שאלון 35571 מועד
חורף נבצרים תשפ״ב

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35372 מועד חורף נבצרים תשפ״ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

מרובע חסום במעגל אם סכום זוויות נגדיות שווה ל $180°$.

לכן, נוכיח ש- $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180°$ **, כלומר** $a_1 + a_4 = 180°$.

(או נוכיח ש- $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$ **, כלומר** $a_2 + a_3 = 180°$.**)**

סכום זוויות במרובע הוא $360°$ **, ולכן** $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$.

מכאן, על פי הנתונים, נקבל את המשוואה: $a_1 + a_2 + a_4 + a_3 = 360°$.

a_1, a_2, a_3, a_4 **הם, בסדר הזה, ארבעה איברים של סדרה חשבונית עולה.**

לכן: $a_1 + a_3 = 2a_2$ **, וגם** $a_2 + a_4 = 2a_3$.

(איבר בסדרה חשבונית הוא ממוצע חשבוני של האיבר שקודם לו ושל זה שעוקב לו.)

נציב במשוואה:

$$2a_2 + 2a_3 = 360° \quad / : 2$$

$$a_2 + a_3 = 180°$$

$$\boxed{\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°}$$

תשובה: הוכחנו שהמרובע ABCD **חסום במעגל.**

1ב

(1) ניתן לראות שמספרי הקוביות בכל קומה, מהווים סדרה, שבה $a_n = n^2$.

לכן, על מנת למצוא כמה קוביות נדרשות כדי לבנות מגדל בן 7 **קומות, יש למצוא את** S_7.

$$S_7 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$$

$$\boxed{S_7 = 140}$$

תשובה: נדרשות 140 **קוביות סך הכול, כדי לבנות באותו אופן מגדל שבו** 7 **קומות.**

(2) על פי הנוסחה, שניתנה: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$.

מכאן, שמספר הקוביות בקומה ה- n **הוא** $S_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

במגדל הנתון יש 10 **קומות, ומכאן שמספר הקוביות שבו הוא** $S_{10} = \frac{10}{6}(10+1)(2\cdot 10+1) = 385$.

מספר הקוביות, שנדרשות עבור מגדל בן 100 **קומות, הוא** $S_{100} = \frac{100}{6}(100+1)(2\cdot 100+1) = 338{,}350$.

בהתאם יש להוסיף, לקוביות שקיימות כבר, $337{,}965$ **קוביות** $= 338{,}350 - 385$.

תשובה: יש להוסיף $337{,}965$ **קוביות למגדל בן** 10 **קומות, כדי שיהיו בו** 100 **קומות.**

נתונה הפונקציה $f(x)=\left[\cos(x-\pi)+\cos(\pi-x)\right]^2+4(\sin(-x))^2-5$ **, המוגדרת לכל** x **.**

נעבד את הפונקציה, על פי זהויות הטריגו (בבגרות, לא נדרש לכתוב אותן כנימוק, פשוט להשתמש בהן):

$$f(x)=\left[\cos(x-\pi)+\cos(\pi-x)\right]^2+4(\sin(-x))^2-5$$

$$f(x)=\left[\cos(\pi-x)+\cos(\pi-x)\right]^2+4(-\sin x)^2-5 \quad \leftarrow \cos(-\alpha)=\cos\alpha\,,\ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$f(x)=(-2\cos x)^2+4\sin^2 x-5 \quad \leftarrow \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

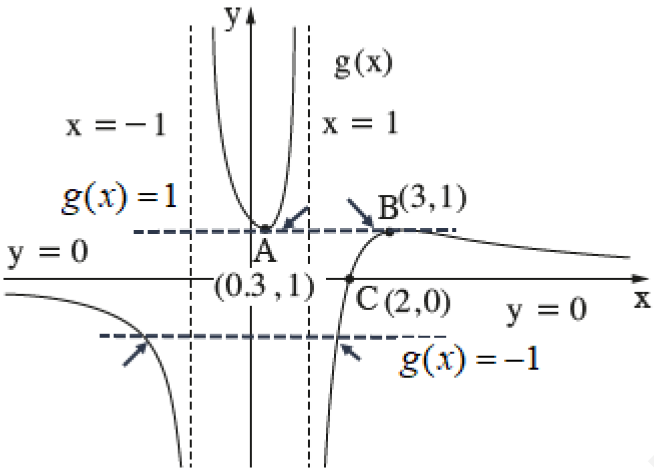
$$f(x)=4(\cos^2 x+\sin^2 x)-5$$

$$f(x)=4-5 \quad \leftarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\boxed{f(x)=-1}$$

קבלנו ש- $f(x)$ **היא פונקציה קבועה ושלילית, ולכן אין לה נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **.**

תשובה: לפונקציה $f(x)$ **אין נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **.**



(1) תחום ההגדרה של $g(x)$ **הוא** $x\neq 1$ **,** $x\neq -1$.

$\frac{1}{g(x)}$ **, מוגדרת כטרנספורמציה של** $g(x)$,

ובהתאם מקבלת תחילה את התחום ההגדרה שלה, שהוא $x\neq 1$ **,** $x\neq -1$.

בנוסף, מכיוון ו- $g(2)=0$ **הרי שעבור** $x=2$ **, המכנה של** $\frac{1}{g(x)}$ **יתאפס, ולכן נדרש גם** $x\neq 2$.

תשובה: תחום ההגדרה של $\frac{1}{g(x)}$ **הוא** $x\neq 1$ **,** $x\neq -1$ **,** $x\neq 2$.

(2) הגרף של $g(x)$ **והגרף של** $\frac{1}{g(x)}$ **, נפגשים כאשר** $g(x)=\frac{1}{g(x)}$.

$$g(x)=\frac{1}{g(x)}$$
$$g^2(x)=1$$
$$g(x)=1,\ g(x)=-1$$

על פי הגרף הנתון $g(x)=1$ **פעמיים (בנקודות** A **ו-** B**), ו-** $g(x)=-1$ **פעמיים (ראו חיצים).**

תשובה: הגרף של $g(x)$ **והגרף של** $\frac{1}{g(x)}$ **, נפגשים** 4 **פעמים.**

א. נתון כי הסדרה A הנדסית, שאיבריה הם $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ ומנתה היא q .

נתונה סדרה C (סימון, לצורכי נוחות), שאיבריה הם: $\frac{1}{a_1} , \frac{1}{a_2} , \frac{1}{a_3} , ...$.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{a_{n+1}} : \frac{1}{a_n}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{q}$$

מכאן שהמנה בין כל שני איברים עוקבים בסדרה היא קבועה, לא תלויה ב- n , ולכן הסדרה היא הנדסית.

תשובה: הסדרה $\frac{1}{a_1} , \frac{1}{a_2} , \frac{1}{a_3} , ...$ היא הנדסית, ומנתה $\frac{1}{q}$.

ב. (1) S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה A.

נמצא את $S^c_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... \frac{1}{a_n}$, סכום n האיברים הראשונים בסדרה החדשה.

$$S^c_n = \frac{\frac{1}{a_1}\left[(\frac{1}{q})^n - 1\right]}{\frac{1}{q} - 1}$$

$$S^c_n = \frac{\frac{1-q^n}{q^n}}{a_1(\frac{1-q}{q})}$$

$$S^c_n = \frac{q(q^n - 1)}{a_1 q^n (q-1)}$$

$$S^c_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{a_1 \cdot a_1 q^{n-1}(q-1)}$$

$$\boxed{S^c_n = \frac{S_n}{a_1 \cdot a_n}}$$

תשובה: הוכחנו שלכל n טבעי מתקיים- $\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... \frac{1}{a_n}$.

ב. נתון: $a_1=1$ **, ו-** $q=3$ **.**

נתון: $S_n=6561\cdot S_n^c$

נמצא את n**.**

$$\frac{S_n}{S_n^c}=6561$$

$$a_1\cdot a_n=6561 \quad \leftarrow S_n^c=\frac{S_n}{a_1\cdot a_n}$$

$$a_1\cdot a_1q^{n-1}=6561$$

$$1\cdot 1\cdot 3^{n-1}=6561$$

$$3^{n-1}=3^8$$

$$n-1=8$$

$$\boxed{n=9}$$

תשובה: $n=9$ **.**

ג. נתון כי הסדרה B **מתקבלת על ידי הפיכת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה** A **.**

מכאן שאיברי הסדרה הם: $a_1\,,-a_2\,,a_3\,,-a_4,...$ **.**

נוכיח כי הסדרה B **היא הנדסית.**

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=-\frac{a_{n+1}}{a_n}$ **, כי אחד מכל שני איברים עוקבים החליף סימן.**

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=-q$$

מכאן שהמנה בין כל שני איברים עוקבים בסדרה היא קבועה, לא תלויה ב- n **, ולכן הסדרה** B **היא הנדסית.**

בסעיף א, הוכחנו כי אם סדרה A **היא הנדסית, אז מתקיים:** $\frac{S_n}{a_1\cdot a_n}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}$ **.**

כיוון, שסדרה B **היא גם הנדסית , אז מתקיים:** $\frac{T_m}{b_1\cdot b_m}=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+...+\frac{1}{b_m}$ **, לכל** m **טבעי.**

נתון כי m **הוא מספר טבעי אי-זוגי, ולכן הוחלפו סימנים של** $\frac{m-1}{2}$ **איברים, שבמקומות הזוגיים.**

מכאן ש- :

$$\frac{T_m}{b_1\cdot b_m}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{-a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{-a_4}+...\frac{1}{a_m}$$

$$\frac{T_m}{b_1\cdot b_m}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+...\frac{1}{a_m}$$

תשובה: הנוסחה $\frac{T_m}{b_1\cdot b_m}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-...+\frac{1}{a_m}$ **נכונה.**

א. נסמן ב- n את מספר השאלות השונות במאגר.

(1) נתנאל יודע לענות נכון על 20 שאלות מתוכן.

הסיכוי של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות

מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים שבחר, ללא חזרה, הוא $\frac{34}{69}$,

לכן ההסתברות של המאורע המשלים (שנתנאל טעה בשתי השאלות) היא $1-\frac{34}{69}=\frac{35}{69}$.

טעה טעה

$$\frac{n-20}{n}\cdot\frac{n-21}{n-1}=\frac{35}{69}$$

$$\frac{n^2-20n-21n+420}{n^2-n}=\frac{35}{69}$$

$$69(n^2-41n+420)=35(n^2-n)$$

$$69n^2-2829n+28980=35n^2-35n$$

$$34n^2-2794n+28980=0$$

$$\boxed{n=70}\qquad \cancel{n=12.18}\ \leftarrow n\ is\ natural$$

תשובה: $n=70$.

(2) נחשב את ההסתברות שנתנאל יענה לפחות על שתי שאלות מתוך השלוש (ט-טעה, צ-צדק).

צ צ ט צ ט צ ט צ צ צ צ צ

$$P(at\ least\ two\ good\ answers)=\frac{20}{70}\cdot\frac{19}{69}\cdot\frac{50}{68}+\frac{20}{70}\cdot\frac{50}{69}\cdot\frac{19}{68}+\frac{50}{70}\cdot\frac{20}{69}\cdot\frac{19}{68}+\frac{20}{70}\cdot\frac{19}{69}\cdot\frac{18}{68}$$

$$P(at\ least\ two\ good\ answers)=3\cdot\frac{20}{70}\cdot\frac{19}{69}\cdot\frac{50}{68}+\frac{20}{70}\cdot\frac{19}{69}\cdot\frac{18}{68}$$

$$P(at\ least\ two\ good\ answers)=\frac{76}{391}$$

תשובה: ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה היא $\frac{76}{391}$.

ב. נחשב את ההסתברות (המותנית) שנתנאל לא ענה נכון על השאלה הראשונה, אם ידוע כי התקבל למכללה.

$$P(not\ the\ 1st\ /\ collage)=\frac{P(not\ the\ 1st\cap collage)}{P(\ jcollage)}$$

$$P(2nd\ /\ just\ one)==\frac{\frac{50}{70}\cdot\frac{20}{69}\cdot\frac{19}{68}}{\frac{76}{391}}=\frac{\frac{475}{8211}}{\frac{76}{391}}=\frac{25}{84}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{25}{84}$.

ג. רמי יודע לענות נכון על 40 שאלות , מתוך 70 השאלות שבמאגר.

ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים היא: $\frac{40}{70}\cdot\frac{39}{69}\cdot\frac{38}{68}=\frac{494}{2737}$ **.**

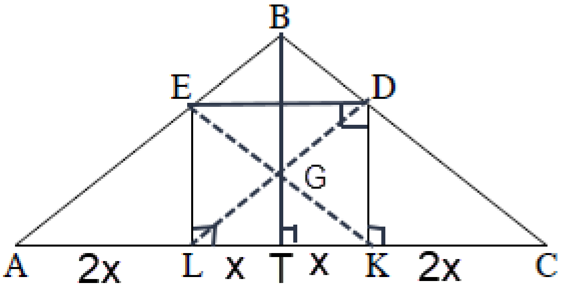
ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים היא: $\frac{20}{70}\cdot\frac{19}{69}\cdot\frac{18}{68}=\frac{57}{2737}$ **.**

היחס בין ההסתברויות הוא: $\frac{494}{57}\neq 2$ **.**

אפשר גם להסביר שבפתק הראשון ההסתברות שרמי יענה נכון גדולה פי 2 מזו של נתנאל, ובכל פתק נוסף ההסתברות אף גדולה יותר מ- 2, לכן יחס ההסתברויות גדול מ- 8 .

תשובה: ההסתברות, שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים, אינה גדולה פי 2, מההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים .

נתונים



1. ΔABC **שווה שוקיים** ($BA = BC$). **2.** $DK \perp AC$.

3. $EL \perp AC$ **4.** $AL = KL = KC$.

עבור ג. 5. $AC = 45$ **6 .** $P_{EDKL} = 54$.

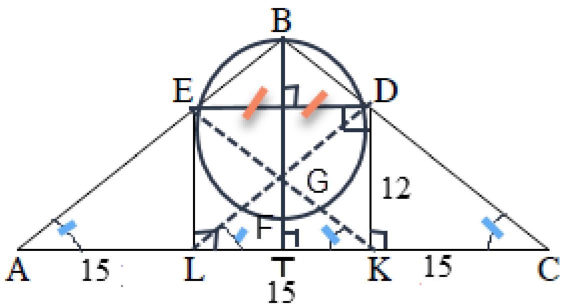
צ"ל: א. $\frac{BD}{DC}$ **ב.** $BDGE$ **דלתון ג.** BG .

ד. האם קיימת נקודה F **על הישר** BG,

כך ש- $BDFE$ **בר-חסימה במעגל.**

הסבר	מס'	טענה	נימוק
4	7	$AL = KL = KC = 2x$	סימון
	8	$BT \perp AC$	בניית עזר
1, 7, 8	9	$AT = TC = 3x$	הגובה לבסיס במש"ש ΔABC מתלכד עם התיכון לבסיס
7, 9	10	$LT = TK = x$	הפרש קטעים
2, 3, 8	11	$BT \parallel DK =\parallel EL$	שני ישרים המאונכים לישר שלישי מקבילים זה לזה
7, 10, 11	12	$\frac{BD}{DC} = \frac{TK}{KC}, \frac{BE}{EA} = \frac{LT}{AT}$	משפט תאלס
7, 10, 12	13	$\boxed{\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}}, \frac{BE}{EA} = \frac{1}{2}$	חישוב
		מ.ש.ל. א	
13	14	$\frac{BD}{BC} = \frac{BE}{BA} = \frac{1}{3}$	יחסי פרופורציה
1, 14	15	$BD = BE$	
14	16	$ED \parallel AC$	משפט תאלס הפוך הרחבה א
2, 16	17	$DK \perp ED$	אם אחד משני ישרים מקבילים מאונך לישר שלישי, אז גם הישר השני מאונך לישר השלישי
2, 3, 17	18	$EDKL$ מלבן	מרובע עם שלוש זוויות ישרות הוא מלבן
18	19	$DG = EG$	אלכסוני המלבן שווים זה לזה וחוצים זה את זה
15, 19	20	$BDGE$ דלתון	שני זוגות שונים של צלעות סמוכות שוות
		מ.ש.ל. ב	

הערה לציור: רק בסעיף הבא נסביר מדוע הנקודה G נמצאת על הגובה **BT**.
עד כה לא היה שימוש במסקנה זו.



הסבר	מס'	טענה	נימוק
20	21	$\sphericalangle DBG = \sphericalangle EBG$	האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש
1, 8, 21	22	הנקודה G נמצאת על הגובה BT	הגובה לבסיס במש"ש מתלכד עם חוצה זווית הראש
2, 3, 7	23	$\Delta CDL , \Delta AEK$ שווה שוקיים	אם התיכון מתלכד עם הגובה אז מש"ש
23	24	$\sphericalangle C = \sphericalangle DLC, \sphericalangle A = \sphericalangle EKA$	זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים
1	25	$\sphericalangle C = \sphericalangle A$	זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים
24, 25	26	$\sphericalangle C = \sphericalangle EKA$	כלל המעבר
26	27	$BC \parallel EK$	אם זוויות מתאימות שוות אז הישרים מקבילים
11, 27	28	BDKG מקבילית	שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות
4, 5	29	$KL = 15$	
6, 29	30	$DK = 12$	הקף מרובע שווה לסכום אורכי הצלעות
28, 30	31	$BG = 12$	צלעות נגדיות שוות במקבילית
מ.ש.ל. ג			
	32	יש מעגל יחיד שחוסם את ΔEBD	דרך שלוש נקודות, שאינן על אותו ישר, עובר מעגל אחד בלבד
20	33	BG אנך אמצעי למיתר ED	האלכסון הראשי בדלתון חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו
33	34	הישר BG עובר במרכז המעגל	אנך אמצעי למיתר עובר במרכז המעגל
34	35	קיימת נקודה F על הישר BG, כש- BDFE בר-חסימה במעגל	למעשה F הוא הקצה השני של הקוטר שיוצא מ- B
מ.ש.ל. ד			

הוכחה: $\sphericalangle BDF = \sphericalangle BEF = 90°$, כי זוויות היקפיות שנשענות על הקוטר הינן ישרות.

א. ΔABC **שווה שוקיים,** $AB = AC$ **(נתון) .**

$\underline{\Delta ABD}$ **לפי משפט הסינוסים** $\underline{\Delta ACD}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{AB}{\sin \measuredangle D} = 2R_{\Delta ABD} \qquad \frac{AC}{\sin \measuredangle D} = 2R_{\Delta ACD}$$

$$\boxed{R_{\Delta ABD} = \frac{AB}{2\sin \measuredangle D}} \qquad \boxed{R_{\Delta ACD} = \frac{AC}{2\sin \measuredangle D}}$$

מכיוון ש- $AB = AC$ **, הרי ששני הרדיוסים שווים.**

תשובה: הוכחנו כי רדיוס המעגל החוסם את ΔABD

שווה לרדיוס המעגל החוסם את ΔACD **.**

ב. $\measuredangle CAD = \alpha$ **(נתון)**

$\measuredangle BAC = 2\alpha$ **(נתון)**

$\measuredangle B = \measuredangle ACB = 90° - \alpha$ **(סכום זוויות ב-** ΔABC **שווה ל-** $180°$**, וזוויות בסיס שוות במש"ש)**

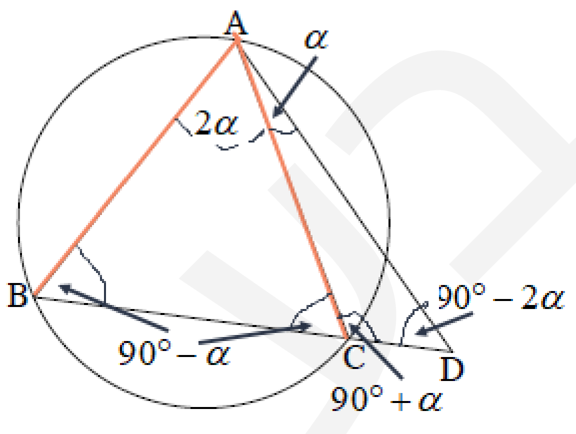
$\measuredangle ACD = 90° + \alpha$ **(זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$**)**

$\measuredangle D = 90° - 2\alpha$ **(סכום זוויות ב-**ΔACD **שווה ל-** $180°$**)**

$\underline{\Delta ABC}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{AC}{\sin(90 - \alpha)} = 2R$$

$$\boxed{AC = 2R\cos\alpha}$$



$$S_{\Delta ACD} = \frac{(AC)^2 \sin\alpha \cdot \sin(90° + \alpha)}{2\sin(90° - 2\alpha)}$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{4R^2\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2\cos 2\alpha}$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{R^2\cos^2\alpha \cdot \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\boxed{S_{\Delta ACD} = R^2 \tan 2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$$

תשובה: שטח משולש ΔACD **הוא** $R^2 \tan 2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ **.**

ג. $\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}} = m$.

נביע את היחס בין שטחי המשולשים כהכנה לתשובות לסעיפים (1) ו- (2).

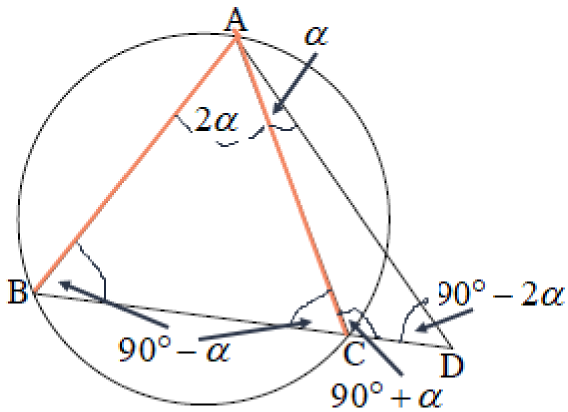
$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin 2\alpha}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} == \frac{4R^2 \cos^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{R^2 \tan 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha}{2R^2 \sin 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2\cos 2\alpha}}$$



(1) נבדוק האם ייתכן כי $m = 0.5$.

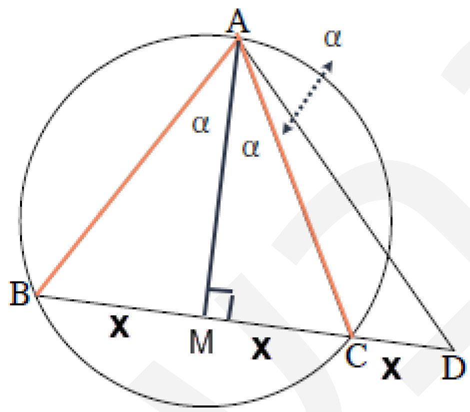
$$\frac{1}{2\cos 2\alpha} = 0.5$$

$$\cos 2\alpha = 1$$

$$2\alpha = 360°k$$

לא ייתכן ש- $\sphericalangle BAC = 360°k$.

תשובה: לא ייתכן כי $m = 0.5$.



(2) נתון כי $m = 0.6$.

$$\frac{1}{2\cos 2\alpha} = 0.6$$

$$\cos 2\alpha = \frac{5}{6}$$

$$2\alpha = \pm 33.56° + 360°k$$

$$2\alpha = 33.56°$$

$$\boxed{\sphericalangle BAC = 33.56°}$$

$$\boxed{\sphericalangle B = \sphericalangle ACB = 73.22°}$$

תשובה: $\sphericalangle BAC = 33.56°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle ACB = 73.22°$.

הוכחה בדרך אחרת (באדיבות נאביל חואלד)

נניח כי $m = 0.5$.

נוריד חוצה זווית $\sphericalangle BAC$ **, ולכן הוא גם גובה ותיכון.**

כיוון ש- $CD = 0.5BC$ **(עקב יחסי השטחים),**

אז $BM = MC = CD$

מכאן שגם MAD **הוא שווה שוקיים ו-** $AC \perp BD$.

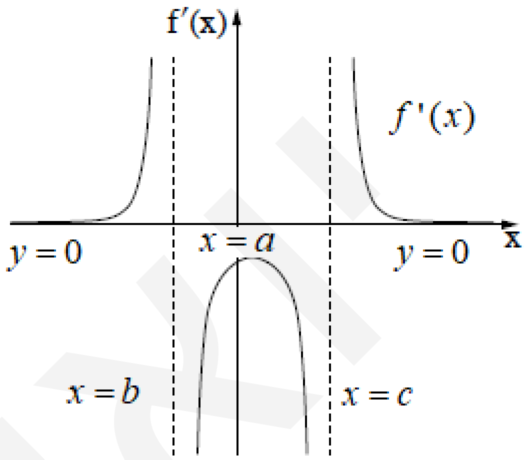
סתירה !!! כי מ- A **יכול לצאת רק אנך אחד ל-** BC .

לכן לא ייתכן כי $m = 0.5$.

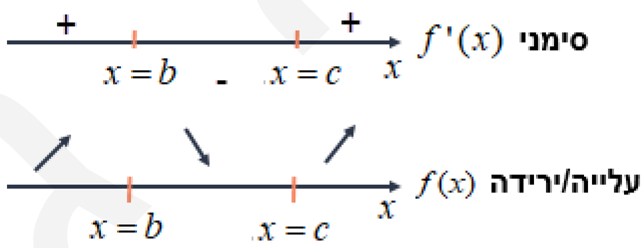
א. נתונה פונקציה: $f(x)$, המוגדרת בתחום $x>c$, $b<x<c$, $x<b$.

האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הן $y=0$, $x=b$, $x=c$.

שיעור ה- $x=a$ הוא שיעור ה- x בנקודת הקיצון היחידה של $f'(x)$.

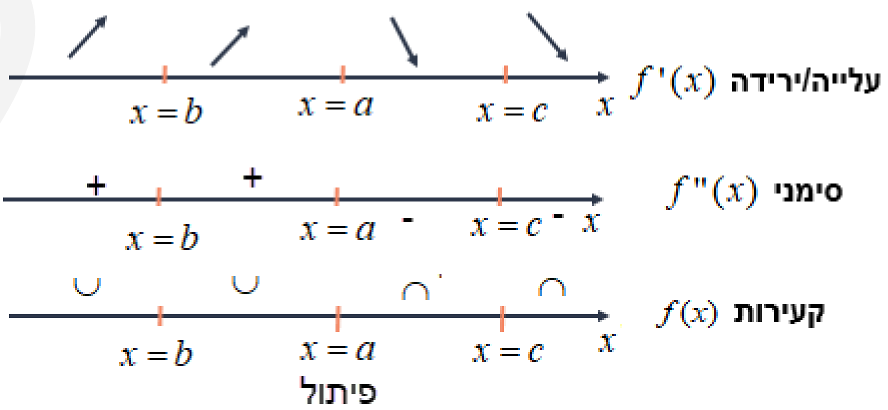


(1) נמצא את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$, בהתאם לסימני $f'(x)$.



תשובה: עבור $f(x)$ - עלייה $x>c$ או $x<b$, ירידה - $b<x<c$.

(2) נמצא את תחומי הקעירות $f(x)$, בהתאם לתחומי עלייה וירידה של $f'(x)$ וסימני $f''(x)$.



תשובה: עבור $f(x)$ - קעירות כלפי מטה $(\cap)$: $x>c$ או $a<x<c$

קעירות כלפי מעלה $(\cup)$: $b<x<a$ או $x<b$.

ב. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(a,0)$.

$(a,0)$ **היא נקודת פיתול, הנמצאת על ציר ה-** x **.**

$f'(x)\to\pm\infty$ **עבור** $x=c$ ו- $x=b$,

ובהתאם, $x=b$ **ו-** $x=c$ **הן גם אסימפטוטות אנכיות של** $f(x)$ **.**

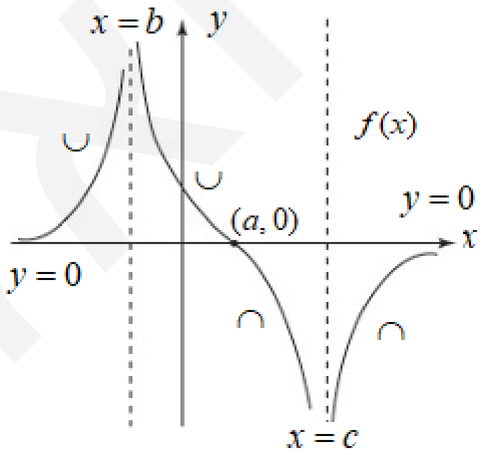
$f'(x)\to 0$ **עבור** $x\to\pm\infty$,

לכן ייתכן (לא בהכרח, אבל אפשרי) של- $f(x)$ **יש אסימפטוטה אופקית לשני הכיוונים:**

או יחידה $y=0$ **, או שתיים שונות.**

כיוון שאין עוד רמז בתרגיל, הסרטוט המובא מתאים גם לסעיף ג,

בו יש אסימפטוטה אופקית אחת והיא $y=0$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל.

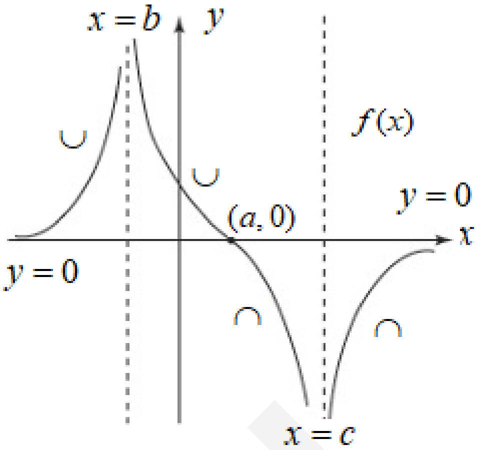
ג. נתון גם כי $f(x)=\dfrac{18-36x}{(x^2-x-6)^2}$ **.**

תחום ההגדרה הוא $\boxed{b=-2\,,c=3}\leftarrow$ $x\neq-2\,,3\leftarrow$ $x^2-x-6\neq0$ **.**

גרף הפונקציה $f(x)$ **עובר בנקודה** $(a,0)$**, ולכן** $\boxed{a=0.5}\leftarrow$ $x=0.5\leftarrow$ $18-36x=0$ **.**

תשובה: $a=0.5$, $b=-2$, $c=3$.

ד. (1) נראה כי בתחום $b<x<c$ מתקיים: $f'(x)\cdot(f(x))^2\le 0$.



בתחום $b<x<c$ מתקיים $f'(x)<0$, כי $f(x)$ בירידה.

בתחום $b<x<c$ מתקיים $(f(x))^2\ge 0$ כי $f(x)=0$ עבור $x=0.5$, ואחרת הביטוי הריבוע חיובי.

מכאן שהמכפלה היא אי-חיובית.

תשובה: הראינו כי בתחום $b<x<c$ מתקיים: $f'(x)\cdot(f(x))^2\le 0$.

(2) נחשב את השטח המבוקש, שנמצא מתחת לציר ה- x , או נוגע בו ב- $(0.5,0)$, על פי תת סעיף (1).

ניעזר בזיהוי הנגזרת הפנימית.

$$S=\int_0^1(0-f'(x)\cdot(f(x))^2)\,dx$$

$$S=\int_0^1(-(f(x))^2)\cdot f'(x))\,dx$$

$$S=\left.(-\frac{(f(x))^3}{3})\right]_0^1$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1:\quad -\frac{(f(1))^3}{3}=-\frac{(-0.5)^3}{3}=\frac{1}{24} \\ x=0:\quad -\frac{(f(0))^3}{3}=-\frac{(0.5)^3}{3}=-\frac{1}{24} \end{array}\right\} S=\frac{1}{24}-(-\frac{1}{24})=\frac{1}{12}$$

$$\boxed{S=\frac{1}{12}}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $\frac{1}{12}$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan(x)+\frac{1}{x}$ **, בתחום** $0\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

(1) בתחום ההגדרה המכנה שונה מאפס, ולכן $x\neq 0$.

כמו כן, פונקציית ה- $\tan$ **מוגדרת עבור** $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $0<x<\frac{3\pi}{2}\ ,\ x\neq\frac{\pi}{2}$.

(2) האסימפטוטות האנכיות הן: $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=0$.

ב. גרף הפונקציה $f(x)$ **חותך את ציר ה-** x **, בנקודה אחת בלבד** $(2.798, 0)$.

נמצא את תחומי החיוביות והשליליות, על ידי הצבת x**-ים בהתאם לתחום ההגדרה של הפונקציה.**

בתחום $2.798<x<\frac{3\pi}{2}$ **:** $f(3)=0.19>0$,

בתחום $\frac{\pi}{2}<x<2.798$ **:** $f(2)=-1.69<0$,

בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$ **:** $f(1)=2.56>0$.

תשובה: $f(x)$ **חיובית עבור** $2.798<x<\frac{3\pi}{2}$ **או** $0<x<\frac{\pi}{2}$**, שלילית עבור** $\frac{\pi}{2}<x<2.798$.

ג. נתונה גם הפונקציה $g(x)=\frac{\cos(x)}{x}$ **, המוגדרת בתחום** $x\neq 0$.

$$g(-x)=\frac{\cos(-x)}{-x}$$

$$g(-x)=-\frac{\cos(x)}{x}\qquad\leftarrow\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\boxed{g(-x)=-g(x)}$$

ולכן הפונקציה היא אי-זוגית, והגרף שלה סימטרי לראשית הצירים.

תשובה: הפונקציה $g(x)$ **היא אי-זוגית.**

ד.(1) נמצא את $g'(x)$ **, ואז נבדוק את סוג הקיצון של** $g(x)$ **עבור** $x = 2.798$ **.**

$$\boxed{g'(x) = \frac{-x\sin(x) - \cos x}{x^2}}$$

כיוון שלא ניתן, ללא מחשבון, למצוא מתי הנגזרת מתאפסת,

נחפש את הקשר בינה לבין $f(x)$ **.**

$$f(x) = \tan(x) + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{x}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{x\sin x + \cos x}{x\cos x}}$$

סימני המונים של $g'(x)$ **ושל** $f(x)$ **שונים,**

כאשר המכנים שווי סימן עבור $0 < x < \frac{\pi}{2}$**, כאשר** $\cos x > 0$,

ושוני סימן עבור $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$**, כאשר** $\cos x < 0$.

לכן, ניתן לקבוע את סימני $g'(x)$**, על פי סימני** $f(x)$ **שמצאנו בסעיף ב וההתאמות שהסברנו עכשיו.**

נזכיר: $f(x)$ **חיובית עבור** $2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$ **, שלילית עבור** $\frac{\pi}{2} < x < 2.798$ **וחיובית עבור** $0 < x < \frac{\pi}{2}$**.**

ולכן: $g'(x)$ **חיובית עבור** $2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$ **, שלילית עבור** $0 < x \le \frac{\pi}{2}$**, ושלילית גם עבור** $\frac{\pi}{2} \le x < 2.798$**.**

מכאן ש- $g(x)$ **עוברת מירידה לעלייה עבור** $x = 2.798$ **וזה מינימום.**

תשובה: הראינו כי בתחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$**, שיעור ה-** x **של נקודת החיתוך של** $f(x)$ **עם ציר ה-** x **,**

שהוא $x = 2.798$ **, הוא גם מינימום של** $g(x)$ **.**

(2) נשים לב ש- $g(x)=\frac{\cos(x)}{x}$ **רציפה** $x>0$ **, ולכן עולה עבור** $2.798<x<\frac{3\pi}{2}$ **ויורדת עבור** $0<x<2.798$ **.**

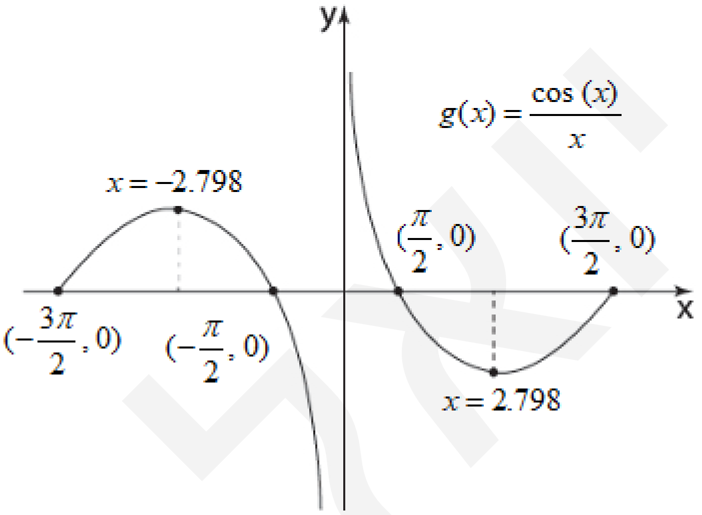
$x=0$ **הוא אסימפטוטה אנכית.**

ראינו כי הפונקציה $g(x)$ **היא אי-זוגית, ובהתאם הגרף שלה סימטרי לראשית הצירים.**

$x=2.798$ **מינימום, ובהתאם** $x=-2.798$ **מקסימום.**

נקודות קצה הינן $(\frac{3\pi}{2},0)$ **ו-** $(-\frac{3\pi}{2},0)$.

שתי נקודות חיתוך נוספות עם ציר ה- x **הינן** $(\frac{\pi}{2},0)$ **ו-** $(-\frac{\pi}{2},0)$ **.**



תשובה: הסקיצה מעל.

א. נסמן ב- x את אורך צלע המשולש (מובן ש- $x>0$), ובהתאם היקף המשולש הוא $3x$.

מכאן שאורך החוט שנותר להיקף המעגל הוא $k-3x$, שגם הוא צריך להיות חיובי.

$$k-3x>0$$
$$-3x>-k \quad /:(-3<0)$$
$$x<\frac{k}{3}$$

תשובה: תחום ההגדרה של x הוא $0<x<\frac{k}{3}$.

ב. הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *סכום השטחים של שתי הצורות*.

היקף המעגל, שרדיוסו r, הוא $k-3x$ ובהתאם $k-3x=2\pi r \quad \to r=\frac{k-3x}{2\pi}$.

מכאן שסכום שטחי שתי הצורות הוא :

$$S(x)=\frac{x^2\sin 60^\circ}{2}+\pi(\frac{k-3x}{2\pi})^2$$
$$S(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi(k-3x)^2}{4\pi^2}$$
$$\boxed{S(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{(k-3x)^2}{4\pi}}$$

נמצא את נקודת המינימום.

$$S(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{(k-3x)^2}{4\pi}$$
$$S'(x)=\frac{2x\sqrt{3}}{4}+\frac{2(k-3x)(-3)}{4\pi}$$
$$S'(x)=\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{3(k-3x)}{2\pi}$$
$$S'(x)=\frac{x\sqrt{3}\cdot\pi-3k+9x}{2\pi}$$
$$\boxed{S'(x)=\frac{x(\sqrt{3}\cdot\pi+9)-3k}{2\pi}}$$
$$x(\sqrt{3}\cdot\pi+9)-3k=0$$
$$\boxed{x=\frac{3k}{\sqrt{3}\cdot\pi+9}\approx 0.208k}$$
$$\boxed{s''(x)=\frac{\sqrt{3}\cdot\pi+9}{2\pi}}$$
$$s''(x)>0 \quad \to Min$$

תשובה: אורך צלע המשולש היא $x=\frac{3k}{\sqrt{3}\cdot\pi+9}\approx 0.208k$,

עבורה סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. נראה, כי עבור $x=\frac{3k}{\sqrt{3}\cdot\pi+9}\approx 0.208k$ **, לא ניתן לחסום את המשולש שהתקבל במעגל שהתקבל.**

על-פי סעיף א: $r=\frac{k-3x}{2\pi}$ **, מכאן ש-** $r=\frac{k-3\cdot 0.208k}{2\pi}=\frac{k\cdot(1-0.624)}{2\pi}\approx 0.06k$ **.**

על פי משפט הסינוסים, במשולש שהתקבל: $2r=\frac{x}{\sin 60°} \quad \rightarrow r=\frac{0.208k}{2\sin 60°}\approx 0.12k$ **.**

מכאן שרדיוס המעגל שהתקבל, אינו רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

תשובה: הראינו כי, כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי,

אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל במעגל שהתקבל.