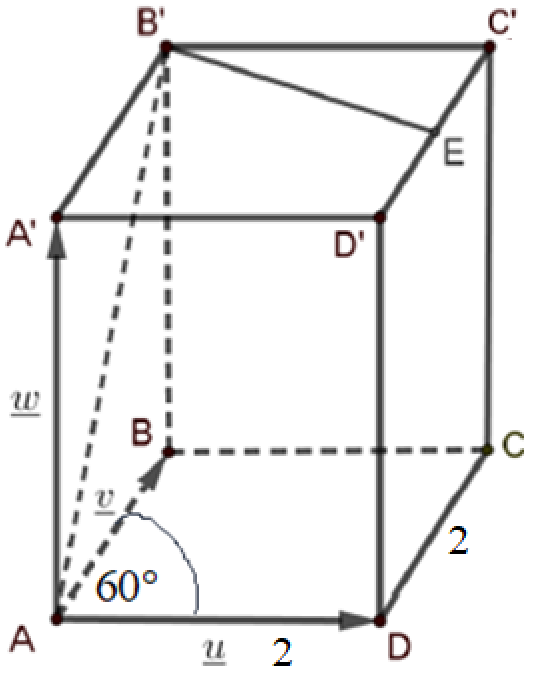
א. בסיס המנסרה הישרה הוא מעוין, שאורך צלעו 2.

בהתאם המקצועות הצדדים מאונכים לבסיסים.



נרשום בינתיים את מה שידוע, ואת השאר נחשב בהמשך.

$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}|=2}$ $\boxed{\underline{u}^2=4}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}|=2}$ $\boxed{\underline{v}^2=4}$

$\boxed{\overrightarrow{AA'}=\underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}|=?}$ $\boxed{\underline{w}^2=?}$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=?$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{w}$

$\underline{v}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{v}\perp\underline{w}$

מה עוד ניתן ללמוד מהנתונים ?

E היא אמצע המקצוע $C'D'$, ולכן: $\boxed{\overrightarrow{C'E}=-\frac{1}{2}\underline{v}}$.

נביע את הווקטורים $\overrightarrow{B'E}$ ו- $\overrightarrow{B'A}$, באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

$\overrightarrow{B'E}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'E}$

$\boxed{\overrightarrow{B'E}=\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}}$

$\overrightarrow{B'A}=\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'A}$

$\boxed{\overrightarrow{B'A}=-\underline{v}-\underline{w}}$

תשובה: $\overrightarrow{B'E}=\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}$, $\overrightarrow{B'A}=-\underline{v}-\underline{w}$.

ב. נבדוק את שלוש הטענות.

(1) $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$.

הטענה אינה נכונה, כי הזווית שבין צלעות המעוין היא $\sphericalangle BAD=60°$, כלומר $\sphericalangle(\underline{u},\underline{v})=60°$.

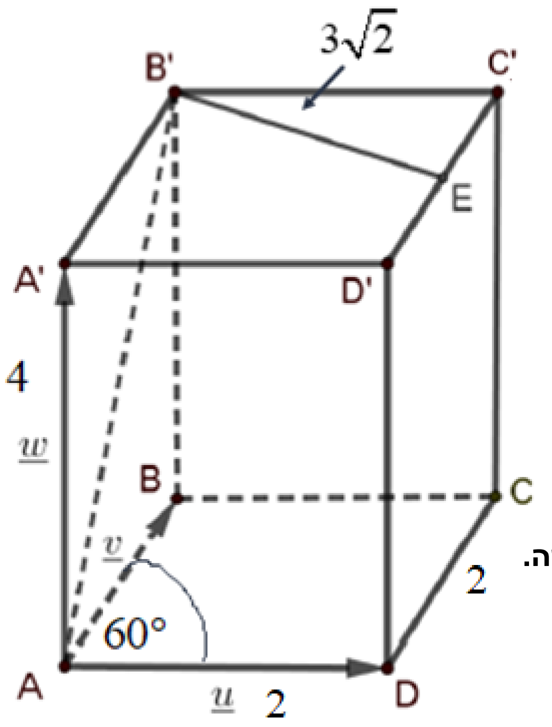
$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos 60°=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=2$.

תשובה: הטענה אינה נכונה, $\underline{u}\cdot\underline{v}=2$.

(2) $\underline{u}\cdot\underline{w}=0$.

הטענה נכונה, כי במנסרה ישרה המקצועות הצדדיים מאונכים לבסיסים.

תשובה: הטענה נכונה, $\underline{u}\cdot\underline{w}=0$.



(3) $\overrightarrow{B'A}$ **מאונך ל-** $\overrightarrow{B'E}$.

$$\overrightarrow{B'A}\cdot\overrightarrow{B'E}=(-\underline{v}-\underline{w})\cdot(\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v})$$

$$\overrightarrow{B'A}\cdot\overrightarrow{B'E}=-\underline{u}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{v}^2 \quad \leftarrow \underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$$

$$\overrightarrow{B'A}\cdot\overrightarrow{B'E}=-2+\frac{1}{2}\cdot 4$$

$$\overrightarrow{B'A}\cdot\overrightarrow{B'E}=0 \quad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{B'A}\perp\overrightarrow{B'E}}$$

תשובה: הטענה נכונה, $\overrightarrow{B'A}$ **מאונך ל-** $\overrightarrow{B'E}$.

ג. נחשב את אורך הגובה של המנסרה.

נפח המנסרה הוא $8\sqrt{3}$ **שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה המנסרה.**

שטח בסיס מנסרה הוא:

$$S_{ABCD}=AB\cdot AD\cdot\sin\sphericalangle BAD$$

$$S_{ABCD}=2\cdot 2\cdot\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$$

גובה מנסרה הוא:

$$H=\frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=4$$

תשובה: אורך הגובה של המנסרה הוא 4.

ד. משמאל, עדכון של כל המידע שצברנו.

$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}|=2}$ $\boxed{\underline{u}^2=4}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}|=2}$ $\boxed{\underline{v}^2=4}$

$\boxed{\overrightarrow{AA'}=\underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}|=4}$ $\boxed{\underline{w}^2=16}$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=2$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{w}$

$\underline{v}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{v}\perp\underline{w}$

(1) נחשב את אורך הווקטור $\overrightarrow{B'E}$.

$$|\overrightarrow{B'E}|=\left|\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}\right|$$

$$|\overrightarrow{B'E}|=\sqrt{\underline{u}^2+\frac{1}{4}\underline{v}^2-\underline{u}\cdot\underline{v}}$$

$$|\overrightarrow{B'E}|=\sqrt{4+\frac{1}{4}\cdot 4-2}$$

$$\boxed{|\overrightarrow{B'E}|=\sqrt{3}}$$

תשובה: אורך הווקטור $\overrightarrow{B'E}$ **הוא** $\sqrt{3}$.

(2) נחשב את שטח המשולש $AB'E$ **,** $\sphericalangle AB'E = 90°$ **.**

תכנון: $S_{\Delta AB'E} = 0.5 \cdot B'A \cdot B'E$

נחשב את אורך הווקטור $\overrightarrow{B'A}$**.**

$\boxed{\overrightarrow{B'A} = -\underline{v} - \underline{w}}$

$|\overrightarrow{B'A}| = \sqrt{(-\underline{v} - \underline{w})^2}$

$|\overrightarrow{B'A}| = \sqrt{\underline{v}^2 + \underline{w}^2}$

$|\overrightarrow{B'A}| = \sqrt{4+16}$

$\boxed{|\overrightarrow{B'A}| = 2\sqrt{5}}$

$\boxed{\overrightarrow{AD} = \underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}| = 2}$ $\boxed{\underline{u}^2 = 4}$

$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}| = 2}$ $\boxed{\underline{v}^2 = 4}$

$\boxed{\overrightarrow{AA'} = \underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}| = 4}$ $\boxed{\underline{w}^2 = 16}$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 2$

$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w}$

(את אורך $\overrightarrow{B'A}$ **ניתן גם לחשב גם במשפט פיתגורס ב-** $\Delta ABB'$**.)**

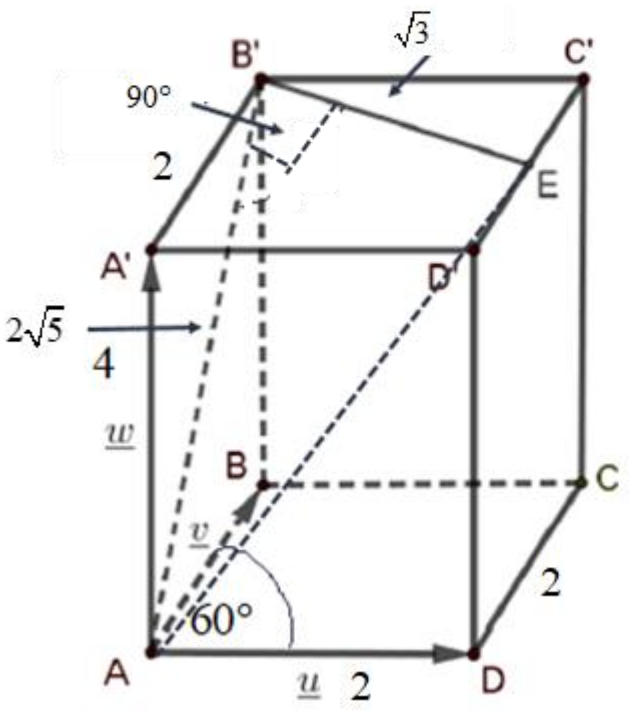
נחשב את שטח המשולש $AB'E$ **.**

$S_{\Delta AB'E} = 0.5 \cdot B'A \cdot B'E$

$S_{\Delta AB'E} = 0.5 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

$\boxed{S_{\Delta AB'E} = \sqrt{15}}$

תשובה: שטח משולש $AB'E$ **הוא** $\sqrt{15}$ **.**



א. המחקר בדק את הקשר בין טמפרטורת המים (x), ובין כמות המדוזות (y) .

האוכלוסייה שנבדקה היא 30 זוגות נתונים.

התוצאות שהתקבלו הן: ממוצע טמפרטורת המים $\bar{x} = 26.5°$, עם סטיית תקן של $S_x = 3.5°$,

וממוצע כמות המדוזות $\bar{y} = 14$, עם סטיית תקן של $S_y = 2.5$ מדוזות.

הניבוי הטוב ביותר לכמות המדוזות, כאשר טמפרטורת המים היא הטמפרטורה הממוצעת ($\bar{x} = 26.5°$),

הוא הממוצע של כמות המדוזות ($\bar{y} = 14$).

נזכור, כמובן, שגם קו הרגרסיה עובר בנקודת הממוצעים.

תשובה: הניבוי לכמות המדוזות, כאשר טמפרטורת המים היא הטמפרטורה הממוצעת $26.5°$,

יהיה 14 מדוזות.

ב. נתון כי מקדם המתאם הוא $r = 0.8$.

זהו מקדם הקרוב למקדם הדטרמיניסטי $(r = 1)$, ולכן הניבוי יהיה ניבוי טוב.

כיוון שמקדם המתאר הוא חיובי, אז ככל שהמשתנה המנבא X יגדל, גם המשתנה Y יגדל.

ומכאן, שככל שהטמפרטורה תעלה, גם צפוי שכמות המדוזות תגדל.

תשובה: היגד (3) נכון – ככל שהטמפרטורה עולה, ננבא כמות גדולה יותר של מדוזות.

ג. נמצא את משוואת קו הרגרסיה לניבוי כמות המדוזות y לפי הטמפרטורה x.

נמצא תחילה את שיפוע קו הרגרסיה: $m = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = 0.8 \cdot \frac{2.5}{3.5} = \frac{4}{7}$.

נמצא את משוואת קו הרגרסיה, שעובר בנקודת הממוצעים:

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$$

$$y - 14 = \frac{4}{7}(x - 26.5)$$

$$y - 14 = \frac{4}{7}x - 15\frac{1}{7}$$

$$\boxed{y = \frac{4}{7}x - 1\frac{1}{7}}$$

תשובה: משוואת קו הרגרסיה, לניבוי כמות המדוזות y לפי הטמפרטורה x, היא $y = \frac{4}{7}x - 1\frac{1}{7}$.

ד. נמצא מהו הניבוי לשיעור לכמות המדוזות y ביום שבו טמפרטורת המים היא $33°$.

נציב $x=33$, במשוואת קו הרגרסיה: $y=\frac{4}{7}\cdot 33-1\frac{1}{7}=17\frac{5}{7}\approx 18$.

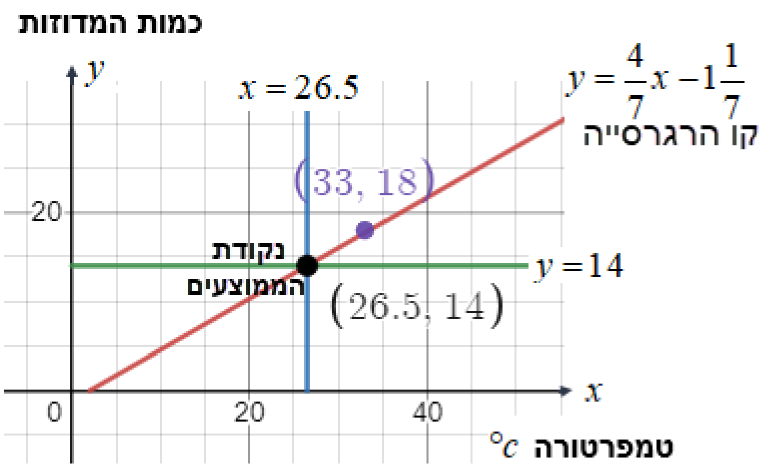
<u>הערה</u> – בפתרון סעיף זה, חבויה הנחה שטמפרטורת מים של $33°$ הייתה בתחום,

שבו התקבלו נתונים על טמפרטורות המים.

לאור סטיית התקן של $3.5°$, וממוצע של $26.5°$, הרי שהנחה זו היא סבירה.

<u>תשובה</u>: הניבוי לכמות המדוזות, ביום שבו טמפרטורת המים היא $33°$, הוא בערך 18 מדוזות.

העשרה



נוסחת הגדילה והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$, כאשר M_0 - הכמות ההתחלתית,

q הוא גורם הגדילה/דעיכה, M_t הכמות לאחר זמן t.

א. ביישוב א', הפונקציה המתארת את מספר הנדבקים בכל יום היא $M(t) = 10 \cdot 1.5^t$.

מכאן שמספר הנדבקים ההתחלתי הוא 10 וגורם הגדילה הוא $q = 1.5$ (פונקציה עולה).

ביישוב ב', הפונקציה המתארת את מספר הנדבקים בכל יום היא $G(t) = 100 \cdot 1.2^t$.

מכאן שמספר הנדבקים ההתחלתי הוא 100 וגורם הגדילה הוא $q = 1.2$ (פונקציה עולה).

לכן, גרף II מתאים ליישוב ב', שבו מספר הנדבקים ההתחלתי גדול יותר, וקצב הגדילה איתי יותר.

תשובה: יישוב א' – גרף III , יישוב ב' – גרף II.

ב. נחשב מה היה מספר הנדבקים ביישוב ב', לאחר 8 ימים.

$$G(8) = 100 \cdot 1.2^8 \approx 430$$

תשובה: מספר הנדבקים ביישוב ב', לאחר 8 ימים, היה בערך 430.

ג. נחשב לאחר כמה ימים מספר הנדבקים בשני היישובים היה שווה.

$$10 \cdot 1.5^t = 100 \cdot 1.2^t \quad / : 10 \cdot 1.2^t$$

$$\frac{1.5^t}{1.2^t} = 10 \quad \rightarrow (\frac{1.5}{1.2})^t = 10$$

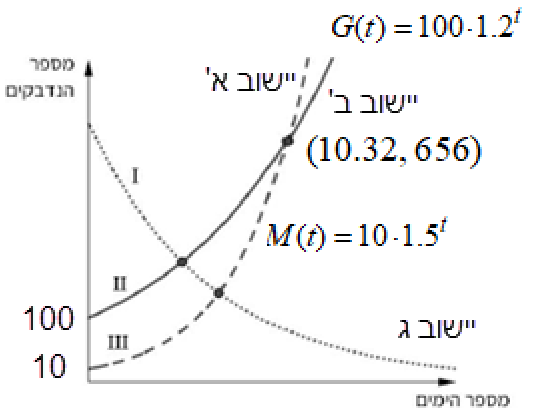
$$1.25^t = 10$$

$$\ell n 1.25^t = \ell n 10$$

$$t \ell n 1.25 = \ell n 10$$

$$t = \frac{\ell n 10}{\ell n 1.25}$$

$$\boxed{t \approx 10.32}$$



(בבדיקה, נקבל שמספר הנדבקים השווה הוא בערך 656 .)

תשובה: לאחר 10.32 ימים בערך (ביום ה- 11) , מספר הנדבקים ביישוב א' וביישוב ב' היה שווה .

ד. בישוב ג' מספר הנדבקים, בזמן הבדיקה הראשונית, היה גדול פי 40 ממספר הנדבקים ביישוב ב'.

מכאן שמספר הנדבקים, בספירה הראשונית ביישוב ג', היה $100\cdot 40=4000$.

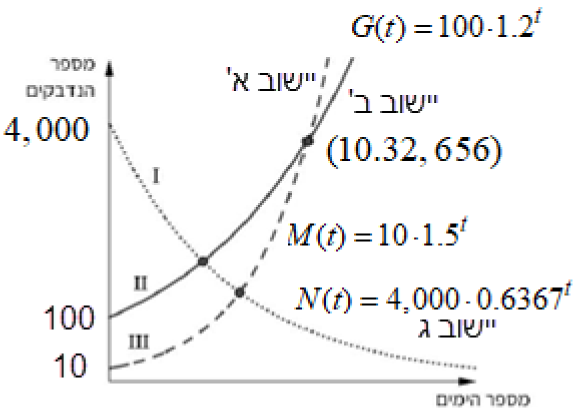
לאחר 8 ימים, ממתן התרופה הניסיונית שניתנה מייד לאחר בדיקה הראשונית,

היה מספר הנדבקים ביישוב ג', רבע מ- 430 הנדבקים ביישוב ב', כפי שמצאנו בסעיף הקודם,

כלומר : $\frac{1}{4}\cdot 430\approx 108$ נדבקים.

נחשב בכמה אחוזים ירד מספר הנבדקים ביישוב ג', בכל יום, מאז מתן התרופה.

$$108=4000\cdot q^8 \quad /:4000$$
$$0.027=q^8$$
$$\sqrt[8]{0.027}=q$$
$$\boxed{q=0.6367}$$



נמצא את אחוז הדעיכה היומי.

$$0.6367=\frac{100-P}{100} \quad /\cdot 100$$
$$63.67=100-P$$
$$\boxed{P=36.33\%}$$

(ביישוב ג', הפונקציה המתארת את מספר הנדבקים בכל יום היא $N(t)=4,000\cdot 0.6367^t$.)

תשובה: מספר הנדבקים ביישוב ג' ירד ב- 36.33% בכל יום.

ה. הוחלט לסגור את בתי הספר ביישוב בו מספר הנבדקים יגיע ל- 600 .

ביישוב ג', מספר הנבדקים כבר ביום הראשון הוא $4,000$ ולכן בית הספר נסגרו ביישוב זה.

לאחר 10 ימים, מספר הנדבקים ביישוב א' יהייה בערך $M(10)=10\cdot 1.5^{10}\approx 577$,

לכן לא ייסגרו בתי הספר ביישוב א' (למעשה, ייסגרו לאחר 11 ימים).

לאחר 10 ימים, מספר הנדבקים ביישוב ב' יהייה בערך $G(10)=100\cdot 1.2^{10}\approx 619$,

לכן סגרו את בתי הספר ביישוב ב'.

תשובה: כן, סגרו בתי הספר בשני יישובים, במהלך 10 הימים מהספירה הראשונית.

את בתי הספר ביישוב ג' סגרו כבר ביום הראשון, ואת בתי הספר ביישוב ב' סגרו ביום העשירי.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2\ell n(x^2-a)$ **(** $a>0$ **, פרמטר).**

נתון כי שיפוע המשיק בנקודה $x=5$ **הוא** 1.25**, ולכן** $f'(5)=1.25$ **.**

$$f'(x)=\frac{2\cdot 2x}{x^2-a}$$
$$1.25=\frac{4\cdot 5}{5^2-a}$$
$$25-a=16$$
$$\boxed{a=9}$$

ב. נציב $a=9$ **, ונקבל** $\boxed{f(x)=2\ell n(x^2-9)}$

נשים לב שהפונקציה זוגית, ולכן הגרף שלה סימטרי לציר ה- y **(לא דורש הוכחה, אם לא מבקשים).**

(1) נמצא את תחום ההגדרה: פונקציית ה- ℓn **מקבלת מספרים חיוביים, בלבד.**

$$x^2-9>0$$
$$x^2-9=0$$
$$x=-3,\ 3$$

מתקבלת פרבולה בעלת מינימום ("צוחקת"), שתחום החיוביות שלה הוא $x>3$ **, או** $x<3$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x>3$ **, או** $x<3$ **.**

(2) האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ **, המאונכות לציר ה-** x **, מתקבלות עבור** $x=3$ **, ו-** $x=-3$ **,**

שכן כאשר הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית שואף לאפס, אז הפונקציה שואפת ל- $(-\infty)$ **.**

תשובה: האסימפטוטות הן $x=3$ **, ו-** $x=-3$ **.**

(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ **.**

$$\boxed{f(x)=2\ell n(x^2-9)}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{4x}{x^2-9}}$$
$$4x=0$$
$$\cancel{x=0}$$
$$f'(4)=\frac{16}{+}>0 \quad \nearrow$$
$$f'(-4)=\frac{-16}{+}<0 \quad \searrow$$

תשובה: עלייה - $x>3$ **, ירידה -** $x<-3$ **.**

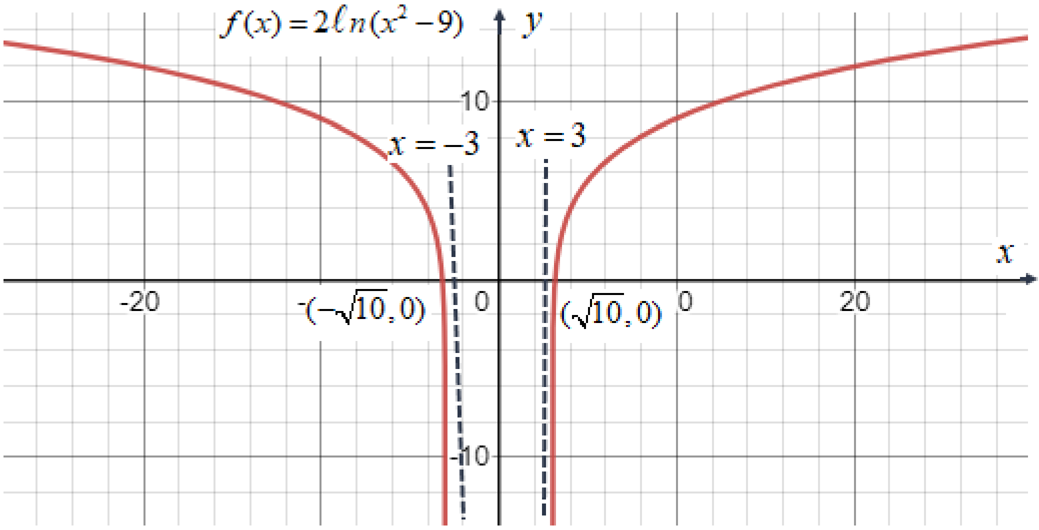
(4) בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x מתקיים $y = 0$.

$$0 = 2\ell n(x^2 - 9)$$
$$\ell n(x^2 - 9) = 0 \quad \to x^2 - 9 = e^0 = 1$$
$$x^2 = 10 \quad \to \boxed{(\sqrt{10}, 0)} \quad , \quad \boxed{(-\sqrt{10}, 0)}$$

אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y , כי בתחום ההגדרה $x \neq 0$.

תשובה: $(\sqrt{10}, 0)$, $(-\sqrt{10}, 0)$.

(5) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



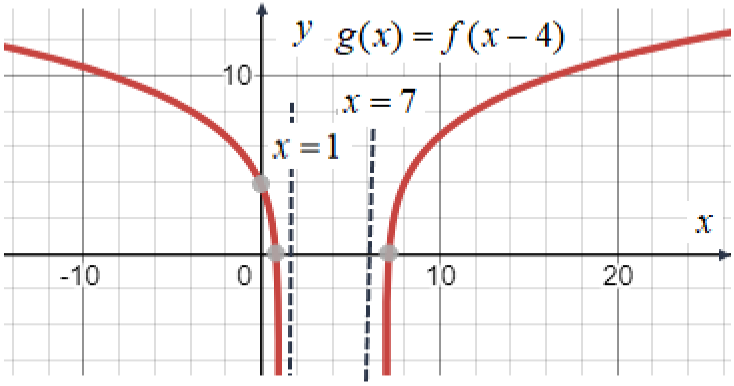
תשובה: הסקיצה מעל.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x-4)$.

זו הזזה אופקית, 4 יחידות ימינה של $f(x)$. תחום ההגדרה הוא $x>7$, או $x<1$.

האסימפטוטות הן $x=7$, ו- $x=1$, נקודות החיתוך עם ציר ה- x הן $(\sqrt{10}+4,0)$, $(-\sqrt{10}+4,0)$.

יש כבר נקודת חיתוך עם ציר ה- y , תחום עלייה - $x>7$, ותחום ירידה - $x<1$.



תשובה: הסקיצה מעל.

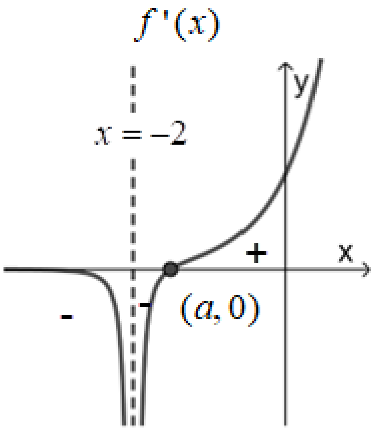
ד. כפי שאמרנו, $f(x)=2\ell n(x^2-9)$ היא פונקציה זוגית, ולכן הגרף שלה סימטרי לציר ה- y $(x=0)$.

לאחר ההזזה האופקית 4 יחידות ימינה, מתקבלת הפונקציה $g(x)=f(x-4)$,

שכמובן שאינה כבר זוגית והגרף שלה סימטרי לישר $x=4$.

תשובה: הפונקציה $g(x)=f(x-4)$ היא לא זוגית ולא אי-זוגית.

א. הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות בתחום $x \neq -2$.



הגרף של $f'(x)$, הנתון בסרטוט, חותך את ציר ה- x בנקודה $(a,0)$,
ועובר בנקודה זו משליליות לחיוביות,
ולכן $f(x)$ עוברת מירידה לעלייה, עבור $x=a$, וזו נקודת מינימום.
תשובה: $x=a$, מינימום.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{2x}}{x+2}$.
תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x \neq -2$.
נמצא את שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(x+2)-e^{2x}}{(x+2)^2}$$

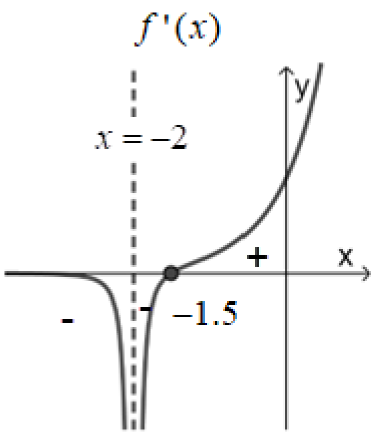
$$f'(x)=\frac{e^{x}(2x+4-1)}{(x+2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^{2x}(2x+3)}{(x+2)^2}}$$

$$0=2x+3$$

$$x=-1.5 \rightarrow f(-1.5)=\frac{e^{-3}}{-1.5+2}=\frac{2}{e^3}\approx 0.1 \quad \rightarrow \boxed{(-1.5, \frac{2}{e^3}\approx 0.1)}$$

סוג הקיצון נקבע, על פי סעיף א, כאשר בהתאם גם $a=-1.5$.
תשובה: $(-1.5, \frac{2}{e^3}\approx 0.1)$, מינימום , $a=-1.5$.



ג. את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$,
ניתן לרשום בהתאם לסימני הנגזרת $f'(x)$, המופעים בגרף הנתון .
תשובה: עלייה - $x>-1.5$, ירידה - $-2<x<-1.5$ או $x<-2$.

ד. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y , מתקיים $x=0$, ובהתאם $(0, 0.5)$.
בנקודות חיתוך עם ציר ה- x , מתקיים $y=0$.
אולם, כיוון שמונה הפונקציה חיובי לכל x , אז אין נקודת חיתוך עם ציר ה- x.
תשובה: $(0, 0.5)$.

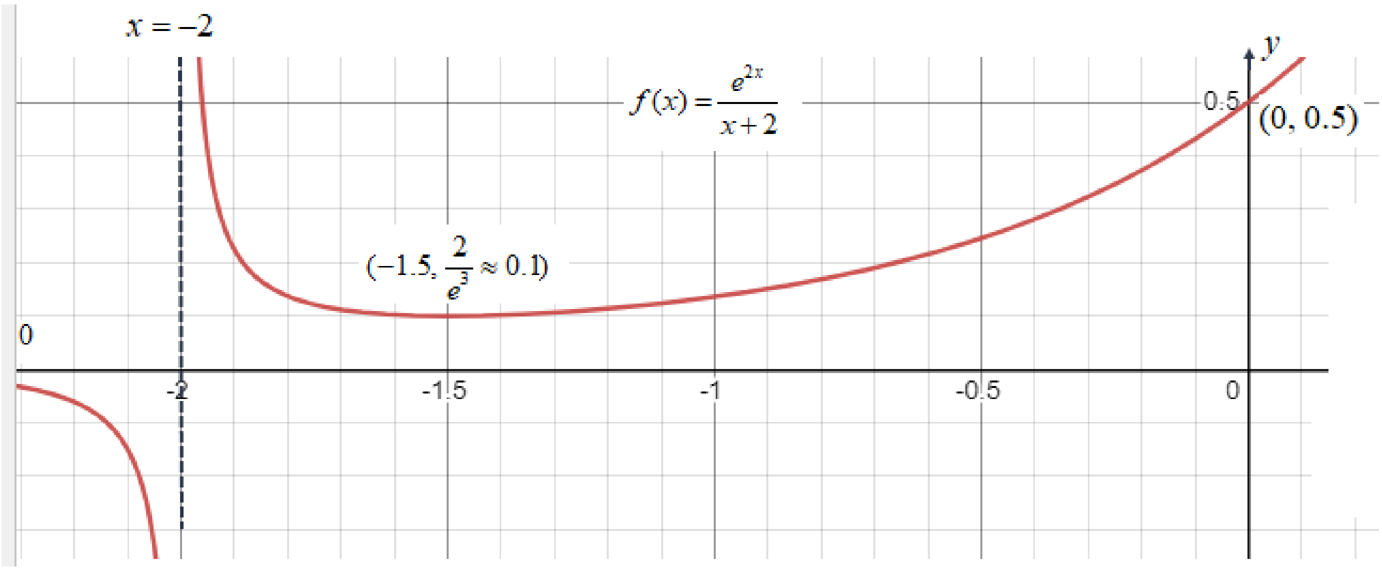
ה. משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x היא $x=-2$.

ו. נסרטט את גרף הפונקציה $f(x)=\frac{e^{2x}}{x+2}$.

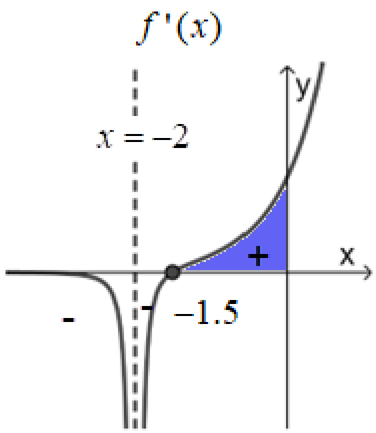
שלוש הצבות זריזות לפני הסרטוט.

$f(5)=3{,}146 \quad \to +\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית לימין.**

$f(-5)=-1.51\cdot 10^{-5} \quad \to 0^{-}$ **ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל, עבור** $x\to-\infty$.



תשובה: הסרטוט מעל.



ז. נחשב את השטח המבוקש, הצבוע בכחול משמאל.

$$S=\int_{-1.5}^{0}(f'(x)-0)\,dx$$

$$S=(f(x))\Big]_{-1.5}^{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0:\quad 0.5 \\ x=-1.5:\quad \frac{2}{e^3}\approx 0.1 \end{array}\right\} \boxed{S=0.5-\frac{2}{e^3}\approx 0.4}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $0.5-\frac{2}{e^3}\approx 0.4$.