parallel DK$ (10)

$\frac{BD}{CD} = \frac{KC}{HK}$ (11)

$\frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}$ (12)

נישול

G היא מפאס (13)

ההצגה DL - EK

$\angle BCA = \angle BAC$ (14)

$\triangle KCD \cong \triangle LAE$ (15)

\parallel
 $CD = AE$ (16)

נישול

זוהי קטט במולט שווים

של 15 זוויות. אפי 5

משפט חפיפה S.S.S

אפי 1, 2, 14

באגן מתאימה בשוואסיק

חופפים של 15 זוויות





נימוק

חיטור קטעין מ'אויג.

אפי 5, 16

בניית ערך

קטע מ'אויג מ'אויג ג'אויג,

חובפיג לוג 50 50. אפי 15

אם בין שתי ישרים וישר

שאישי לוחן אלה יא

לוג 50 יא מ'אויג מ'אויג

אפי 15 הישרים מ'אויג אפי 1

מ'אויג ב'אויג לוג 50 אפי 15

קטע מ'אויג לוג 50 מ'אויג

הזא מ'אויג אפי 19, 20

מ'אויג קטע לוג 50 אפי 1

ישרה היא מ'אויג אפי 1, 2

אפי 15 מ'אויג מ'אויג אפי 13

אפי 13 מ'אויג מ'אויג אפי 22

מ'אויג קטע מ'אויג אפי 1

קטע מ'אויג מ'אויג אפי 1

אפי 17, 23

טענה

$BD = BE$ (17)

DE (18)

$AD = LE$ (19)

$AD \parallel LE$ (20)

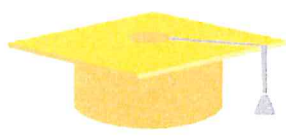
$EDKL$ מ'אויג (21)

$EDKL$ מ'אויג (22)

$EG = DG$ (23)

BDE מ'אויג (24)

מ'אויג



נילוך

נתון

נתון

חישוק. אבי 2, 25

דאגה נאציגה בנאבן סולל

חישוקי אבי 26, 27, 28
היא נאבן

אזכסוניק בנאבן סאונכיו.

אבי 24

אבי 3, 30

אבי 6

משבט תאלס (נרמח דה סא)

אבי 10

חישוק

זאל היולו נאנדיק קאל

דאשאלס ונגביא זקאלק
השאלים - הזו האג אהנגיג

טאנה

$AC = 45$ (25)

$P_{ENKL} = 54$ (26)

$AL = LK = KC = 15$ (27)

$ED = 15$ (28)

$EL = EK = 12$ (29)

$BG \perp ED$ (30)

$BH \perp EG$ (31)

$HC = 22.5$ (32)

$\frac{BH}{DK} = \frac{HC}{CK}$ (33)

\parallel

$BH = 18$ (34)

GH האג אהנגיג (35)

דאשאלס אלק



נימוק

דגל אהרן שווה לדגל
הדגל הישן.
חיסוי דגלים. אפי 36, 39

לגים

$GH = 6$ (36)

$BG = 12$ (37)

~ ש.ל. 2

כאשר יתקיים

$DE \perp AB$ - $DF \perp BC$

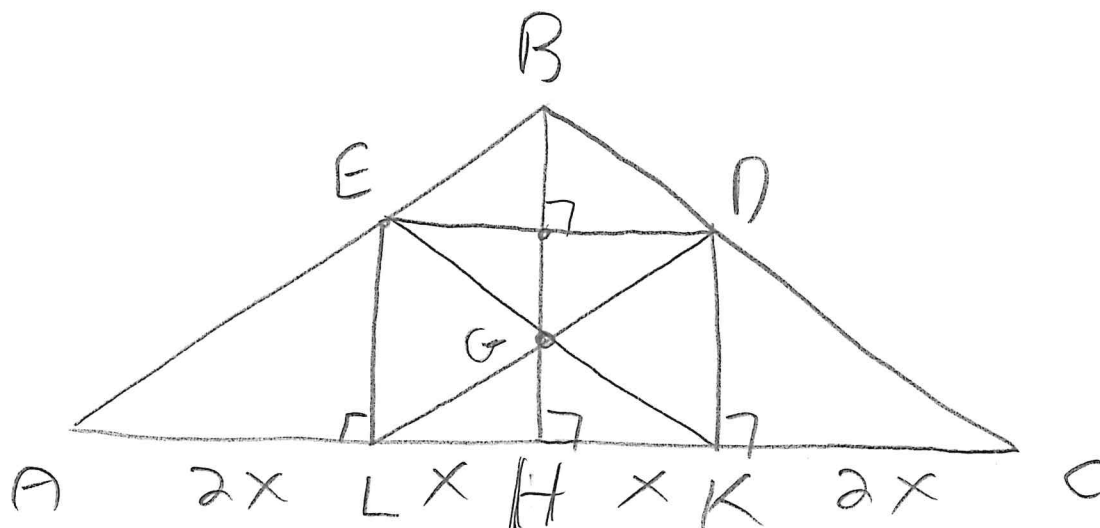
$BD \perp FE$ יהיה

קלרון

(38) כ/.

~ ש.ל. 3

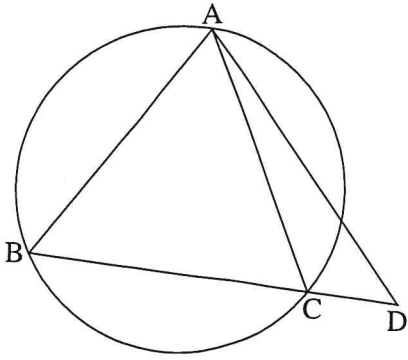




למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





5. בצירוף שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $AB = AC$, שחסום במעגל שרדיוסו R . האריכו את הבסיס BC עד לנקודה D והעבירו ישר מנקודה D לנקודה A .

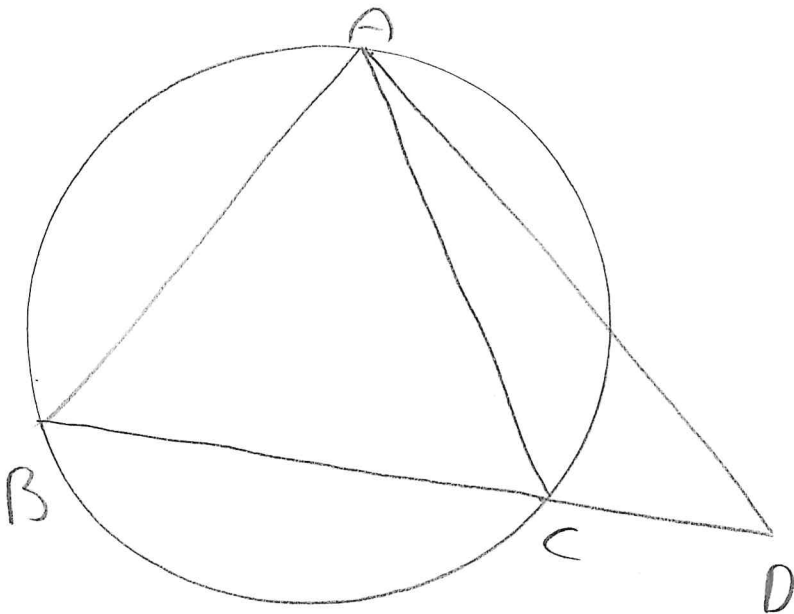
נתון: $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle CAD = \alpha$.

- א. הוכח כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD .
- ב. הבע את שטח משולש ACD באמצעות R ו- α .

נסמן ב- m את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABC .

ג. (1) האם ייתכן כי $m = 0.5$? נמק את תשובתך.

(2) נתון כי $m = 0.6$. מצא את גודלי זוויות המשולש ABC .



פתרון:

$\triangle ABD$: .lc

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = 2 \cdot R_{ABD}$$

$\triangle ACD$:

$$\frac{AC}{\sin \angle ADC} = 2 \cdot R_{ACD}$$

פתרון: $AB = AC$. כמו כן $\angle ADB = \angle ADC$ (זוויות שוות) (אזורים)

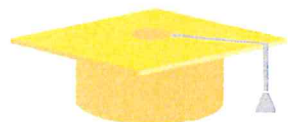
דכ"י: $R_{ABD} = R_{ACD}$

כאשר אמצעי הרוחב יזמו כ-5/10 של אורך חוסם.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.

אל תתפשר עליה.



$\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R \Rightarrow AC = 2R \cos \alpha$$

$\triangle ACD$:

$$\frac{AC}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{CD}{\sin \alpha} \Rightarrow CD = \frac{2R \cos \alpha \sin \alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$CD = \frac{R \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = R \tan 2\alpha$$

נראה נכון:

$$S_{ACD} = \frac{AC \cdot CD \cdot \sin(90^\circ + \alpha)}{2}$$

נכון:

$$S_{ACD} = \frac{2R \cos \alpha \cdot R \tan 2\alpha \cdot \cos \alpha}{2}$$

$$S_{ACD} = R^2 \cos^2 \alpha \tan 2\alpha$$



$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = m$$

ג. נתון:

וקיף α של $\triangle ABC$ הוא $2R \cos \frac{\alpha}{2}$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{2R \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2R \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$= 2R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha$$

וקיף β של $\triangle ACD$ הוא $2r \cos \frac{\beta}{2}$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{r^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \cdot \sin \beta}{2R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}$$

וקיף γ של $\triangle ABC$ הוא $2R \cos \frac{\alpha}{2}$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

(1) $\beta = 90^\circ$ - $m = 0.5$ הנתון:

$$\frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0^\circ$$

כלומר $\alpha = 0^\circ$ - זה לא יכול להיות כי α הוא זווית של $\triangle ABC$.
התשובה היא $m = 0.5$.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



ד. (2) $\angle C = 85^\circ$ ו $\angle A = 110^\circ$, $m = 0.6$, $\angle B = 1^\circ$:

$$\frac{1}{2 \cos 2\alpha} = 0.6$$

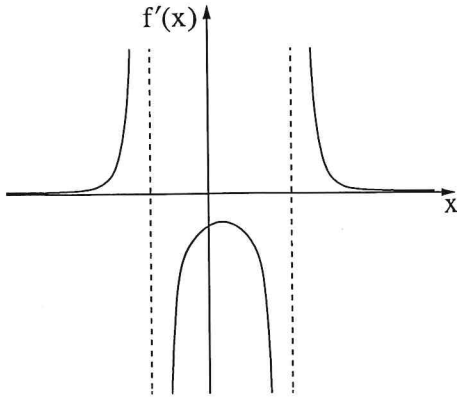
$$\cos 2\alpha = \frac{5}{6}$$

$$2\alpha = 33.56^\circ$$

$$\angle BAC = 33.56^\circ$$

$$\angle ABC = \angle ACB = 73.72^\circ$$





6. נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x < b$, $b < x < c$, $c < x$ וגזירה בכל תחום הגדרתה.

בסרטוט שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד

ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים: $x = c$, $x = b$, $y = 0$.

שיעור ה- x של נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא a .

a , b ו- c הם פרמטרים.

א. הבע את תשובותיך באמצעות a , b ו- c , אם יש צורך.

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה (U) ואת תחומי הקעירות כלפי מטה (\cap) של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(a, 0)$.

ב. סרטוט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון גם כי $f(x) = \frac{18 - 36x}{(x^2 - x - 6)^2}$

ג. מצא את a , b ו- c .

ד. (1) הראה כי בתחום $b < x < c$ מתקיים: $f'(x) \cdot (f(x))^2 \leq 0$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x) \cdot (f(x))^2$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים $x = 0$ ו- $x = 2a$.

6

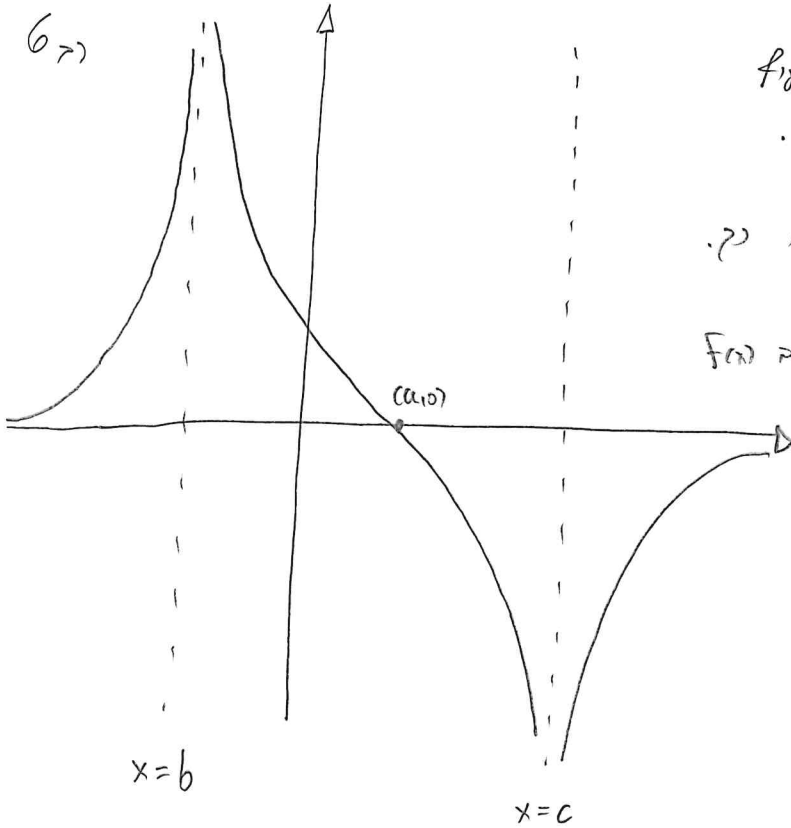
א(1)

כאשר הנגזרת חיובית הפסגה
 וכאשר הנגזרת שלילית הפסגה
 עזרים: $a < x < b$ ו- $x < a$
 והיציב: $a < x < b$

(2)

כאשר הנגזרת חיובית הפסגה קטורה שלילית
 וכאשר הנגזרת שלילית הפסגה קטורה שלילית
 ט: $a < x < b$ ו- $x < a$
 ח: $a < x < b$ ו- $x < a$





* הערה: אם נתני העלה אז סוף זה, אם אסימטות אופקיות. מכיוון שהעלה העלה נשארה סימטריה האפקית היא $y=0$ נסמך אותה נק.

* שיטה ה-א של נקודת הפיתול ה $f(x)$ היא a , מכיוון ששיטה ה-א של נקודת הקיבוע של פונקציה היא a .

ז)

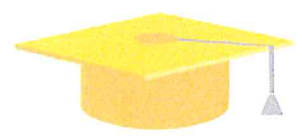
אםי תחום ההגדרה של $f(x)$ בתחומי הגרסאות $x^2 - x - 6 = 0$ יהיו $x=b$ ו $x=c$

יפני: $b=-2$ | $c=3$

(גין) $f(a) = 0$

$$\frac{18 - 36a}{a^2 - a - 6} = 0$$

$$18 - 36a = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$



6.3(1) $(f(x))^2 \geq 0$

דבור $b < x < c$ \Rightarrow
 א"י הנטות של $f(x)$ ניין
 איאן יש: $f'(x) < 0$ דבור
 ב $b < x < c$ ולכן התכנה

$f'(x)(f(x))^2 \leq 0$

התחלה $b < x < c$

3(2)

א"י הסעיף הקודם השטח

המוגבל בין הסוף ציר ה- x והישרים
 $x=0$ $x=1$ כולו מתוך אזור ואכ

$$= \int_0^1 f'(x)(f(x))^2 dx$$

א"י הנוסחה: $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$

נקט: $\left. \frac{(f(x))^3}{3} \right|_0^1$

$$= \frac{(f(1))^3}{3} - \frac{(f(0))^3}{3} = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right) = \frac{1}{12}$$



7. נתונה הפונקציה $f(x) = \tan(x) + \frac{1}{x}$.

ענה על הסעיפים א-ב בעבור התחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד ששיעוריה $(0, 2.798)$ בקירוב.

ב. מצא את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, המוגדרת לכל $x \neq 0$.

ג. האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכח את תשובתך.

ד. (1) הראה כי בתחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ שיעור ה- x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ שווה לשיעור

ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x , וקבע את סוגה של נקודת קיצון זו.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

כ. (1) תחום חיוביות: עבור $\tan x$: (בזיול) : א. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (א לשלם)

ובתחום ירוד: $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$: (בזיול) : מכנה שלוף מאפס $x \neq 0$

$$\boxed{0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}}$$

(2) אסימטות - של הפונקציה (א) המאונכות לבי ה- x :

"תשובות" - תחום חיוביות : $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$

עבור $x = 0$, נביע את הביטוי האלקרי של הפונקציה כק:

$$f(x) = \frac{x \tan x + 1}{x}$$

כ $x = 0$ מאפס מכנה אך לא מונה של הביטוי ולכן נוכל לקבוע כי $x = 0$ מהווה אסימטות.



א. (2) הנשק:

עקור $x = \frac{\pi}{2}$, מהבנות הפונקציה האנטי-טנגנס $\tan x$

יש אסימטוטה מאונקת לניר ה- x עקור $x = \frac{\pi}{2}$

ניתן לקבוע כי ל- $f(x) = \tan x + \frac{1}{x}$

מהווה אסימטוטה מאונקת לניר ה- x . $x = \frac{\pi}{2}$

כך גם עקור $x = \frac{3\pi}{2}$

* הארה: הנמסר של $\frac{1}{x}$ שאר לשק סופי ון עקור $x = \frac{\pi}{2}$ וכן עקור $x = \frac{3\pi}{2}$

ג. נבול בתחום הבאים שאור האסימטוטה ושיעור

ה- x של נקודת החיתוך של גרף $f(x)$ עם קיר ה- x בתחום

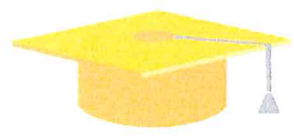
$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < x < 0.2798, \quad 0.2798 < x < \frac{3\pi}{2}$$

מחיבור הפונקציה $f(x)$ בתחום אלו ניתן להניח שיש של x מול אור התחום הן של מני-תמסר אף סימן של $f(x)$:

$$f(1) = \tan(1) + \frac{1}{1} \approx 2.557 > 0$$

$$f(2) = \tan(2) + \frac{1}{2} \approx -1.685 < 0$$

$$f(3) = \tan(3) + \frac{1}{3} \approx 0.191 > 0$$



ב. המשך:

מהמשוואה קצמוז הקודם נסיק:
בתחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

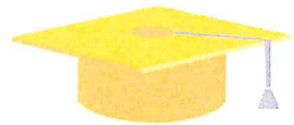
$0 < x < \frac{\pi}{2}$ א	$2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$ ב	תחומי המינימום של $f(x)$
$\frac{\pi}{2} < x < 2.798$ א		תחומי המקסימום של $f(x)$

ג. נוכיח כי $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ אינה פונקציה אי-זוגית.
נניח $-x$ בליטוי האלגוריתם של הפונקציה $f(x)$:

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = -\frac{\cos(x)}{x} = -f(x)$$

$\cos x$ אינה פונקציה זוגית

היא מתקיימת לכל $x \neq 0$ (תחום סימטרי סביב הישר $x=0$).
אכן ומתקיימת פונקציה אי-זוגית, הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית



$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

9. (11)

נצטרך את הנגזרת למחנה נקודות קריטיים:

$$f'(x) = \frac{-(\sin x) \cdot x - (\cos x) \cdot 1}{x^2}$$

נשווה $f'(x) = 0$

$$\frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} = 0 \Rightarrow -x \sin x - \cos x = 0$$

נשים לב כי $x = 0$ לא מהווה פתרון משום שהיא נקודה קריטית.

כך גם עם x עבורו $\cos x = 0$ מכיוון שיש לנו את $-x \cos x$ במכנה.

$$\frac{-x \sin x - \cos x}{-x \cos x} = 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\tan x + \frac{1}{x} = 0$$

כלומר: $f(x) = 0$

ובמחנה $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, לפי יחידת גאומטריה נקודות קריטיות.



פ.נ.ו השלך: $f(x) = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$

הגילוי האלגברי של (אזכר) ייתן גילוי של מנה
 בה הנחה חיובי. לכל $x \neq 0$ (ומובי הוגדרה של $f(x)$)
 סכן נולד לעציר מונה של (אזכר) קלרד

עקביות - סימן ינצח - הלניה קקודה $f(x) = 0$

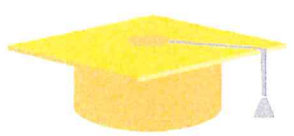
$$(-x \sin x - \cos x)' = -\sin x - x \cos x + \sin x = -x \cos x$$

עקור $x = 2.798$

$$-2.798 \cdot \cos 2.798 \approx 2.634 > 0$$

סכן נולד עקוד $x \approx 2.798$ יש $f(x) = 0$
קקודה קיטון מסוב מינימלי.

נהנל שיצור ה-x של את - מקיבור - הקיטון של הפונקציה $f(x)$
 שונה לשעור ה-x של קקודה יחידן של גילוי הפונקציה $f(x)$
 עמ ציר ה-x.



2. (2) שרטוט גרף $f(x)$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

נתקוב מעט בתחום $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$ ונשתמש

באזכרה כי $f(x)$ אי-זוגית - נשלמת יגורף

- $x=0$ מהווה אסימטוטה אנכית לקיר ה- x

כיוון שמאפס חניה אין לא מול (וציה נק' סינגולר) בתחום

$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ על קיר ה- x

- מהבולג סונקציה $\cos x$

חיטן על קיר x בתחום: $(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{3\pi}{2}, 0)$

נקיטות קנה תמו

- שיטור ה- y של קורס - התנימה:

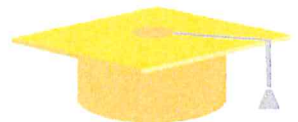
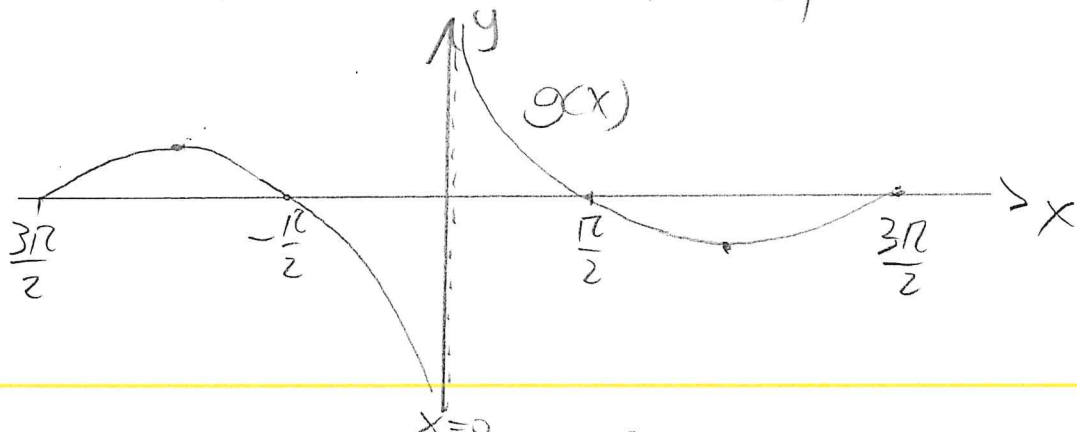
$$g(2.798) = \frac{\cos(2.798)}{2.798} \approx -0.337$$

- מנק התנימה נסיק גם אר בתחום העליה והירידה של $g(x)$:
בתחום: $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$

ירידה: $0 < x < 2.798$

עליה: $2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$

על פי הניח ומסקנו קורסו - נשרט טקירה של גרף $f(x)$:



8. חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים.

מחלק אחד של החוט יוצרים משולש שווה-צלעות ומן החלק האחר יוצרים מעגל.

נסמן ב- x את אורך צלע המשולש.

א. הבע באמצעות k את תחום ההגדרה של x .

ב. הבע באמצעות k את אורך צלע המשולש, שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראה כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי, אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל במעגל שהתקבל.

פתרון:
 $k - \text{היקף המעגל} = \text{זמן} = k - 2\pi r$

$$3x < k \rightarrow x < \frac{k}{3}$$

תחום ההגדרה עבור x הוא

$$0 < x < \frac{k}{3}$$

ב. סטל \sim עץ הוא πr^2

היקף \sim עץ הוא $2\pi r$

סכום:

$$3x + 2\pi r = k$$

\Downarrow

$$r = \frac{k - 3x}{2\pi}$$



שטח : הגזע הוא

$$\pi \cdot \left(\frac{k-3x}{2\pi} \right)^2$$

שטח הישבן הוא

$$\frac{x \cdot x \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

סכום השטחים יהיה:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} + \pi \cdot \left(\frac{k-3x}{2\pi} \right)^2$$

(ג) מניחים לפונקציה $f(x)$:

נמצא:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}x}{2} + 2\pi \left(\frac{k-3x}{2\pi} \right) \cdot \frac{-3}{2\pi}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3k}{2\pi} + \frac{9x}{2\pi}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2\pi} \right)x - \frac{3k}{2\pi}$$



נעשה לאפס ונסתוו:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2\pi}\right)X - \frac{3K}{2\pi} = 0$$

$$X = \frac{\frac{3K}{2\pi}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2\pi}} = 0.18K$$

ולכן נקבע עליה:

$$f''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2\pi} > 0 \rightarrow \text{מינימום}$$

לכן נקבע, נקבע $x = 0.18K$ יתקבל

כנסו שמה מינימום.

הכנסו הנתון שמתקבל הווא:

$$R = \frac{K - 0.54K}{2\pi} = 0.07K$$

הכנסו הנתון החוסם את המשוואה

$$r = \frac{x}{SMB} = \frac{0.18K}{SMB} = 0.207K \quad \text{הווא:}$$

הכנסו סוגי שונים וכן אי אפשר לחסום את המשוואה.

