

פתרון הבחינה במתמטיקה

חורף נבצרים תשפ"ב, 2022, שאלון: 35482
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"





1. נתונה הסדרה: $a_n = 2n + 1$.

א. (1) הוכח כי a_n היא סדרה חשבונית.

(2) מצא את a_1 ואת הפרש הסדרה.

נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n הוא 1,443.

ב. מצא את n .

מן הסדרה הנתונה בנו סדרה חשבונית חדשה, b_n .

נתון: $b_n = 1 + 3 \cdot a_n$, לכל n טבעי.

ג. מצא את הפרש הסדרה החדשה.

בסדרה החדשה יש n איברים – n הוא המספר שמצאת בסעיף ב.

ד. מצא את סכום האיברים הנמצאים במקומות האיזוגיים בסדרה החדשה.

נניח

$$a_{n+1} - a_n = \text{פרש} \quad \text{לכן } a_{n+1} - a_n = 2$$

$$a_n = 2n + 1 \quad \text{נניח}$$

$\Downarrow$

$$a_{n+1} = 2(n+1) + 1$$

$$a_{n+1} = 2n + 3$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 3 - (2n + 1) =$$

$$= 2n + 3 - 2n - 1 = 2$$

$$a_{n+1} - a_n = 2$$

לכן:

$\Downarrow$

$$a_n \text{ סדרה חשבונית (גנוס, } 2 = \text{פרש)}$$



$$a_n = 2n + 1 \quad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$a_1 = 3$$

נסתכל בזה מנקודת מבט אחרת, $d=2$.

$$S_n = 1443 \quad \text{נניח:}$$

$$n = ?$$

נניח כי n הוא מספר טבעי.

$$S_n = \frac{n [2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

$$1443 = \frac{n [2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 2]}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2886 = n(6 + 2n - 2)$$

$$2886 = 6n + 2n^2 - 2n$$

$$0 = 2n^2 + 4n - 2886$$

$$n_1 = 37$$

$$n_2 = -39 \quad \text{נשלם, } n \text{ טבעי}$$



12 נתון: $b_n = 1 + 3 \cdot a_n$ (הב סדרה חשבונית)

נמצא a_1 , b_1 / a_2 , b_2 ונמצא את ההפרש $b_2 - b_1$.

יאללה נ'י. ננסה a_n נמצא a_1 , a_2 .

$$a_n = 2n + 1$$

!!

$$a_2 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$a_2 = 5$$

$$b_n = 1 + 3a_n$$

!!

$$b_1 = 1 + 3a_1 = 1 + 3 \cdot 3 = 10$$

$$b_2 = 1 + 3a_2 = 1 + 3 \cdot 5 = 16$$

$$\text{הפרש } b_n = b_2 - b_1 = 16 - 10 = 6$$

תשובה: הפרש הסדרה החשבונית הוא 6.



(ג) מספר האיברים בסדרה הוא n , כלומר 37. $(b_1, b_2, \dots, b_{37})$

$\Downarrow$

$$\text{מספר האיברים} = \frac{37+1}{2} = 19$$

לפיכך, בסדרה האיברים העומים בתנאייה היא 19 איברים:

$$b_1, b_2, \dots, b_{19}$$

בסדרה: 15

$$b_1 = b_{19} = 10$$

ראשון

$$b_{15} = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\text{מספר האיברים} = 19$$

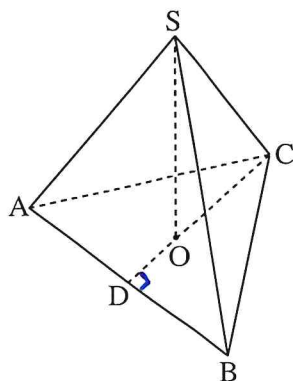
$$S_n = \frac{n [2b_1 + (n-1)d]}{2}$$

$\Downarrow$

$$S_{19} = \frac{19 [2 \cdot 10 + (19-1) \cdot 12]}{2} = 2242$$

תשובה: 2242





2. נתונה פירמידה משולשת ישרה $SABC$, שבסיסה ABC , הוא משולש שווה צלעות.

גובה הפירמידה הוא SO .

CD הוא הגובה לצלע AB במשולש ABC (ראה סרטוט).

נתון כי היקף המשולש ABC הוא $6a$.

א. הבע באמצעות a את אורך הגובה CD .

נתון: $CO = 4\sqrt{3}$.

ב. מצא את a .

ענה על סעיף ג בעבור $a = 6$.

נתון: גודל הזווית בין מקצוע צדדי של הפירמידה ובין הבסיס הוא 50° .

ג. (1) מצא את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.

(2) חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

פתרון

א. נתון: משולש ABC שזו צלעו שגובהו $6a$.

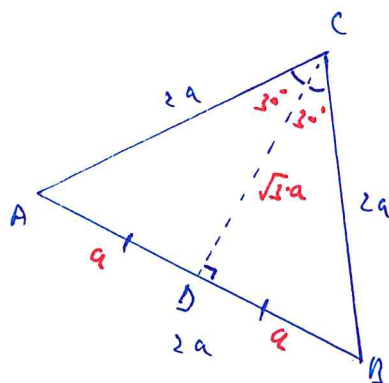
י"א

$$AB = BC = AC = \frac{6a}{3} = 2a$$

$$\angle CAB = \angle CBA = \angle ACB = 60^\circ$$

(זמשל שזו צלע, והצלע שזו 15 ו 15 ,
 וזו צלע שזו 60°)





דמיון שיש בלבד, קודם לנצל היא זה חזקון לנצל והוכח צוויי.
 ולי, ולי

$$AD = DB = \frac{2a}{2} = a$$

$$\angle ACD = \angle BCD = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

פסגה ישר-צוויי

לפי משפט פיתגורס:

$$(CD)^2 + (DB)^2 = (CB)^2$$

||

$$(CD)^2 + a^2 = (2a)^2$$

$$(CD)^2 + a^2 = 4a^2$$

$$(CD)^2 = 3a^2$$

$$CD = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{3} \cdot a$$

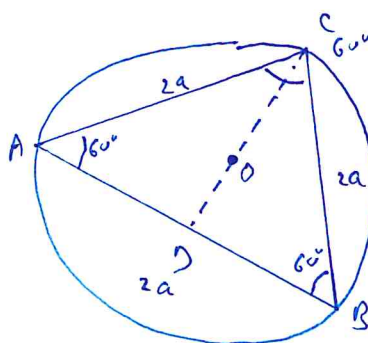
$$CD = \sqrt{3} \cdot a$$



$$r = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{!} \quad \text{!}$$

$$a = ?$$

ס. היתן וזיט הקצק החיטק ΔABC .



$$\frac{a}{\sin 60} = 2R \quad \text{!} \quad \text{!} \quad \text{!}$$

ΔABC :

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R$$

!!

$$\frac{2a}{\sin 60} = 2R \quad / : 2$$



$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = r$$

$$\parallel$$

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = r$$

$$r = 4\sqrt{3}$$

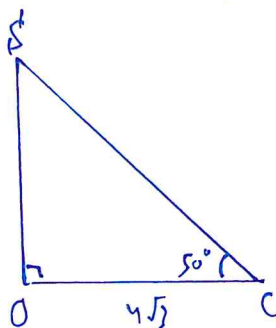
ואין, נגד אנג:

$$\frac{\sin 60^\circ}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\frac{a}{\sin 60^\circ}} \quad / \cdot \sin 60^\circ$$

$$6 = a$$



(2) הינן: $a=6$
 שווה בין היתר (נני אולי 5°).



(1)

$$\cos 50^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{sC}$$

$$\Downarrow$$

$$sC = \frac{4\sqrt{3}}{\cos 50^\circ}$$

$$sC = 10.78$$

השקב: הינן (הנני של) (הנני-ל) 10.78



נמצא את ΔABC דעונה ויזסטא אלא האל
 אי סא גאא אדאור שניגין.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

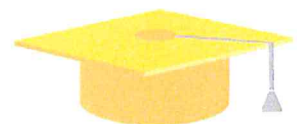
!!

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sin 67.62^\circ = 53.71$$

$$A_{\text{ויזסטא}} = 3 \cdot S_{\Delta ABC} = 3 \cdot 53.71 = 161.2$$

תשובה:

$$A_{\text{ויזסטא}} = 161.2$$



3. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos(2x) + 2 \cdot \cos(x) + 3$, המוגדרת בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
 ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודות המינימום שלה.
 (בתחום שבין נקודות המינימום שלה).

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + c$. c הוא פרמטר.

נתון כי הישר $y = -2$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודות המינימום שלה.

- ד. (1) מצא את c .
 (2) בעבור הערך של c שמצאת בתת-סעיף ד(1), כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x ? נמק.

③ ④ נמצא את הפונקציה:

$$f'(x) = -2\sin(2x) - 2\sin(x)$$

פונקציה שצריך היא בתוך הקיצון נשווה נגזרת לאפס:

$$f'(x) = 0$$

$$-2\sin(2x) - 2\sin(x) = 0 \quad / : (-2)$$

$$\sin(2x) + \sin(x) = 0 \quad / \text{זהו זהו נוסחה}$$

$$2\sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x \cdot (2\cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = 180^\circ$$

$$2\cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 120^\circ + 360^\circ$$

$$x = -120^\circ + 360^\circ$$

בתחום הנתון הפתרונות הם:

$$x = 0^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 360^\circ$$



המשק פתרון שולמה 3
 נמיר את הפתירות שקיבלנו ערכים, ונציב בפונקציה פנימית
 גידור ה 4 :

$$x_1 = 0 \rightarrow f(0) = \cos(0) + 2\cos(0) + 3 = 6 \quad (0, 6)$$

$$x_2 = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi \rightarrow f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \cos(2 \cdot 120^\circ) + 2\cos(120^\circ) + 3 = 1.5 \quad \left(\frac{2}{3}\pi, 1.5\right)$$

$$x_3 = 180^\circ = \pi \rightarrow f(\pi) = \cos(2 \cdot 180^\circ) + 2\cos(180^\circ) + 3 = 2 \quad (\pi, 2)$$

$$x_4 = 240^\circ = \frac{4}{3}\pi \rightarrow f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \cos(2 \cdot 240^\circ) + 2\cos(240^\circ) + 3 = \frac{3}{2} \quad \left(\frac{4}{3}\pi, 1.5\right)$$

$$x_5 = 360^\circ = 2\pi \rightarrow f(2\pi) = \cos(2 \cdot 360^\circ) + 2\cos(360^\circ) + 3 = 6 \quad (2\pi, 6)$$

נקבע את סוג הקיצון בעזרת טבלה:

x	0	60°	$120^\circ = \frac{2}{3}\pi$	150°	$180^\circ = \pi$	210°	$240^\circ = \frac{4}{3}\pi$	270°	$360^\circ = 2\pi$
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max

נקודות הקיצון הן:

נקודות מקסימום פנימית $\left(\frac{2}{3}\pi, 1.5\right)$

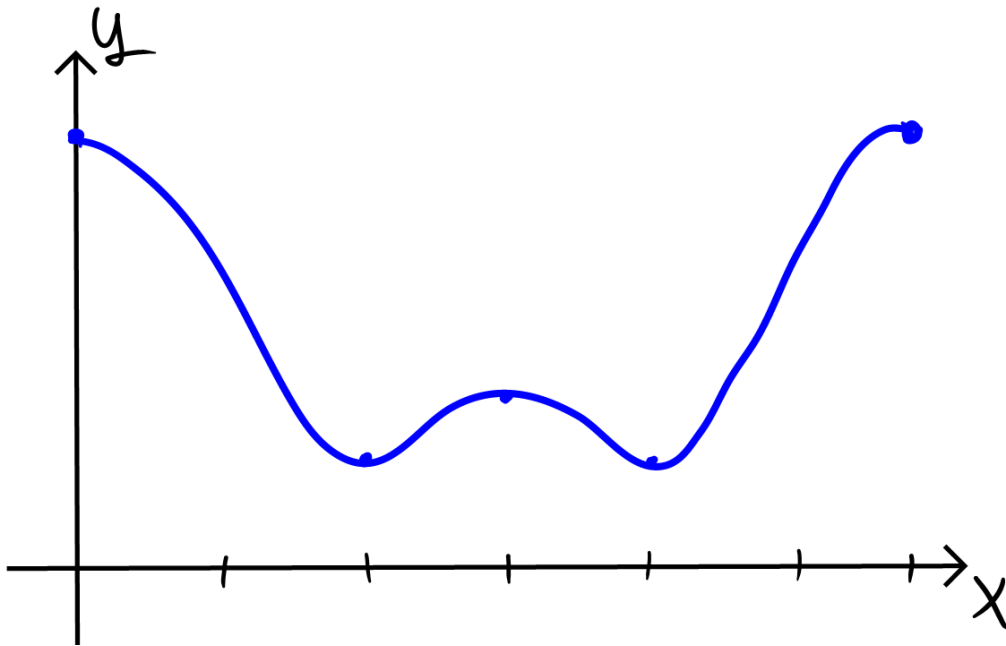
נקודות מקסימום פנימית $(\pi, 2)$

נקודות מקסימום פנימית $\left(\frac{4}{3}\pi, 1.5\right)$

נקודות מקסימום קצה $(2\pi, 6)$



ה



ד) נבטא את משוואת הישר המשיק ענף המניח

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = 0$$

$$: \text{אשר שיפועו אפס}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \quad y_1 = 1.5$$

$$\boxed{y = 1.5}$$

נחשב את הטח באמצעות אינטגרל:

$$S = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} (\cos(2x) + 2\cos(x) + 3 - 1.5) dx = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} (\cos(2x) + 2\cos(x) + 1.5) dx =$$

$$= \left[\frac{\sin(2x)}{2} + 2\sin x + 1.5x \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} =$$

$$\left(\frac{1}{2} \sin(2 \cdot 240^\circ) + 2 \sin(240^\circ) + 1.5 \cdot \frac{4}{3}\pi \right) - \left(\frac{1}{2} \sin(2 \cdot 120^\circ) + 2 \sin(120^\circ) + 1.5 \cdot \frac{2}{3}\pi \right) = 4.984 - 4.44 = 0.544 \text{ יחידות}$$



המשקל פתרון גורסה 3

המשקל פתרון גורסה 3
 $g(x) = f(x) + c$ (1) (3)

המשקל פתרון גורסה 3
 $g(x) = f(x) + c$

ה'שר $y = 1.5$. המשקל פתרון גורסה 3
 $g(x)$ הוא ה'שר $y = -2$.
 נחשב את ההצבה מה שהתקבלה מהוספת הקבוע c :

$$c = -2 - 1.5 = -3.5$$

כדומר ערכו של c הוא $c = -3.5$

$$g(x) = \cos(2x) + 2\cos(x) + 3 - 3.5 = \cos(2x) + 2\cos(x) - 0.5$$

(2) עבור הצבה מה של הפונק $f(x)$ בשיעור 3.5 נקבע
 מצב בו שני נק' הקיצון בקצה תחום ההצבה נמצאות אחד
 ציר ה x
 $(0, 6) \rightarrow (0, 2.5)$
 $(2\pi, 6) \rightarrow (2\pi, 2.5)$

ואילו שני נק' הקיצון הפנימיים נמצאות מחת ע'ציר
 ה x

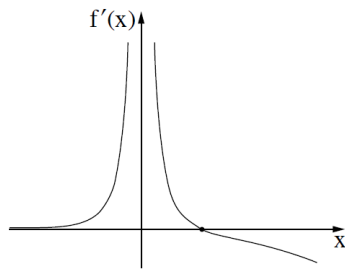
$$\left(\frac{2}{3}\pi, 1.5\right) \rightarrow \left(\frac{2}{3}\pi, -2\right)$$

$$(\pi, 2) \rightarrow (\pi, -1.5)$$

$$\left(\frac{4}{3}\pi, 1.5\right) \rightarrow \left(\frac{4}{3}\pi, -2\right)$$

ועכ' יהיו פונקציה $g(x)$ בצ'וק שתי נקודות חיתוך עם צ'יר x .





4. הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות בתחום $x \neq 0$.

בסרטוט שלפניך מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה $(a, 0)$ בלבד.

א. הבע באמצעות a את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון: הפונקציה שמתוארת בתחילת השאלה היא $f(x) = \frac{e^{2x}}{1-e^x}$.

ב. (1) מצא את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x ? נמק.

ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ורשום את הערך של a .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x = \ln 3$ ועל ידי ציר ה- x .

4) א) הפונקציה $f(x)$ עולה בתחומים בהם הנגזרת $f'(x)$ חיובית.

הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום בו הנגזרת $f'(x)$ שלילית.

עפי' הסרטוט זהנתונים:

תחום ירידה: $x < a$

תחום עלייה: $0 < x < a$ או $x < 0$

ב) (1) אסימפטוטה אנכית פזיר x נקבע בשיעור ה- x אשר מאפסים את המכנה:

$$1 - e^x = 0$$

$$1 = e^x$$

$$e^0 = e^x$$

אסימפטוטה אנכית: $x = 0$

(2) זיהא $f(x)$ עא חותק את ציר ה- x , כיוון עלא קיים x אשר

מאפס את הביטוי שבמונה e^{2x} . ע הט מספר חיובי ולכן כל חלקה מה נעלה אותו תתן תוצאה חיובית.



המשק גמולה 4

(d) נגזור את $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(1-e^x) - (-e^x) \cdot e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \frac{2e^{2x} - 2e^{3x} + e^{3x}}{(1-e^x)^2} = \frac{2e^{2x} - e^{3x}}{(1-e^x)^2} = \frac{e^{2x}(2-e^x)}{(1-e^x)^2}$$

פאציאת שיצורי ה x בנק' הקיצון נשווה את הנלית עאבס:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{e^{2x}(2-e^x)}{(1-e^x)^2} = 0 \quad / \cdot (1-e^x)^2$$

$$e^{2x} \cdot (2-e^x) = 0$$

$$\downarrow$$

$$e^{2x} = 0$$

אין פתרון

$$2 - e^x = 0$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln(2)$$

$$x = 0.693$$

נשתמש בהערכה
הפונקציה P:

נציב $x = \ln(2)$ בסונקציה פקטלת שיצור ה y בנק' הקיצון:

$$f(\ln(2)) = \frac{e^{2 \cdot \ln(2)}}{1 - e^{\ln(2)}} = \frac{4}{-1} = -4$$

כעומר נק' הקיצון היא $(\ln(2), -4)$

ומכאן נובע כי צרכו ש $a = \ln(2)$ כיוון שבנקודה זו $f'(x)$ מתאפס.



המשך בתיון גאומטרי 4

③ סקיצה של $f(x)$

④ נחשב את השטח באמצעות אינטגרל:

$$S = \int_{h(2)}^{h(3)} (0 - f'(x)) dx = \int_{h(2)}^{h(3)} -f'(x) dx = \left[-f(x) \right]_{h(2)}^{h(3)} = -f(h(3)) - (-f(h(2)))$$

$$= \frac{9}{2} - 4 = 0.5$$

השטח המואכלס "ע"י גרף הנגזרת $f'(x)$, הישר $x=h(3)$ וסעיף 3

ציר ה- x הוא $x=0$ ונח 0.5



5. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(ax^2 - x)$, $a > 0$ הוא פרמטר.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום: $x > \frac{1}{a}$, $x < 0$.

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא 3.

א. מצא את a .

הצב $a = 2$ בפונקציה $f(x)$ וענה על הסעיפים ב-ד.

ב. (1) מצא את האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$, והיא מקיימת $g'(x) = f(x)$.

ד. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

$$\textcircled{5} \textcircled{19} \text{ נתון: } f'(1) = 3$$

נמצא את a הפונקציה:

$$f'(x) = \frac{2ax - 1}{ax^2 - x}$$

$$\text{נציב } x=1 \text{ ונשווה } f'(1) = 3$$

$$3 = \frac{2a \cdot 1 - 1}{a \cdot 1^2 - 1} \quad / \cdot (a-1)$$

$$3(a-1) = 2a-1$$

$$3a-3 = 2a-1 \quad / +3 \quad -2a$$

$$a = 2 \quad \text{סרטט } a$$

$$f(x) = \ln(2x^2 - x)$$

ב. (א) נקבע אסימפטוטות אנכיות בקצות תחום ההגדרה:

$$\text{נפתור תרגיל עזר: } 2x^2 - x = 0$$

$$x(2x-1) = 0$$

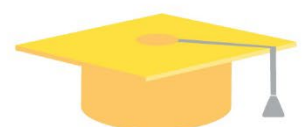
$$\swarrow \quad \searrow$$

$$x=0 \quad 2x-1=0$$

$$2x=1$$

$$x=0.5$$

כעומי, נקבע אסימפטוטות אנכיות ב'שריט': $x=0$ $x=0.5$



המשק פתרון שאלה 5

$$h(2x^2 - x) = 0$$

(2) נפתור את המשוואה $f(x) = 0$:

$$0 = 2x^2 - x$$

נשתמש בהצגת הפונקציה המשוואה:

$$1 = 2x^2 - x$$

$$0 = 2x^2 - x - 1$$

נוסחת שורשים:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = -\frac{1}{2}$

נקודות התצוק עם ציר ה- x הן: $(-\frac{1}{2}, 0)$ ו- $(1, 0)$

$$f'(x) = \frac{4x - 1}{2x^2 - x}$$

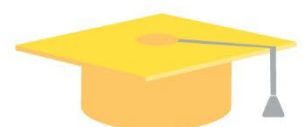
(3) נגזרת הפונקציה היא:

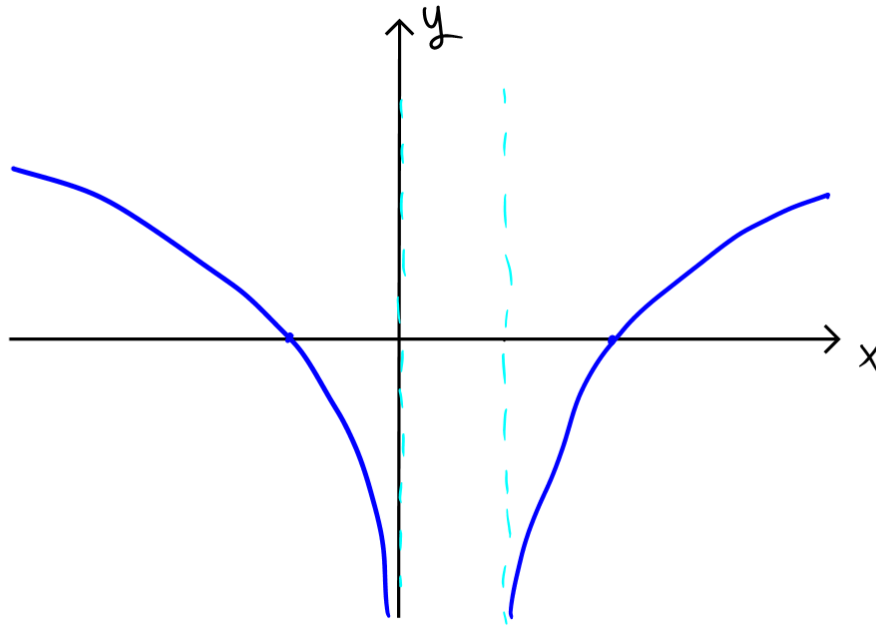
נגזרת זו מתאפסת עבור $x = \frac{1}{4}$ אך נקודה זו אינה נמצאת בתחום ההגדרה של $f(x)$, ועל כן נבדוק בעזרת טבלה מהו נחמת הפונקציה מחצי ציבי האסימפטוטות:

תחום ירידה: $x < 0$

תחום עלייה: $\frac{1}{2} < x$

x	-1	$0 < x < \frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗





ד)

③ נקודות הקיצון של $f(x)$ מתקבלות בנקודות בהן $f'(x) = 0$ כלומר בנק' החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x .
בנק' בה שיעור ה- x הוא $x = -\frac{1}{2}$ יש ל- $f(x)$ נק' מקסימום
כיוון שהמשמאל לנק' זו הנגזרת $f'(x)$ חיובית ולכן $f(x)$ עולה
ומימין לנק' זו הנגזרת $f'(x)$ שלילית ולכן $f(x)$ יורדת.

בנק' בה שיעור ה- x הוא $x = 1$ יש ל- $f(x)$ נק' מינימום
כיוון שהמשמאל לנק' זו הנגזרת $f'(x)$ שלילית ולכן $f(x)$ יורד
ומימין לנק' זו הנגזרת $f'(x)$ חיובית ולכן $f(x)$ עולה.

