

פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף נבצרים תשפ"ב, 2022, שאלון: 35581

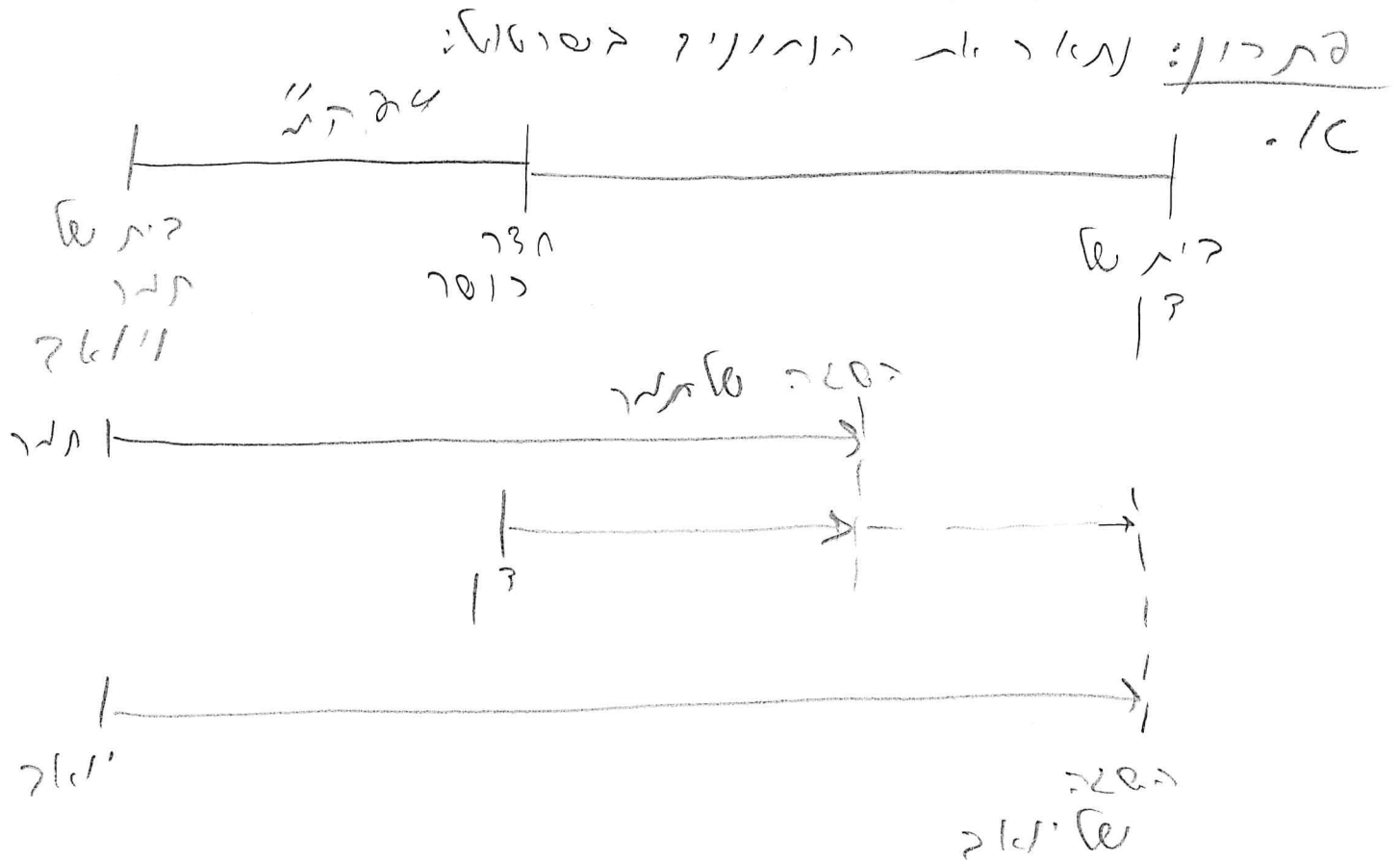
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. בין הבית של תמר ויואב לבין ביתו של דן יש שביל אופניים.
 לאורך שביל האופניים, בין שני הבתים, נמצא חדר כושר. המרחק בין חדר הכושר ובין הבית של תמר ויואב הוא 24 ק"מ.
 תמר יצאה מן הבית בשעה 6:00 ורכבה על אופניים במהירות קבועה לעבר ביתו של דן.
 בשעה 7:00 יצא יואב גם הוא מן הבית ורכב על אופניו לעבר ביתו של דן במהירות שגבוהה ב-5 קמ"ש ממהירות הרכיבה של תמר.
 בשעה 7:30 יצא דן מחדר הכושר ורכב על אופניו במהירות קבועה לעבר ביתו.
 תמר, יואב ודן רכבו שלושתם על אותו שביל אופניים.
 תמר השיגה את דן וחלפה על פניו בשעה 8:00.
 יואב ודן הגיעו שניהם לביתו של דן בשעה 9:15.
 א. מצא את המהירות של כל אחד משלושת הרוכבים.
 ב. מה היה המרחק בין יואב ובין דן כאשר תמר הגיעה לביתו של דן?



נסמן את המהירות של תמר ב- x ו- $1.05x$
 את הנתיבים בסרט:



<u>צד</u>	<u>מהירות</u>	<u>זמן</u>	<u>תאור התנועה</u>
$2x$	x	2 <td>תנועת שיוט</td>	תנועת שיוט
$2x - 24$	$\frac{2x-24}{2} = 4x - 48$	$\frac{1}{2}$	תנועת שיוט
$2\frac{1}{4}x + 11\frac{1}{4}$	$x + 5$	$2\frac{1}{4}$	תנועת שיוט
$7x - 84$	$4x - 48$	$1\frac{3}{4}$	תנועת שיוט

משוואה - ציבים את ההסטה של יואל ק"מ: $11\frac{1}{4}$

$$2\frac{1}{4}x + 11\frac{1}{4} = 7x - 84 + 24$$

\Downarrow

$$4\frac{3}{4}x = 71\frac{3}{4}$$

\Downarrow

$$x = 15$$

המהירות - ה' - 15 ק"מ, יואל 11 ק"מ
- 13 - 12 ק"מ

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע →

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



ב. הנהיג מחזור הכושר לביתו של צ'ן הווא

$$2x - 84 = 7$$

הנהיג מהבית של ג'ו לביתו של צ'ן הווא

$$2x + 24 = 45$$

חמי נובבה 3 שנה $(\frac{45}{15})$ וזכו הטינה

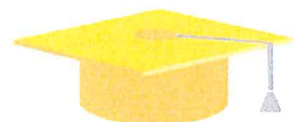
לביתו של צ'ן הטינה 00:50, כחומר רבג טנה

לפני שקן וי/אק הטינה לביתו של צ'ן.

מכאן ש-י/אק היה 5 ד"ג $(\frac{24}{4})$ מהבית של צ'ן

וצ'ן היה קד"ג $(\frac{12}{4})$ מהבית שלו.

זכו המחזור ביניהם היה 2 ד"ג



2. נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם a_1, a_2, a_3, \dots ומנתה היא q. כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

א. האם הסדרה $\dots, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}$ היא סדרה הנדסית? הוכח את תשובתך.

ב. (1) מסמנים ב- S_n את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A (n טבעי).

$$\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

הוכח כי לכל n מתקיים:

(2) נתון: $a_1 = 1, q = 3$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה A גדול פי 6561 מן הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$

מצא את n.

הסדרה B מתקבלת מן הסדרה A על ידי הפיכת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A.

איברי הסדרה B הם b_1, b_2, b_3, \dots .

נסמן ב- T_m את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה B. נתון כי m הוא מספר טבעי אי-זוגי.

ג. נתונה נוסחה: $\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots + \frac{1}{a_m}$

קבע אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכח את תשובתך.

פתרון:

א. האיבר הכללי של הסדרה הנדסית

הוא $\frac{1}{a_n} \cdot$ האיבר הקודם הוא $\frac{1}{a_{n+1}}$

אפשר לומר:

$$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q}$$

הסדרה הנדסית עם $q = \frac{1}{3}$.



ה. (ז) מכיוון שהגדלים של הסדרה החדשה
 הים $\frac{1}{q}$ (הפינו אותם להפסוף למהחלה
 $|a_n|$ הגדלים תהיה q והאיבר הראשון
 יהיה $\frac{1}{a_1}$
 נחשב את הסכום:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a_1}(q^n - 1)}{q - 1}$$

הסכום של הסדרה הנקראת הנוא:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{S_n}{a_1}$$

1.3 > בסכום שהישקנו וזה כלל:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{S_n}{a_1} = \frac{S_n}{a_1 \cdot a_1}$$



$$(2) \text{ נתון: } q=1, q=3.$$

כאילו כי כנ"ל הסדרה היא

אז $6,561$ מכ"ס הסדרה

שהיא $q^n = 6,561$. לפי:

$$\frac{\sum_n}{q \cdot q^n} \cdot 6,561 = \sum_n$$

$$q \cdot q^n = 6,561$$

\Downarrow

$$q \cdot q \cdot q^{n-1} = 6,561$$

\Downarrow

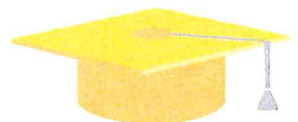
$$3^{n-1} = 6,561$$

\Downarrow

$$n-1 = \log_3 6,561 = 8$$

\Downarrow

$$\boxed{n=9}$$



ד. נתון הסדרה ב:

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \dots = a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$$

סכום הסדרה הוא T_m .

הסדרה הזו היא סדרה הנדסית

הגורם הוא $-q$, ולכן:

$$T_m = \frac{a_1 \cdot ((-q)^m - 1)}{-q - 1}$$

נתון כי m אי זוגי ולכן:

$$T_m = \frac{a_1 (-q^m - 1)}{-q - 1} \Rightarrow T_m = \frac{a_1 (q^m + 1)}{q + 1}$$

כעת נשתמש בשיטת ההפרש:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots + \frac{1}{a_m} = \frac{1}{a_m} - \dots - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} =$$

$$= \frac{1}{a_m} \frac{((-q)^m - 1)}{-q - 1} = \frac{1}{a_m} \cdot \frac{q^m + 1}{q + 1} = \frac{1}{a_m} \cdot \frac{T_m}{a_1} =$$

$$= \frac{T_m}{a_1 \cdot a_m} = \frac{T_m}{b_1 \cdot b_m}$$

הנוסחה נכונה



3. כדי להתקבל ללימודים במכללה מסוימת יש לעבור מבחן קבלה. כל השאלות במבחן הן מתוך מאגר שיש בו n שאלות שונות. לנבחנים יש גישה למאגר והם יכולים להתכונן למבחן באמצעותו. ביום הבחינה, כל נבחן מוציא באקראי מתוך קופסה מלאה בפתקים שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה. בכל אחד מן הפתקים כתובה שאלה אחת מתוך מאגר השאלות. מספר הפתקים שבקופסה שווה למספר השאלות שבמאגר, ובכל פתק כתובה שאלה אחרת. לאחר שהוציא הנבחן שלושה פתקים מן הקופסה וקרא את שלוש השאלות, הוא מחזיר את שלושת הפתקים לקופסה. הנבחן יתקבל למכללה אם הוא יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא. נתנאל התכונן למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון רק על 20 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון. ידוע כי ההסתברות של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים שהוא הוציא היא $\frac{34}{69}$.

א. מצא את n . (1)

ב. מהי ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה? (2)

ג. אם ידוע כי נתנאל התקבל למכללה, מהי ההסתברות שהוא לא ענה נכון על השאלה שבפתק הראשון שהוא הוציא? רמי התכונן גם הוא למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון על 40 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ד. האם ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי גדולה פי 2 מן ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי? נמק את תשובתך.

$$P(\text{נבחן ענה נכון על שתי שאלות}) = 1 - P(\text{נבחן ענה נכון על אחת או שום שאלה}) = 1 - \frac{n-20}{n} \cdot \frac{n-21}{n-1}$$

$$1 - \frac{n-20}{n} \cdot \frac{n-21}{n-1} = \frac{34}{69}$$

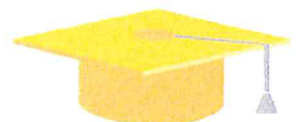
$$\frac{35}{69} = \frac{(n-20)(n-21)}{n(n-1)} \rightarrow 35n(n-1) = 69(n-20)(n-21)$$

$$35n^2 - 35n = 69n^2 - 2829n + 28980 \rightarrow 34n^2 - 2794n + 28980 = 0$$

$$\left(\begin{matrix} n=70 \\ n=207 \end{matrix} \right) \quad n = \frac{207}{17} \notin \mathbb{N}$$

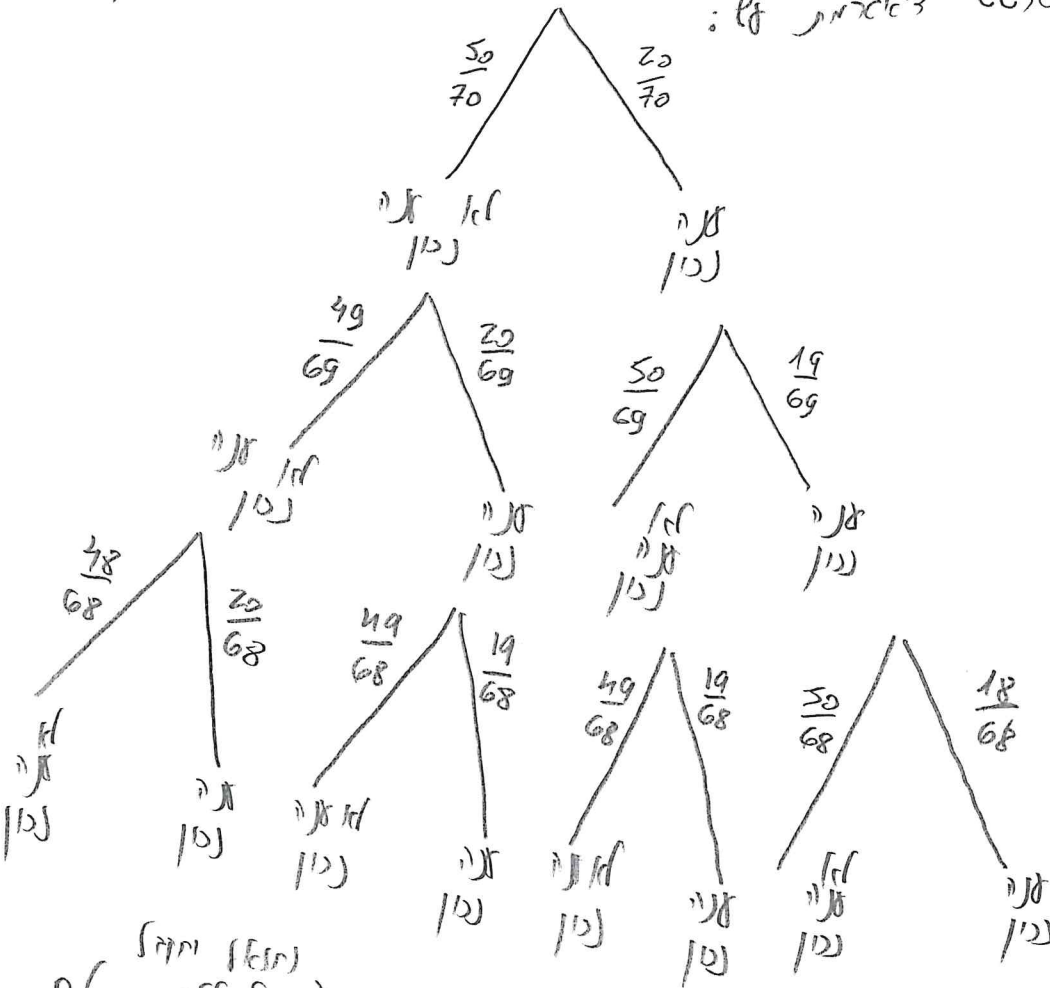
נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.**



3/1(2)

(סכום) ביאגראם של:

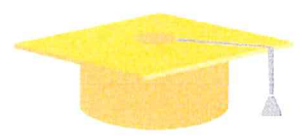


$$P(\text{תנאי יתקדף אצלך}) = \frac{20}{70} \cdot \frac{19}{69} + \frac{20}{70} \cdot \frac{50}{69} \cdot \frac{19}{68} + \frac{50}{70} \cdot \frac{20}{69} \cdot \frac{19}{68} = \frac{76}{391}$$

ב) $P(\text{אז אתה ניין} \mid \text{תנאי יתקדף אצלך}) = \frac{P(\text{אז אתה ניין} \cap \text{תנאי יתקדף אצלך})}{P(\text{תנאי יתקדף אצלך})} = \frac{\frac{50}{70} \cdot \frac{20}{69} \cdot \frac{19}{68}}{\frac{76}{391}} = \frac{25}{84}$

נמידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



ג) 3

$$P(\text{שלוש כדורים שחורים}) = \frac{40}{70} \cdot \frac{39}{69} \cdot \frac{38}{68} = \frac{494}{2737}$$

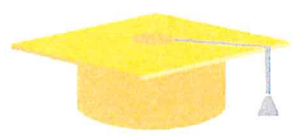
$$P(\text{שלוש כדורים לבנים}) = \frac{20}{70} \cdot \frac{19}{69} \cdot \frac{18}{68} = \frac{57}{2737}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{494}{2737}}{\frac{57}{2737}} = 2$$

ההסתברות שרמי יזכה בכדור שחור או שלוש כדורים שחורים היא 2
 ההסתברות שרמי יזכה בכדור לבן או שלוש כדורים לבנים היא 1

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

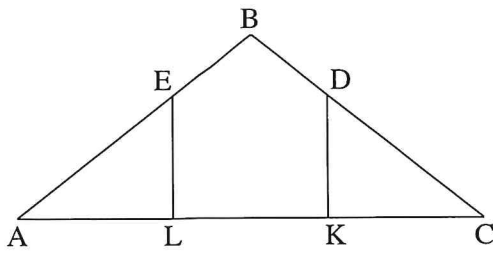


4. בצירוף שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $BA = BC$.

מנקודה D הנמצאת על השוק BC הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה K .

מנקודה E הנמצאת על השוק BA הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה L .

נתון: $AL = LK = KC$.



א. חשב את $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו- EK נפגשים בנקודה G .

ב. הוכח כי המרובע $BDGE$ הוא דלתון.

נתון: $AC = 45$.

היקף המרובע $EDKL$ הוא 54.

ג. חשב את אורך הקטע BG .

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על הישר BG שעבורה המרובע $BDFE$ הוא בריחסימה במעגל?

נמק את תשובתך.

פתרון:

טענה

① $\angle DKC = \angle ELA = 90^\circ$

② $AL = LK = KC$

③ נוקיט נקודה H

AC ק"ל 5

④ $AC = 6x$

⑤ $AB = CB$

⑥ $AH = CH = 3x$

⑦ $AL = LK = KC = 2x$

נימוק

ניון $EL \perp AC, DK \perp AC$ ניון

ניון

$AC = 6x = 2x + 2x + 2x$

(סיווג)
קטע AL (סיווג)

סימון

ניון

זכה לסימון במעגל שווה קווא
לפי P ו- S סימון.

סימון $AL = LK = KC = 2x$





נימוק

חיסוי קטק. אפי 7, 6

אפי 3, 7

אם בין שני ישרים וישו

לשי שחוקן אלה יש

15 ו 15 // 15 - מוויח - 15

אפי הישרים מקבילים

משפט טאלס. אפי 10

חישוק. אפי 7, 8

טענה

$HK = X$ (8)

$\angle DKC = \angle BHC = 90^\circ$ (9)

$BH \parallel DK$ (10)

$\frac{BD}{CD} = \frac{KC}{HK}$ (11)

$\frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}$ (12)

נימוק

G היה מרכז (13)

הקטקן DL - EK

$\angle BCA = \angle BAC$ (14)

$\triangle KCD \cong \triangle LAE$ (15)

\parallel
 $CD = AE$ (16)

נימוק

15 - קטט בעלם שווים

שווה 15 ו 15. אפי 5

משפט חפיפה 5, 7, 5

אפי 1, 2, 14

באגן מתאימה בשושים

חופפים שווה 15 ו 15

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעבודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





נימוק

חיסור קטעין מ'אויג'.

אפי 5, 16

בניית ערך

קטע מ'אויג' מ'אויג' ג'אויג'.

חובפיג שוה 50 50. אפי 15

אם בין שתי ישרים וישר

שאישי שוחן אהם יא

צו צוויי מ'אויג' שוה

אפי 15 הישרים מקבילים. אפי 1

מ'אויג' ב'אויג' שוה אהם ש

קטע נ'אויג' שוה ו'אויג' אפי 1

הזוה מקבילים. אפי 19, 20

מ'אויג' קטע שוה אהם

ישרה היוה מקבילים. אפי 1, 21

אפי 22 הישרים מקבילים. אפי 13

אפי 22 שוה, ו'אויג' שוה אהם

מ'אויג' קטע שוה אהם

קטע מ'אויג' שוה היוה

ב'אויג' אפי 17, 23

טענה

$BD = BE$ (17)

DE נ'אויג' אהם (18)

$KD = LE$ (19)

$KD \parallel LE$ (20)

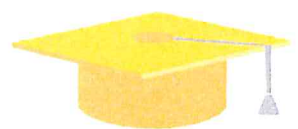
$EDKL$ מקבילים. (21)

$EDKL$ מקבילים (22)

$EG = DG$ (23)

BDE מקבילים (24)

ש.ש. ק'



נילוך

נתון

נתון

חישוק. אבי 2, 25

דאגה נאציגה בנאבן סולל

חישוקי אבי 26, 27, 28
היא נאבן

אזכסוניק בנאבן סאונכיו.

אבי 24

אבי 3, 30

אבי 6

משבט תאלס (נרמח דה סא)

אבי 10

חישוק

זאל היולו נאגיקע קאל

דאס וויגיקע זאלקע
האט אבי 10

טאנה

$AC = 45$ (25)

$P_{ENKL} = 54$ (26)

$AL = LK = KC = 15$ (27)

$ED = 15$ (28)

$EL = EK = 12$ (29)

$BG \perp ED$ (30)

$BH \perp GC$ (31)

$HC = 22.5$ (32)

$\frac{BH}{DK} = \frac{HC}{CK}$ (33)

\parallel

$BH = 18$ (34)

GH האט אטעגו (35)

דאס האט אטעגו



נימוק

דגל אהרן שווה לדגל
הדגל הישן.
חיסוי דגלים. אפי 36, 39

לגים

$GH = 6$ (36)

$BG = 12$ (37)

~ ש.ל. 2

כאשר יתקיים

$DE \perp AB$ - $DF \perp BC$

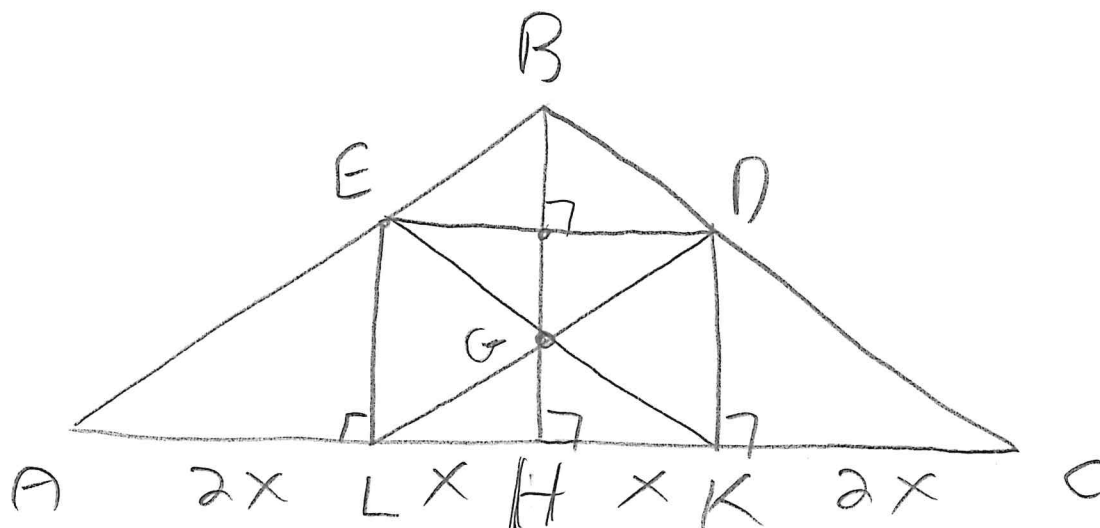
$BD \perp FE$ יהיה

קלרון

(38) כ/.

~ ש.ל. 3

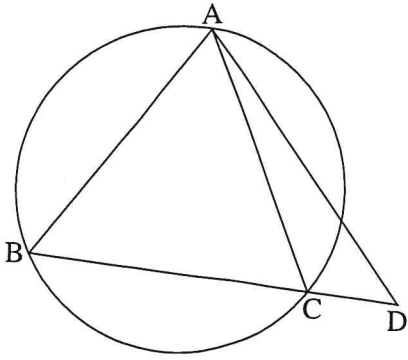




למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





5. בצירוף שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $AB = AC$, שחסום במעגל שרדיוסו R . האריכו את הבסיס BC עד לנקודה D והעבירו ישר מנקודה D לנקודה A .

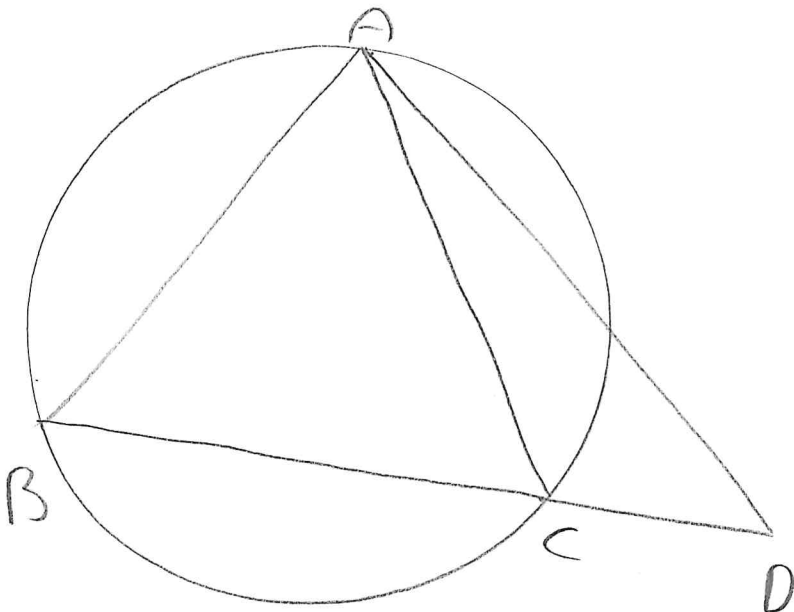
נתון: $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle CAD = \alpha$.

- א. הוכח כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD .
- ב. הבע את שטח משולש ACD באמצעות R ו- α .

נסמן ב- m את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABC .

ג. (1) האם ייתכן כי $m = 0.5$? נמק את תשובתך.

(2) נתון כי $m = 0.6$. מצא את גודלי זוויות המשולש ABC .



פתרון:

ל. $\triangle ABD$:

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = 2 \cdot R_{ABD}$$

$\triangle ACD$:

$$\frac{AC}{\sin \angle ADC} = 2 \cdot R_{ACD}$$

כי $AB = AC$ וכן $\angle ADB = \angle ADC$ (זוויות אנכיות) אז $R_{ABD} = R_{ACD}$.

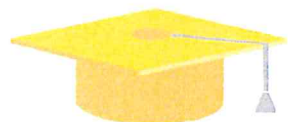
לכן: $R_{ABD} = R_{ACD}$

לפיכך אנו יכולים לומר כי $m = 0.5$ לא ייתכן חוסם.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.

אל תתפשר עליה.



$\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R \Rightarrow AC = 2R \cos \alpha$$

$\triangle ACD$:

$$\frac{AC}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{CD}{\sin \alpha} \Rightarrow CD = \frac{2R \cos \alpha \sin \alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$CD = \frac{R \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = R \tan 2\alpha$$

נראה נכון:

$$S_{ACD} = \frac{AC \cdot CD \cdot \sin(90^\circ + \alpha)}{2}$$

נכון:

$$S_{ACD} = \frac{2R \cos \alpha \cdot R \tan 2\alpha \cdot \cos \alpha}{2}$$

$$S_{ACD} = R^2 \cos^2 \alpha \tan 2\alpha$$



$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = m$$

ד. נתון:

וקיף α של ABC :

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{2R \cos \alpha \cdot 2R \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$= 2R^2 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha$$

וקיף α של ACD :

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 \cos^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{2R^2 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}$$

וקיף α של ABC :

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha}$$

(1) $\alpha = 5 - m$ הנתון:

$$\frac{1}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 \rightarrow \alpha = 30^\circ$$

כלומר $\alpha = 5 - m = 30^\circ$ כלומר $m = 0.5$.
התשובה: לא יתכן כי $m = 0.5$.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



ד. (2) $\cos \alpha = 0.6$ ו $\alpha = 1$: $\cos \alpha = 0.6$

$$\frac{1}{2} = 0.6$$

$$\cos \alpha = 0.6$$

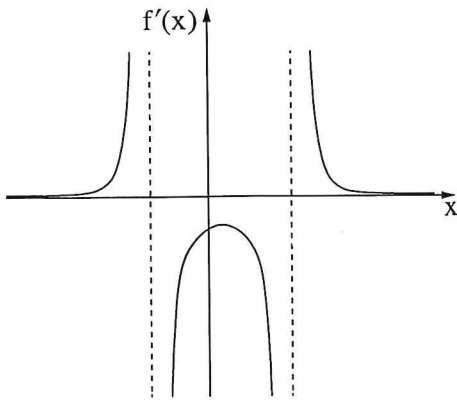
$$\cos \alpha = \frac{5}{6}$$

$$\alpha = 33.56^\circ$$

$$\angle BAC = 33.56^\circ$$

$$\angle ABC = \angle ACB = 73.72^\circ$$





6. נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x < b$, $b < x < c$, $c < x$

וגזירה בכל תחום הגדרתה.

בסרטוט שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד

ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים: $x = c$, $x = b$, $y = 0$.

שיעור ה- x של נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא a .

a , b ו- c הם פרמטרים.

א. הבע את תשובותיך באמצעות a , b ו- c , אם יש צורך.

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה (U) ואת תחומי הקעירות כלפי מטה (\cap) של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(a, 0)$.

ב. סרטוט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון גם כי $f(x) = \frac{18 - 36x}{(x^2 - x - 6)^2}$

ג. מצא את a , b ו- c .

ד. (1) הראה כי בתחום $b < x < c$ מתקיים: $f'(x) \cdot (f(x))^2 \leq 0$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x) \cdot (f(x))^2$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים $x = 0$ ו- $x = 2a$.

6

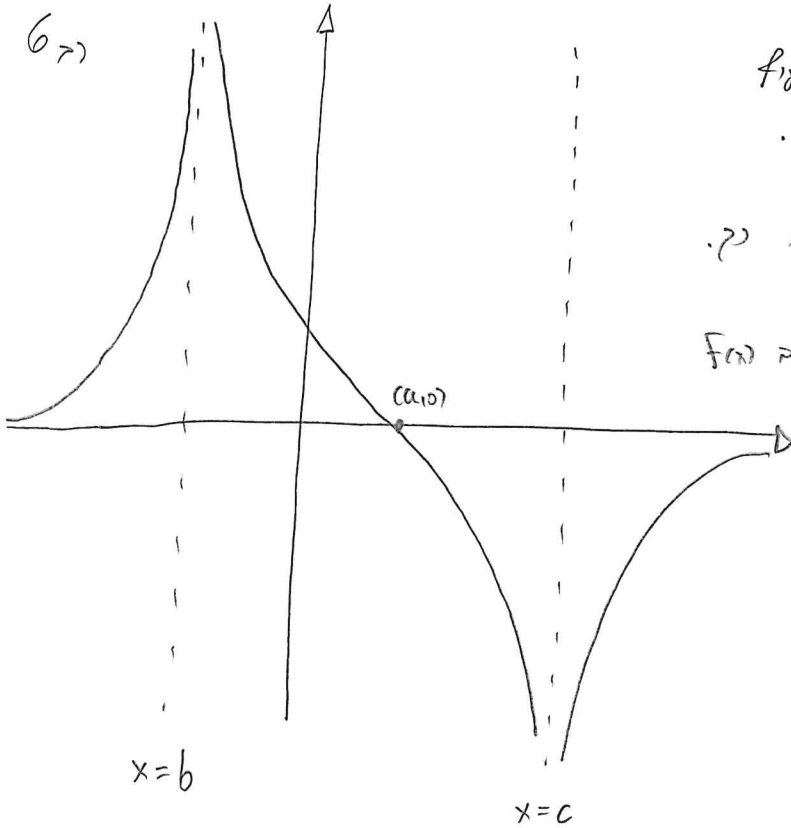
א(1) עולה וירידה ונקודה
 כאשר הנגזרת חיובית הפסגה
 וכאשר הנגזרת שלילית הסלע
 עזרים: $x < b$ או $x > c$
 והיציב: $b < x < c$

(2) כאשר הנגזרת חיובית הפסגה קטורה שלילית
 וכאשר הנגזרת שלילית יורדת הפסגה קטורה שלילית ונקודה

ט: $x < b$ או $a < x < b$

ח: $a < x < c$ או $x > c$





* הערה: אם נתני העלה אז סוף זה, אם אסימטות אופקיות אסמטיות. מכיוון שהעלה העלה נשארה סימטית האפקט הוא $y=0$ נסמט אופקית נק.

* סימטריה היא של נקודת הסימטריה $(a, 0)$ היא a , מכיוון שהעלה היא של נקודת הקיבוע של פונקציה היא a .

ז)

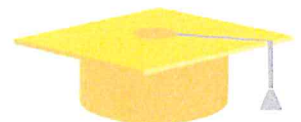
אם נתנו העלה של $f(x)$ בתחום $x^2 - x - 6 = 0$ יהיו

$x = b$! $x = c$

יפני: $b = -2$ | $c = 3$

$\frac{18 - 36a}{9^2 - a - 6} = 0$: $f(a) = 0$ (גין)

$18 - 36a = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$



6.3(1) $(f(x))^2 \geq 0$

דבור $b < x < c$ \Rightarrow
 א"י הסטאט של $f(x)$ נ"ן
 איאז יש: $f'(x) < 0$ דבור
 ב $b < x < c$ ולכן התכנה

$f'(x)(f(x))^2 \leq 0$

התחל $b < x < c$

3(2)

א"י הסט"ף הקיבצם הסטח

המוצ"פ בין הסט"ף צ"ר ה- x והיש"ם
 $x=0$ $x=1$ כולו מתוך א"י וזכ

$$= \int_0^1 f'(x)(f(x))^2 dx$$

א"י הנוסחה: $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$

$$= \left. \frac{(f(x))^3}{3} \right|_0^1$$
 (ק"פ)

$$= \frac{(f(1))^3}{3} - \frac{(f(0))^3}{3} = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right) = \frac{1}{12}$$



7. נתונה הפונקציה $f(x) = \tan(x) + \frac{1}{x}$.

ענה על הסעיפים א-ב בעבור התחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד ששיעוריה $(0, 2.798)$ בקירוב.

ב. מצא את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, המוגדרת לכל $x \neq 0$.

ג. האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכח את תשובתך.

ד. (1) הראה כי בתחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ שיעור ה- x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ שווה לשיעור

ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x , וקבע את סוגה של נקודת קיצון זו.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

כ. (1) תחום חיוביות: עבור $\tan x$: נבדוק: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (א לסי)

ובתחום ירידה: $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$
נבדוק: נכנה לוח מאפס $x \neq 0$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{או} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

(2) אסימטות של הפונקציה (אם המאונכות לבי ה- x):

"תשובות" - תחום חיוביות: $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$

עבור $x = 0$, נביע את הביטוי האלקטרי של הפונקציה כק:

$$f(x) = \frac{x \tan x + 1}{x}$$

כאשר $x = 0$ מאפס נכנה את הביטוי של הביטוי ולכן נוכל לקבוע כי $x = 0$ מהווה אסימטות.



א. (2) הנשק:

עקור $x = \frac{\pi}{2}$, מהבנות הפונקציה האנטי-טנגנס

יש אסימטוטה מאונקת לקיר ה- $x = \frac{\pi}{2}$ עקור $x = \frac{\pi}{2}$

ניתן לקבוע כי $f(x) = \tan x + \frac{1}{x}$

מהווה אסימטוטה מאונקת לקיר ה- $x = \frac{\pi}{2}$

כך גם עקור $x = \frac{3\pi}{2}$

* הארה: הנמסר של $\frac{1}{x}$ שאר לשק סופי ון עקור $x = \frac{\pi}{2}$ וכן עקור $x = \frac{3\pi}{2}$

ג. נבול בתחום הבאים שאור האסימטוטה ושיעור

ה- x של נקודת החיתוך של $f(x)$ עם קיר ה- x הימני

$0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x < 0.2798$, $0.2798 < x < \frac{3\pi}{2}$

מתייבש הפונקציה $f(x)$ בתחום אלו ניתן לקיר עקור של x מול אור מהתחום הנ"ל של מן-תמסר א-סימן של $f(x)$:

$f(1) = \tan(1) + \frac{1}{1} \approx 2.557 > 0$

$f(2) = \tan(2) + \frac{1}{2} \approx -1.685 < 0$

$f(3) = \tan(3) + \frac{1}{3} \approx 0.191 > 0$



ב. המשך:

מהמשוואה קצמוז הקובע נסיק:
בתחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ א	$2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$ ב	תחומי המינימום של $f(x)$
$\frac{\pi}{2} < x < 2.798$ א		תחומי המקסימום של $f(x)$

ג. נוכיח כי $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ אינה פונקציה אי-זוגית.
נניח $-x$ בליטוי האלגוריתם של הפונקציה $f(x)$:

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = -\frac{\cos(x)}{x} = -f(x)$$

↑
פונקציה זוגית

הנחה: $x \neq 0$ (תחום סימטרי סביב הישרי).
אכן ומתקיים $f(-x) = -f(x)$, הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית.



$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

9. (11)

נצטרך את הנגזרת למחוקה נקראו קריטיים:

$$f'(x) = \frac{-(\sin x) \cdot x - (\cos x) \cdot 1}{x^2}$$

נשווה $f'(x) = 0$

$$\frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} = 0 \Rightarrow -x \sin x - \cos x = 0$$

נשים לב כי $x = 0$ לא מהווה פתרון משום שהמכנה מתאפס.

כך גם עם $\cos x = 0$ עבור x עבורו $\cos x = 0$

על כן ננסה לחלק את המשוואה ב- $-x \cos x$ (אם $\cos x \neq 0$)

$$\frac{-x \sin x - \cos x}{-x \cos x} = 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\tan x + \frac{1}{x} = 0$$

כלומר: $f(x) = 0$

ובמחוז $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, לפי יחידן גאומטרי יק $x \approx 2.799$ מהווה פתרון למשוואה.



$$f(x) = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$$

פירוט המשך:

הגילוי האלגברי של (אזכר) ייתן גילוי של מנה
 בה הנחה חיובי. לכל $x \neq 0$ (ומובח הוגדרה של $f(x)$)
 סכן נולד לעציר מונה של (אזכר) קלוד

עקביות - סימן ילגז - הלניה קקודה $f(x) = 0$

$$(-x \sin x - \cos x)' = -\sin x - x \cos x + \sin x = -x \cos x$$

עקור $x = 2.798$

$-2.798 \cdot \cos 2.798 \approx 2.634 > 0$

סכן נולד עקוד $x \approx 2.798$ יש $f(x) = 0$
קקודה קיטון מסוג מילימטר.

הנהל שיטור ה-x של את - מקיבור - הקיטון של הפונקציה $f(x)$
 שונה לשטור ה-x של קקודה יחידן של גילוי הפונקציה $f(x)$
 עמ ציר ה-x.



2. (2) שרטוט גרף $f(x)$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

נתקור את התחום $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$ ונשתמש

באזכרה כי $f(x)$ אי-זוגית - נשלח יגורף

- $x=0$ מהווה אסימטוטה אנכית לקיר ה- x

כיוון שהאספס מתנה אן לא מואה (וציה נק' סינולויה בתחום

$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ על קיר ה- x)

- מהבולנה סונקטייה $\cos x$

חיצון על קיר x בתחום: $(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{3\pi}{2}, 0)$

נקיטות קצה תמוך

- שיטור ה- y של קורס התנימשה:

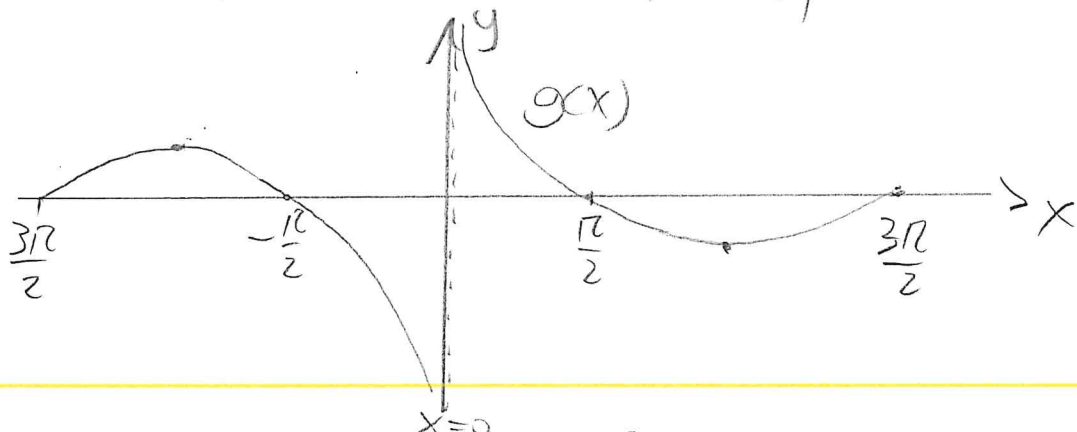
$$g(2.798) = \frac{\cos(2.798)}{2.798} \approx -0.337$$

- מנק' התנימשה נסיק גם אר- תמונה העליה וירידיה של $g(x)$:
בתחום: $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$

ירידיה: $0 < x < 2.798$

עלייה: $2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$

על פי הניש ומסקנו- קורסו- נשרט נשקיה של גרף $f(x)$:



8. חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים.

מחלק אחד של החוט יוצרים משולש שווה-צלעות ומן החלק האחר יוצרים מעגל.

נסמן ב- x את אורך צלע המשולש.

א. הבע באמצעות k את תחום ההגדרה של x .

ב. הבע באמצעות k את אורך צלע המשולש, שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראה כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי, אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל במעגל שהתקבל.

פתרון:
 $k - \text{היקף המעגל} = \text{זמן} = k - 2\pi r$

$$3x < k \rightarrow x < \frac{k}{3}$$

תחום ההגדרה עבור x הוא

$$0 < x < \frac{k}{3}$$

ב. סטל \sim עץ הוא πr^2

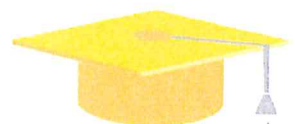
היקף \sim עץ הוא $2\pi r$

סכום:

$$3x + 2\pi r = k$$

\Downarrow

$$r = \frac{k - 3x}{2\pi}$$



שטח : הגזע הוא

$$\pi \cdot \left(\frac{k-3x}{2\pi} \right)^2$$

שטח הישבן הוא

$$\frac{x \cdot x \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

סכום השטחים יהיה:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} + \pi \cdot \left(\frac{k-3x}{2\pi} \right)^2$$

(ג) מניחים אפונה ליה: $f(x)$:

נמצא:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}x}{2} + 2\pi \left(\frac{k-3x}{2\pi} \right) \cdot \frac{-3}{2\pi}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3k}{2\pi} + \frac{9x}{2\pi}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2\pi} \right)x - \frac{3k}{2\pi}$$



נעשה כאן ינסיון:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2\pi}\right)X - \frac{3K}{2\pi} = 0$$

$$X = \frac{\frac{3K}{2\pi}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2\pi}} = 0.21K$$

ולכן פה נראה:

$$f''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2\pi} > 0 \rightarrow \text{מינימום}$$

עם כוונה גדולה יותר $x = 0.21K$ יתקבל

כמות של מינימום.

הכנסות הגדולות ביותר יהיו:

$$R = \frac{K - 0.54K}{2\pi} = 0.07K$$

הכנסות הגדולות ביותר יהיו כאשר המכירות יהיו:

$$r = \frac{x}{SMC} = \frac{0.21K}{SMC} = 0.24K \quad \text{הוא}$$

הכנסות שונות יותר אי אפשר לחסוך את השלש בלבד.

