א. לאחר סרטוט הישרים $AB \equiv 2x+y-13=0$ **ו-** $AC \equiv -x+2y+4=0$,

ולאור הנתון שראשית הצירים נמצאת בתוך ΔABC ,

ניתן להבין שמרכז המעגל נמצא מתחת לצלע AB **(והמרחק "שלילי") ומעל לצלע** AC **(והמרחק "חיובי").**

כל זאת, כאשר המקדם של y **בשתי הצלעות חיובי.**

מרכז המעגל נמצא על הישר $y=x-1$ **, ובהתאם נסמן** $M(m,m-1)$.

מרכז המעגל נמצא במרחק שווה, אורך הרדיוס, משתי הצלעות.

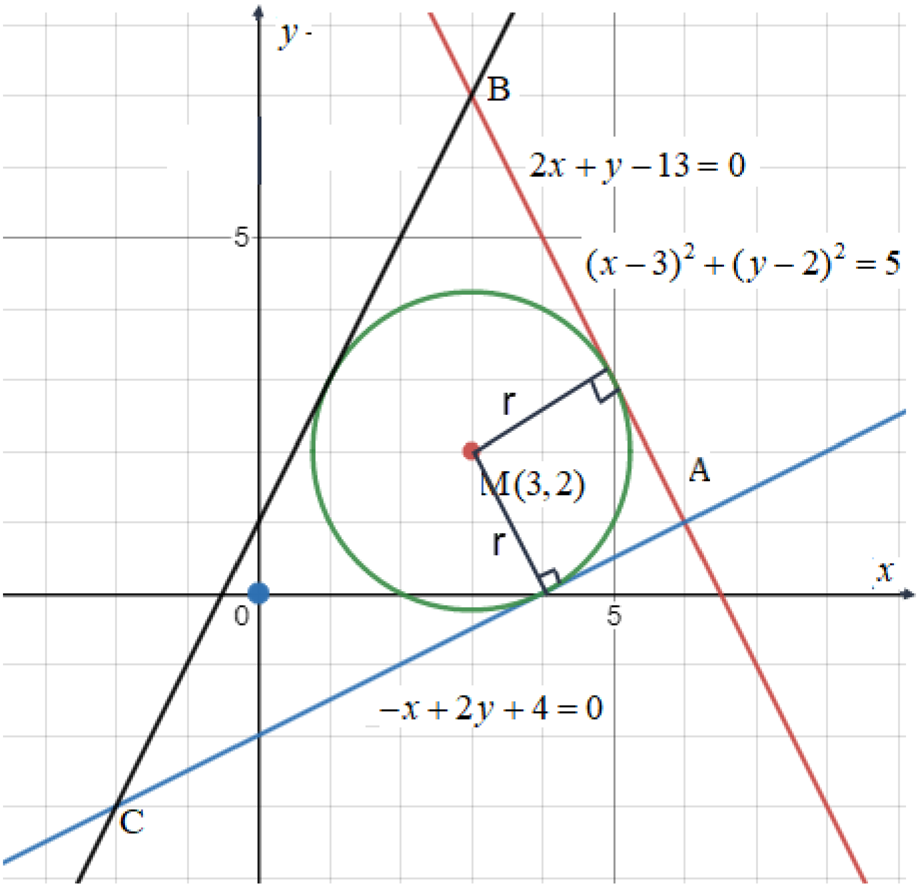
$$-\frac{2a+a-1-13}{\sqrt{2^2+1^2}}=+\frac{-a+2(a-1)+4}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$-3a+14=a+2$$

$$-4a=-12$$

$$a=3 \quad \to \boxed{M(3,2)}$$

$$R=-\frac{2\cdot 3+3-1-13}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$



תשובה: משוואת המעגל החסום ב- ΔABC **היא** $(x-3)^2+(y-2)^2=5$.

ב. נתון כי הישר BM מאונך לציר ה- x , לכן $\rightarrow B(3,7)$ $x_B = x_M = 3$ (לאחר הצבה במשוואת AB) .

מרכז המעגל $M(3,2)$ הוא מפגש חוצי זוויות,

ולכן BM הוא חוצה זווית, וכיוון שהוא מאונך לציר ה- x ,

אז המשכו הוא גם גובה למשולש שמתקבל על ידי קודקוד B ונקודות החיתוך עם ציר ה- x.

לכן ΔBPQ שווה שוקיים, שבו זוויות הבסיס שוות,

ומכיוון ש- $m_{AB} = -2$ אז $m_{BC} = 2$.

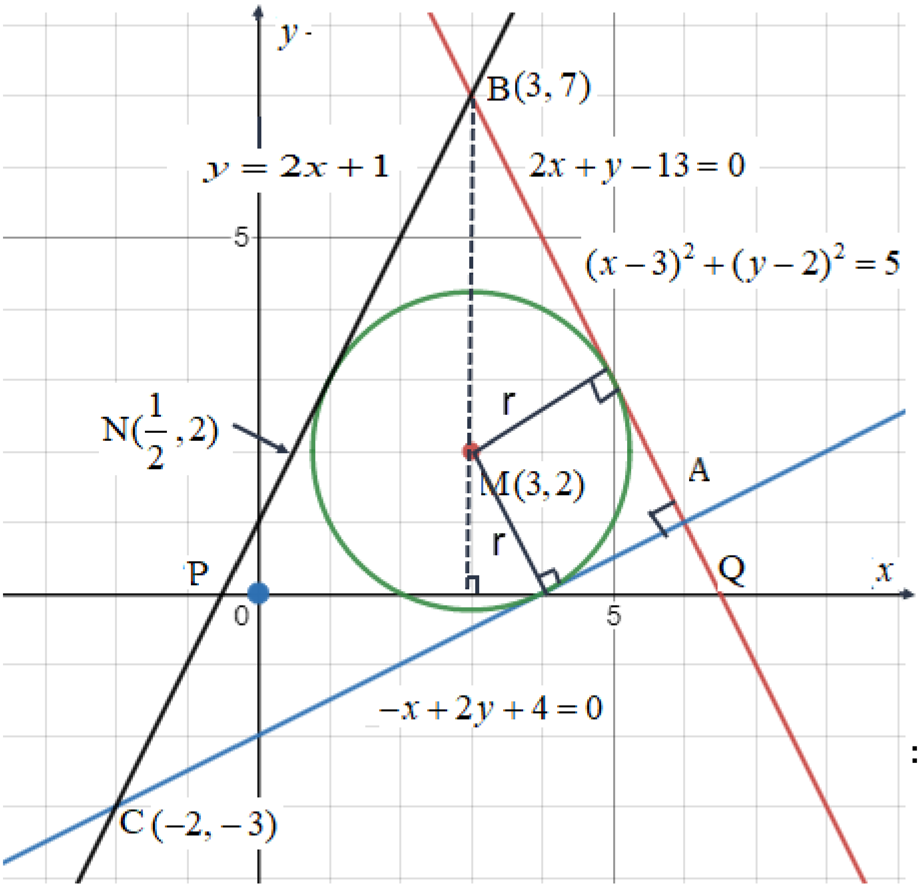
$$y - 7 = 2(x-3)$$

$$\boxed{y = 2x+1}$$

תשובה: משוואת הצלע BC היא $y = 2x+1$.

ג. נשים לב ש- ΔABC ישר זווית, כי $m_{AB} \cdot m_{BC} = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$.

מכאן, שמרכז המעגל החוסם הוא באמצע היתר BC .



$$C\begin{cases} -x+2y+4=0 \\ y=2x+1 \end{cases}$$

$$-x + 2(2x+1) + 4 = 0$$

$$3x = -6 \rightarrow x = -2$$

$$\boxed{C(-2,-3)}$$

נמצא את מרכז המעגל החוסם.

$$\left.\begin{array}{l} x_N = \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_N = \dfrac{7-3}{2} = 2 \end{array}\right\} \boxed{N(\frac{1}{2},2)}$$

התקבל ש- $y_N = y_M = 2$,

ולכן המרחק בין שני מרכזי המעגלים הוא:

$$x_M - x_N = 3 - 0.5 = 2.5$$

תשובה: המרחק, בין מרכז המעגל החסום ב- ΔABC ובין מרכז המעגל החוסם את המשולש הזה, הוא 2.5.

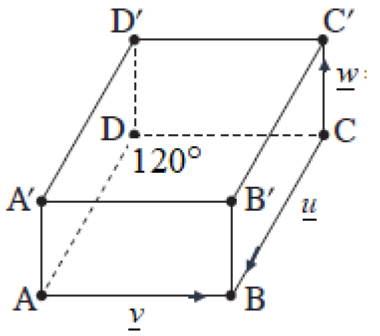
א. בסיס המנסרה הישרה הוא מעוין, שאורך צלעו 4 **.**

הזווית שבין צלעות המעוין היא $\sphericalangle ADC = 120^\circ$ **, כלומר** $\sphericalangle(\underline{u},\underline{v}) = 120^\circ$ **.**

$\underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos 120^\circ = 4\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -8$ **.**

המקצועות הצדדים מאונכים לבסיסים.

נרשום בינתיים את מה שידוע, ואת השאר נחשב בהמשך.



$\boxed{\overrightarrow{DA} = \underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}| = 4}$ $\boxed{\underline{u}^2 = 16}$

$\boxed{\overrightarrow{DC} = \underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}| = 4}$ $\boxed{\underline{v}^2 = 16}$

$\boxed{\overrightarrow{DD'} = \underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}| = ?}$ $\boxed{\underline{w}^2 = ?}$

$\underline{u}\cdot\underline{v} = -8$

$\underline{u}\cdot\underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{w}$

$\underline{v}\cdot\underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v}\perp\underline{w}$

$$\overrightarrow{D'F} = t\,\overrightarrow{D'A} + \frac{1}{4}\overrightarrow{D'C}$$

$$\overrightarrow{D'F} = t(\underline{u}-\underline{w}) + \frac{1}{4}(\underline{v}-\underline{w})$$

$$\boxed{\overrightarrow{D'F} = t\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + (-t-\frac{1}{4})\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'F}$$

$$\overrightarrow{DF} = t\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + (-t-\frac{1}{4})\underline{w} + \underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{DF} = t\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + (-t+\frac{3}{4})\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{DF} = t\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + (-t+\frac{3}{4})\underline{w}$ **.**

ב. $\overrightarrow{DF}$ **מאונך למישור** ACD' **, לכן , למשל,** $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$**, כי** $\overrightarrow{DF}$ **מאונך לכל וקטור במישור זה.**

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC} = (t\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + (-t+\frac{3}{4})\underline{w})\cdot(-\underline{u}+\underline{v})$$

$$0 = -t\underline{u}^2 + t\underline{u}\underline{v} - \frac{1}{4}\underline{u}\underline{v} + \frac{1}{4}\underline{v}^2 \quad \leftarrow \underline{u}\cdot\underline{w} = \underline{v}\cdot\underline{w} = 0$$

$$0 = -16t - 8t + 2 + 4 \quad \leftarrow \underline{u}\cdot\underline{v} = -8$$

$$24t = 6$$

$$\boxed{t = \frac{1}{4}}$$

תשובה: $t = \frac{1}{4}$**.**

ג. נחשב את אורך הגובה של המנסרה.

$\overrightarrow{DF}$ מאונך למישור ACD' , לכן , למשל, $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AD'}=0$, כי $\overrightarrow{DF}$ מאונך לכל וקטור במישור זה.

עבור $t=\frac{1}{4}$: $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AD'}=(\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w})\cdot(-\underline{u}+\underline{w})$$

$$0=-\frac{1}{4}\underline{u}^2-\frac{1}{4}\underline{u}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}^2 \quad \leftarrow \underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$$

$$0=-4+2+\frac{1}{2}\underline{w}^2 \quad \leftarrow \underline{u}\cdot\underline{v}=-8$$

$$4=\underline{w}^2$$

$$\boxed{|\underline{w}|=2}$$

$\boxed{\overrightarrow{DA}=\underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}|=4}$ $\boxed{\underline{u}^2=16}$

$\boxed{\overrightarrow{DC}=\underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}|=4}$ $\boxed{\underline{v}^2=16}$

$\boxed{\overrightarrow{DD'}=\underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}|=2}$ $\boxed{\underline{w}^2=4}$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=-8$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{w}$

$\underline{v}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{v}\perp\underline{w}$

שטח בסיס מנסרה הוא:

$$S_{ABCD}=AD\cdot DC\cdot\sin\measuredangle ADC$$

$$S_{ABCD}=4\cdot4\cdot\sin120^\circ=8\sqrt{3}$$

נפח המנסרה שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה המנסרה.

$$V=S_{ABCD}\cdot AA'$$

$$V=8\sqrt{3}\cdot2=16\sqrt{3}$$

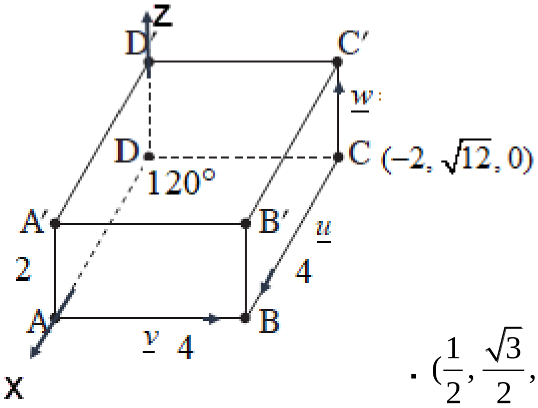
תשובה: נפח המנסרה הוא $16\sqrt{3}$.

ד. הנקודה D היא ראשית הצירים.

הקודקוד A נמצא על החלק החיובי של ציר ה- x , לכן: $\underline{u}=(4,0,0)$.

הקודקוד D' נמצא על החלק החיובי של ציר ה- z , לכן: $\underline{w}=(0,0,2)$.

$C=(-2,\sqrt{12},0)$, לכן: $\underline{v}=(-2,\sqrt{12},0)$.



$$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$$

$$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{4}\cdot(4,0,0)+\frac{1}{4}\cdot(-2,\sqrt{12},0)+\frac{1}{2}\cdot(0,0,2)$$

$$\boxed{\overrightarrow{DF}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)}$$

$\overrightarrow{DF}$ יוצא מראשית הצירים, ולכן שיעורי הנקודה F הם $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$.

תשובה: שיעורי הנקודה F הם $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$.

א. נפתור את המשוואה $(z+i)^2-2-2\sqrt{3}\,i=0$.

$$(z+i)^2=2+2\sqrt{3}\,i$$

נעביר את המספר המרוכב , שבאגף ימין, להצגה קוטבית.

$$R=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$$

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$\boxed{2+2\sqrt{3}\,i=4cis\,60^\circ}\quad\leftarrow 1st\ quadrant$$

$$(z+i)_k=\sqrt{4}\,cis\,\frac{60^\circ+360^\circ k}{2}$$

$$z_1+i=2\,cis\,30^\circ=\sqrt{3}+i\quad\rightarrow\boxed{z_1=\sqrt{3}}$$

$$z_2+i=2\,cis\,210^\circ=-\sqrt{3}-i\quad\rightarrow\boxed{z_2=-\sqrt{3}-2\,i}$$

תשובה: פתרונות המשוואה הם: $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}-2\,i$.

ב. $a_1<a_2$ **כאשר שניהם הם החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה, שקבלנו בסעיף א.**

מכאן ש- $a_1=-\sqrt{3}$, $a_2=\sqrt{3}$.

I. **נתון המקום הגיאומטרי** $|z-ia_1|=\sqrt{3}$

נסמן $z=x+yi$ **, כאשר** $a_1=-\sqrt{3}$.

$$|z+ia_1|=\sqrt{3}$$

$$|x+yi+i\sqrt{3}|=\sqrt{3}$$

$$|x+(y+\sqrt{3})i|=\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2+(y+\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$$

$$\boxed{x^2+(y+\sqrt{3})^2=3}$$

וזה מעגל שמרכזו $(0,-\sqrt{3})$ **, ורדיוסו** $\sqrt{3}$.

II. **נתון המקום הגיאומטרי** $|z-ia_2|=\sqrt{3}$

נסמן $z=x+yi$ **, כאשר** $a_2=\sqrt{3}$.

$$|z-ia_2|=\sqrt{3}$$

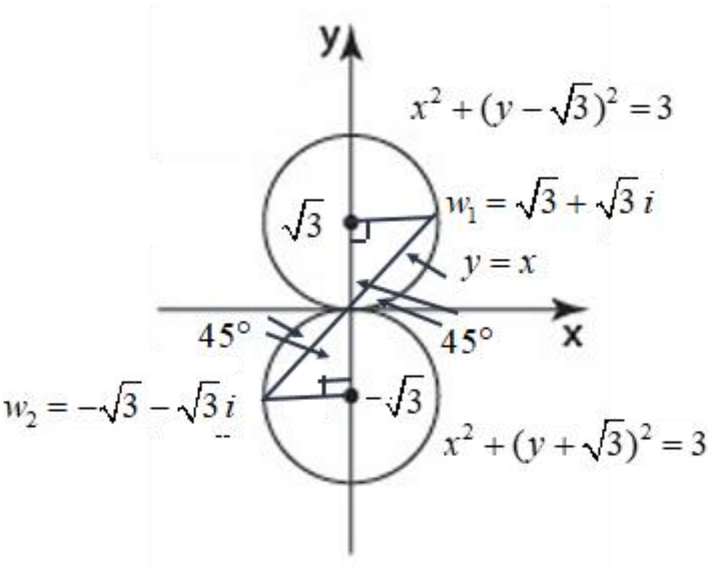
$$|x+yi-i\sqrt{3}|=\sqrt{3}$$

$$|x+(y-\sqrt{3})i|=\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2+(y-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$$

$$\boxed{x^2+(y-\sqrt{3})^2=3}$$

וזה מעגל שמרכזו $(0,\sqrt{3})$ **, ורדיוסו** $\sqrt{3}$.



תשובה: הסרטוט מעל, כולל הנדרש לסעיף ג.

ג. הישר $y=x$ חותך את שני המעגלים בראשית הצירים,

ובנקודות המיוצגות על ידי המספרים המרוכבים w_1 ו- w_2 .

כיוון ששיפוע הישר הוא 1 , אז הוא יוצר זווית $45°$ עם ציר ה- x ,

ומתקבלים שני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים,

ומכאן ש- $w_1=\sqrt{3}+\sqrt{3}i$ ו- $w_2=-\sqrt{3}-\sqrt{3}i$ (מבלי להגביל את הכלליות).

נזכור ש- $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$.

$$z^3=w_1\cdot\bar{w}_1\cdot w_2\cdot\bar{w}_2$$

$$z^3=(\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^2)\cdot((-\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3}^2))$$

$$z^3=36$$

$$z^3=36\,cis0°$$

$$z_k=\sqrt[3]{36}\,cis120°k$$

$$\boxed{z_1=\sqrt[3]{36}}$$

$$\boxed{z_2=\sqrt[3]{36}\,cis120°}$$

$$\boxed{z_1=\sqrt[3]{36}\,cis240°}$$

תשובה: פתרונות המשוואה הם - $\sqrt[3]{36}$, $\sqrt[3]{36}\,cis120°$, $\sqrt[3]{36}\,cis240°$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{ax}{\ell n\, x-a}$ **(** $a>0$ **, פרמטר).**

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית חיובי, ולכן $x>0$ **.**

כמו כן מכנה שונה מאפס, לכן $\ell n\, x-a\neq 0 \quad \rightarrow \ell n\, x\neq a \quad \rightarrow x\neq e^{a}$ **.**

תשובה: הפונקציה $f(x)$ **מוגדרת עבור** $x>0, x\neq e^{a}$ **.**

(2) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **.**

$$f'(x)=a\cdot\frac{\ell n\, x-a-\frac{x}{x}}{(\ell n\, x-a)^{2}}$$

$$\boxed{f'(x)=a\cdot\frac{\ell n\, x-a-1}{(\ell n\, x-a)^{2}}}$$

$$\ell n\, x-a-1$$

$$\ell n\, x=a+1 \quad \rightarrow x=e^{a+1}$$

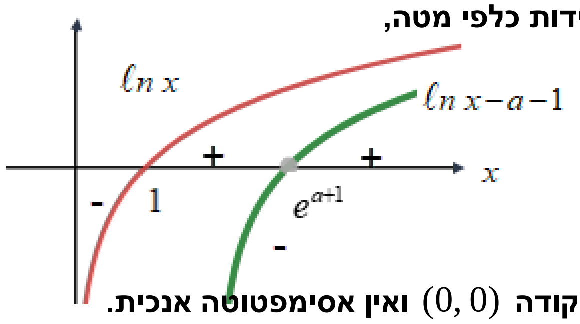
$$f(e^{a+1})=\frac{a\cdot e^{a+1}}{\ell n\, e^{a+1}-a}=\frac{a\cdot e^{a+1}}{a+1-a}=a\cdot e^{a+1} \quad \rightarrow \boxed{(e^{a+1}, a\cdot e^{a+1})}$$

$a>0$ **, המכנה חיובי, ולכן סימני הנגזרת נקבעים על פי** $\ell n\, x-a-1$**.**

הפונקציה $\ell n\, x$ **עולה ועוברת משליליות לחיוביות עבור** $x=1$ **.**

הפונקציה $\ell n\, x-a-1$ **היא הזזה אנכית ב** $a+1$ **יחידות כלפי מטה,**

ועוברת משליליות לחיוביות עבור $x=e^{a+1}$ **.**

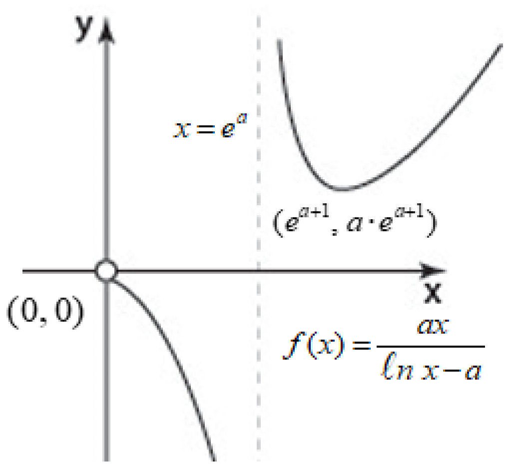


עלייה: $x>e^{a+1}$ **, ירידה:** $e^{a}<x<e^{a+1}$ **או** $0<x<e^{a}$**.**

תשובה: $(e^{a+1}, a\cdot e^{a+1})$ **, מינימום.**

(3) כאשר $x\rightarrow 0^{+}$ **,** $f(x)\rightarrow \dfrac{0}{-\infty}=0$ **, הגרף שואף לנקודה** $(0,0)$ **ואין אסימפטוטה אנכית.**

אסימפטוטה אנכית: $x=e^{a}$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

(1) הפונקציה $f(x)$ **מוגדרת עבור** $x>0, x\neq e^a$.

כיוון ש- $f(x)\neq 0$ **על פי הגרף, אז תחום ההגדרה של** $g(x)$ **זהה.**

תשובה: הפונקציה $g(x)$ **מוגדרת עבור** $x>0, x\neq e^a$.

(2) כאשר $f(x)$ **עולה, המכנה של** $g(x)$ **יורד, וגם להפך.**

לכן, תחומי עלייה וירידה מתהפכים.

ניתן לראות גם על פי הנגזרת : $g'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$.

לכן, נקודת המינימום הופכת להיות נקודת מקסימום, כאשר שיעור ה- y **הופכי.**

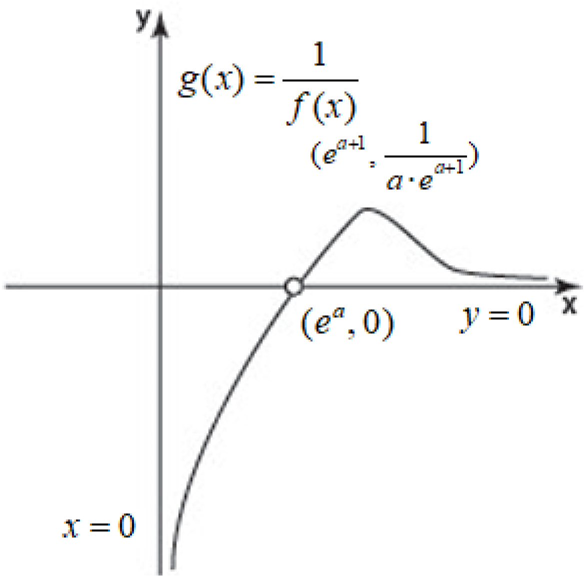
תשובה: $(e^{a+1}, \frac{1}{a\cdot e^{a+1}})$ **, מקסימום.**

(3) כאשר $x\to 0^+$, $f(x)\to 0^-$ **,** $g(x)\to -\infty$ **ו-** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

כאשר $x\to e^a$, $f(x)\to \pm\infty$ **,** $g(x)\to \pm 0$,

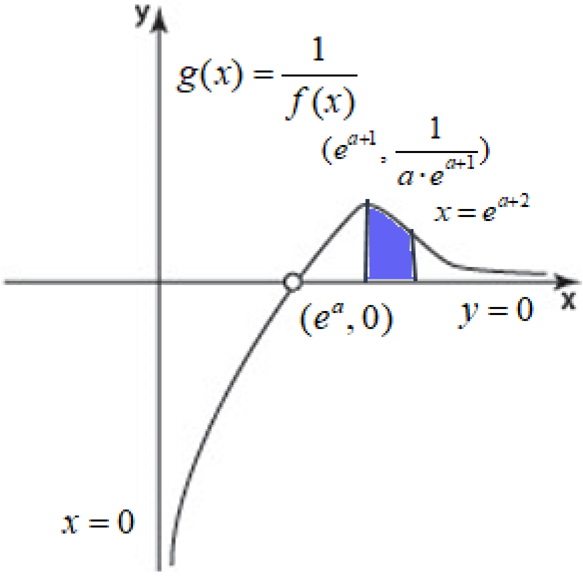
והגרף של $g(x)$ **שואף לנקודת אי רציפות סליקה ("חור") -** $(e^a, 0)$.

כאשר $x\to +\infty$, $f(x)\to +\infty$ **,** $g(x)\to 0$ **ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. נתון כי השטח, הצבוע בכחול, הוא 3 .



נביע את השטח המוגבל באמצעות a , בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית, ולאחר מכן נשווה ל- 3.

$$S=\int_{e^{a+1}}^{e^{a+2}}\left(\frac{\ell n\,x-a}{ax}-0\right)dx=$$

$$S=\int_{e^{a+1}}^{e^{a+2}}\frac{1}{a}(\ell n\,x-a)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$S=\frac{(\ell n\,x-a)^2}{2a}\Big]_{e^{a+1}}^{e^{a+2}}$$

$$\left.\begin{aligned}x=e^{a+2}:&\quad\frac{(a+2-a)^2}{2a}=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a}\\ x=e^{a+1}:&\quad\frac{(a+1-a)^2}{2a}=\frac{1}{2a}\end{aligned}\right\}S=\frac{2}{a}-\frac{1}{2a}\quad\rightarrow\quad\boxed{S=\frac{3}{2a}}$$

$$\frac{3}{2a}=3\quad\rightarrow\quad\boxed{a=\frac{1}{2}}$$

תשובה: $a=\frac{1}{2}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=9^{-x}-6\cdot3^{-x}+m$ **, המוגדרת לכל** x**.**

נעבוד עם התבנית הבאה: $f(x)=3^{-2x}-6\cdot3^{-x}+m$ **, כי נוח לעבוד עם בסיסים זהים.**

(1) תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא כל** x **.**

(2) כאשר $x\to+\infty$ **,** $3^{-x},3^{-2x}\to0$ **ומכאן ש** $y=m$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

תשובה: $y=m$ $(x\to+\infty)$**.**

(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגן.**

$$f'(x)=-2\cdot3^{-2x}\cdot\ell n3+6\cdot3^{-x}\cdot\ell n3$$

$$\boxed{f'(x)=2\cdot3^{-x}\cdot\ell n3\cdot(-3^{-x}+3)}$$

$$0=-3^{-x}+3$$

$$3^{-x}=3\quad\to-x=1\quad\to x=-1\quad\to(-1,m-9)$$

$2\cdot3^{-x}\cdot\ell n3$ **הוא ביטוי חיובי.**

$(-3^{-x}+3)$ **היא פונקציה עולה, העוברת משליליות לחיוביות עבור** $x=-1$ **,**

ולכן $f(x)$ **עוברת מירידה לעלייה ו-** $(-1,m-9)$ **היא נקודת מינימום.**

תשובה: $(-1,m-9)$ **, מינימום.**

ב. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ **משיק לציר ה-** x **, כלומר** $f'(x)=0$ **וגם** $f(x)=0$ **.**

$m-9=0\quad\to\boxed{m=9}$ **.**

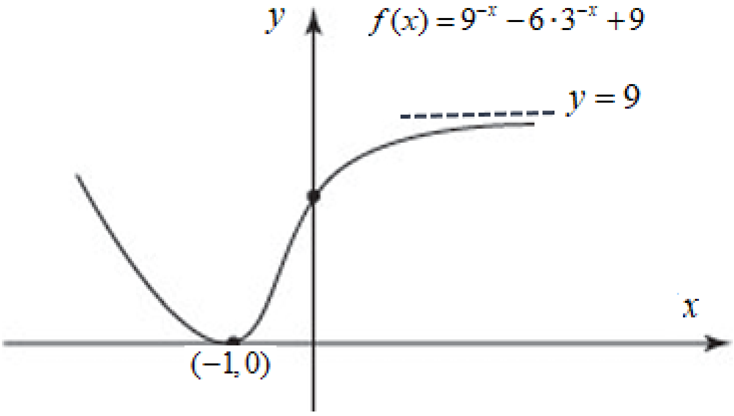
תשובה: $m=9$ **.**

ג. $f(x)=9^{-x}-6\cdot3^{-x}+9$ **.**

(1) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

אסימפטוטה אופקית $y=9$ $(x\to+\infty)$**.**

נקודת מינימום $(-1,0)$**.**



תשובה: הסרטוט מעל.

(2) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $\ell n\ f(x)$.

תחום ההגדרה של $\ell n\ f(x)$ **הוא** $x \neq -1$, **כי** $f(x) > 0$ **לכל** $x \neq -1$.

אסימפטוטה אופקית $y = \ell n 9$ $(x \to +\infty)$.

כאשר $x \to -1$, $f(x) \to 0^+$, $\ell n\ f(x) \to -\infty$ **ו-** $x = -1$ **אסימפטוטה אנכית.**

$\left[\ell n\ f(x)\right]' = \frac{f\ '(x)}{f(x)}$**, ותחומי עלייה וירידה ללא שינוי, עבור** $x \neq -1$.

תשובה: הסרטוט משמאל, כולל סימון שטח עבור סעיף ד.

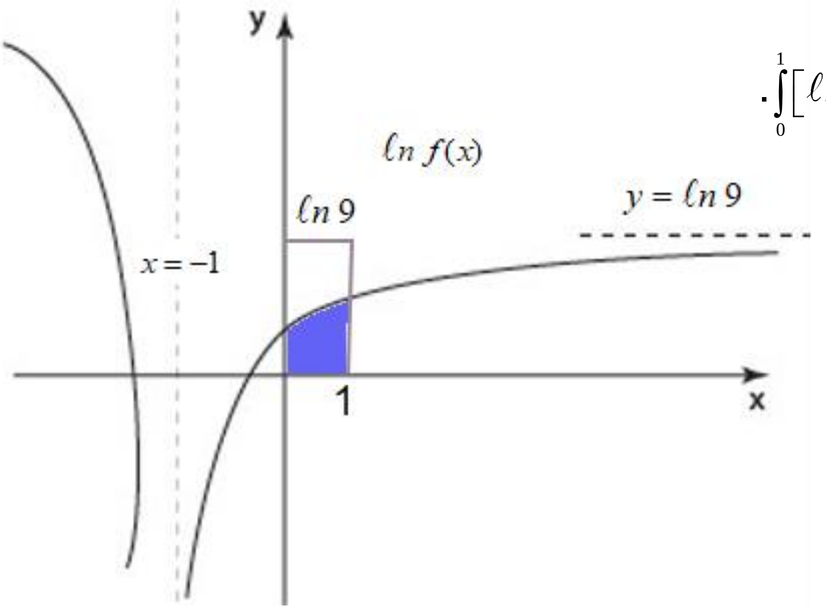
ד. נסביר מדוע $\int_0^1 \left[\ell n\ f(x) - \ell n\ 4\right] dx < \ell n \frac{9}{4}$.

$$\int_0^1 \left[\ell n\ f(x) - \ell n\ 4\right] dx =$$

$$\int_0^1 \left[\ell n\ f(x)\right] dx - \int_0^1 \left[\ell n\ 4\right] dx =$$

$$\int_0^1 \left[\ell n\ f(x)\right] dx - x\ell n\ 4\Big]_0^1 =$$

$$\int_0^1 \left[\ell n\ f(x)\right] dx - \ell n\ 4$$



המחובר השמאלי מייצג את השטח הצבוע מכחול, שקטן משטח המלבן שהוא $\ell n 9$.

לכן:

$$\int_0^1 \left[\ell n\ f(x) - \ell n\ 4\right] dx < \ell n 9 - \ell n\ 4$$

$$\boxed{\left[\ell n\ f(x) - \ell n\ 4\right] dx < \ell n \frac{9}{4}}$$

תשובה: הסברנו מדוע $\int_0^1 \left[\ell n\ f(x) - \ell n\ 4\right] dx < \ell n \frac{9}{4}$.